

Zadania zebrane - Krzysztof Łapsa

Zad. 1

Dane są dwa wektory:

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}, \quad \vec{b} = -\vec{i} + \vec{k}$$

Oblicz:

- a) długość każdego wektora
- b) ich sumę
- c) iloczyn skalarny $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- d) kąt zawarty między wektorami,
- e) iloczyn wektorowy $\vec{a} \times \vec{b}$

Przed rozwiązaniem należy zapoznać się z podstawami rachunku wektorowego, który znajduje się na początku materiałów przesłanych Państwu przeze mnie.

Rozwiązanie

$$a) a = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}, \quad b = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$b) \vec{a} + \vec{b} = (3-1)\vec{i} + (4+0)\vec{j} + (5+1)\vec{k} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$c) \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 2$$

$$d) \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cdot \cos \alpha \quad \text{a więc} \quad \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{2}{5\sqrt{2}\sqrt{2}} = 0,2$$

$$e) \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k}.$$

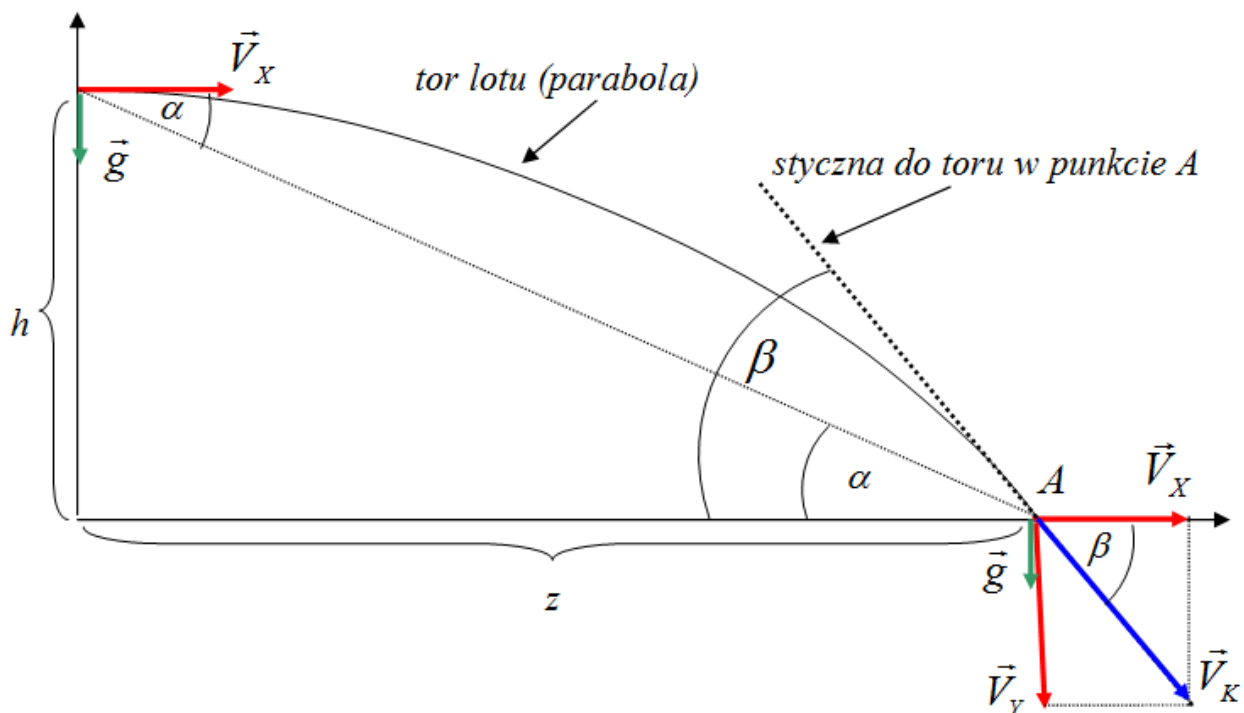
Zad. 2

Lotnik, który leci na wysokości h w kierunku poziomym z prędkością V_x , puszcza ładunek, który ma upaść na Ziemię w punkcie A. Wyznacz: pod jakim kątem lotnik powinien widzieć cel w chwili puszczenia ładunku, wartość prędkości końcowej ładunku (tuż przed upadkiem na Ziemię) oraz kąt upadku na Ziemię. Przyspieszenie ziemskie jest dane - g . Wykonaj rysunek, zaznacz wektory prędkości i przyspieszenia w chwili początkowej i końcowej.

W zadaniu mamy do czynienia z rzutem poziomym (szczególny przypadek rzutu ukośnego) w polu grawitacyjnym przy powierzchni Ziemi. Jeżeli pominiemy siły oporu powietrza możemy stwierdzić, że jedyną siłą występującą podczas spadku swobodnego ładunku jest siła grawitacji z którą jest związane przyspieszenie ziemskie g . Zadanie można by rozwiązywać analizując zmianę wektora położenia ładunku, ale znacznie prostsze jest rozpatrywanie tego ruchu rozkładając go na ruch poziomy i pionowy.

W ruchu w kierunku poziomym nie ma żadnej siły (rzut wektora siły grawitacji na kierunek osi x jest równy 0) a więc ciało w poziomie nie może przyspieszyć (I zasada dynamiki Newtona). Stąd możemy założyć, że porusza się ono w poziomie ruchem jednostajnym.

W kierunku pionowym ciało będzie poruszało się ruchem jednostajnie przyspieszonym (wektor przyspieszenia ziemskiego g w trakcie całego ruchu będzie skierowany pionowo w dół).



Dane: h, V_x, g

Szukane: α, V_K, β

Rozwiązanie

Światło odbite od celu (pkt. A) dociera do oczu lotnika pod kątem α (kąt pod którym lotnik powinien widzieć cel). Aby wyznaczyć ten kąt posłużymy się funkcją trygonometryczną tangens

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{z}.$$

Zasięg lotu z nie jest znany, ale wiemy, że wzdłuż osi x ciało porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym (brak siły wzdłuż osi x) stąd możemy zapisać

$$z = V_x \cdot t.$$

t - to czas lotu wzdłuż osi x . Jak długo będzie leciał ładunek wzdłuż osi x ? ... aż nie spadnie.

Czas spadania obliczymy przekształcając wzór na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{a więc} \quad z = V_x \cdot t = V_x \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{z} = \frac{h}{V_x \sqrt{\frac{2h}{g}}} = \frac{\sqrt{2hg}}{2V_x} \Rightarrow \alpha = \arctg \frac{\sqrt{2hg}}{2V_x}.$$

Wektor prędkości końcowej ładunku (tuż przed upadkiem na Ziemię) jest sumą wektora prędkości poziomej i wektora prędkości końcowej w kierunku osi y .

$$\vec{V}_K = \vec{V}_x + \vec{V}_y.$$

Wartość wektora prędkości końcowej ładunku obliczymy posługując się twierdzeniem Pitagorasa

$$V_K^2 = V_X^2 + V_Y^2 \Rightarrow V_K = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2}.$$

Prędkość V_Y wyliczymy, korzystając ze wzoru na prędkość w ruchu jednostajnie przyspieszonym (spadek swobodny)

$$V_Y = gt = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$$

$$\text{a więc } V_K = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2} = \sqrt{V_X^2 + 2gh}.$$

Kąt upadku na Ziemię β to kąt pomiędzy styczną do toru w punkcie A a Ziemią. Wektor prędkości wypadkowej jest zawsze styczny do toru a więc kąt β możemy wyliczyć z następującej zależności

$$\cos \beta = \frac{V_X}{V_K} \Rightarrow \beta = \arccos \frac{V_X}{V_K}.$$

II sposób wyliczenia prędkości końcowej ładunku (zasada zachowania energii)

Prędkość końcową moglibyśmy obliczyć w inny sposób korzystając z zasady zachowania energii mechanicznej.

Zakładając, że w trakcie ruchu nie dochodzi do rozproszenia energii mechanicznej możemy stwierdzić suma energii mechanicznych, początkowej E_1 i końcowej E_2 są sobie równe. W chwili początkowej energia całkowita jest równa sumie energii potencjalnej i kinetycznej a w chwili końcowej energii kinetycznej

$$E_1 = mgh + \frac{1}{2}mV_X^2 \quad E_2 = \frac{1}{2}mV_K^2$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow V_K = \sqrt{V_X^2 + 2gh}.$$

Jak widać uzyskaliśmy więc ten sam wynik.

Zad. 3

Jaką siłą należy działać w kierunku toru na skrzynię o masie m , jeżeli współczynnik tarcia kinetycznego wynosi μ , aby poruszała się ona ruchem jednostajnym prostoliniowym:

a) po torze poziomym

b) po równi pochyłej w górę, jeżeli tworzy ona kąt α z poziomem.

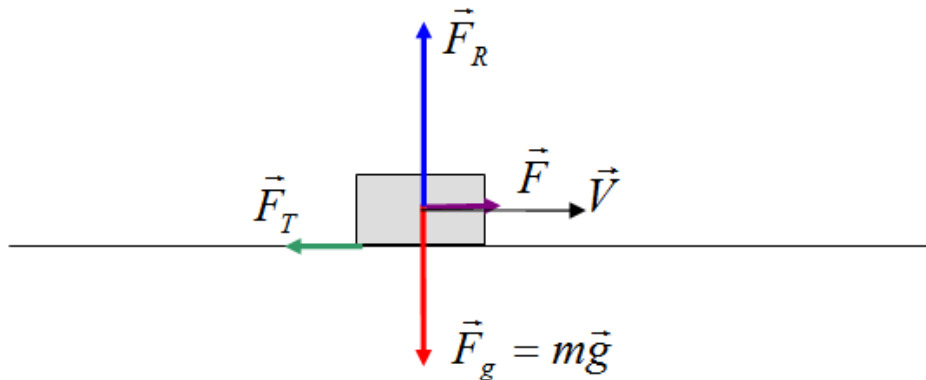
Przyspieszenie ziemskie wynosi g . Wykonaj rysunki zaznacz wektory działających sił.

Dane: m, μ, α, g Szukane: F

Rozwiązanie

Z zadania wiemy, że ciało ma poruszać się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Z I zasady dynamiki Newtona wiemy, że taka sytuacja jest możliwa jeżeli siły działające na ciało równoważą się (ich suma wektorowa jest równa 0).

a)



W omawianym zadaniu będą występowały cztery siły: siła grawitacji F_g , siła reakcji podłoża (siła sprężystości podłoża) F_R , siła tarcia F_T oraz siła zewnętrzna podtrzymująca ruch F . Siła tarcia jest skierowana przeciwnie do ruchu ciała (stycznie do toru). Dodatkowo na rysunku zaznaczono wektor prędkości V , aby wiadomo było w którą stronę porusza się skrzynia.

Jeżeli mamy do czynienia z ruchem jednostajnym prostoliniowym

$$\vec{F}_g + \vec{F}_R + \vec{F} + \vec{F}_T = 0.$$

Suma wektorów sił grawitacji i reakcji podłoża równa się zero (mają te same wartości i kierunki, ale przeciwne zwroty) $\vec{F}_g + \vec{F}_R = 0$ a więc

$$\vec{F} + \vec{F}_T = 0.$$

Zapisując powyższe równanie skalarnie musimy uwzględnić, że siły F i F_T mają przeciwne zwroty, co uwzględnimy dopisując znak minus przy F_T

$$F - F_T = 0 \Rightarrow F = F_T.$$

Siła tarcia jest równa iloczynowi współczynnika tarcia kinematycznego i siły nacisku

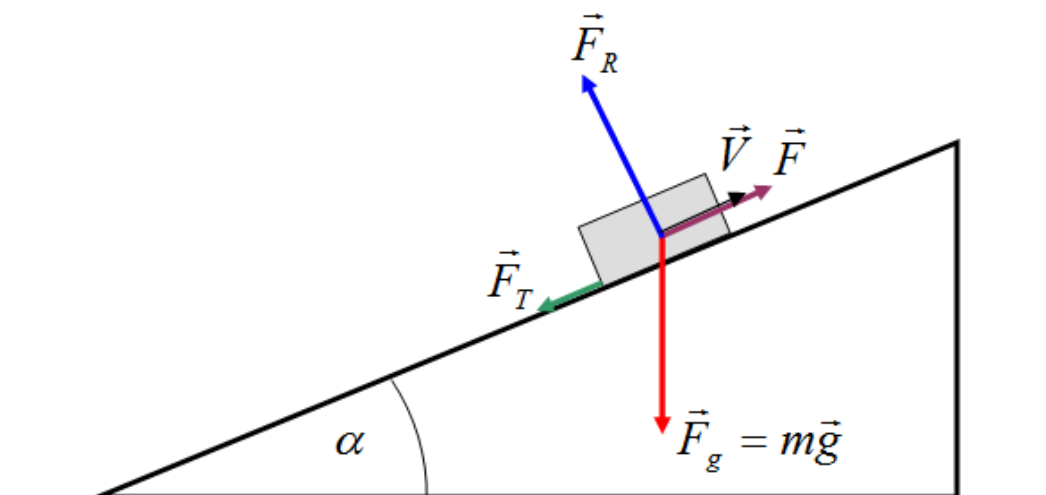
$$F_T = \mu F_N$$

W powyższym przypadku siła nacisku jest równa sile grawitacji ($F_N = F_g$) stąd

$$F = F_T = \mu F_N = \mu mg$$

Wartość siły działającej na skrzynię wynosi $F = \mu mg$.

b)



Również w powyższym przypadku, aby ciało poruszało się ruchem jednostajnym prostoliniowym wypadkowa sił działających na ciało musi się równać 0.

$$\vec{F}_g + \vec{F}_R + \vec{F} + \vec{F}_T = 0$$

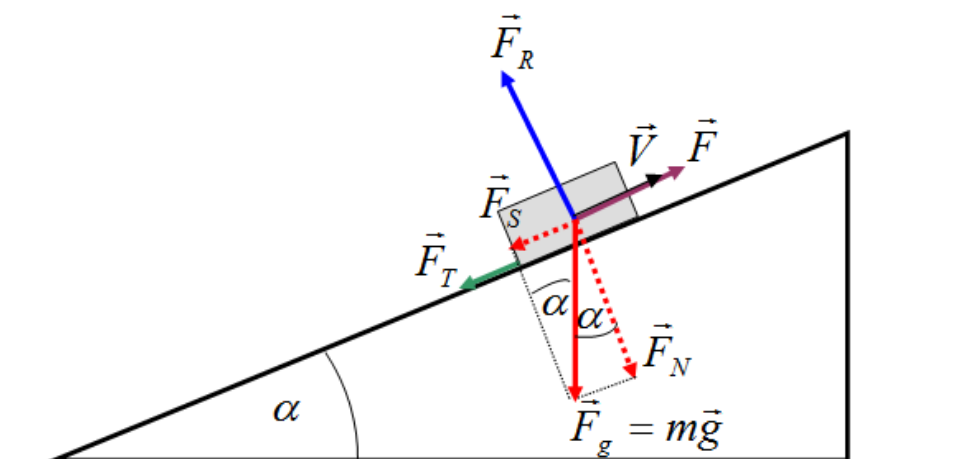
W celu ułatwienia dalszych rachunków rozłożmy siłę grawitacji na składowe styczną do toru F_S i normalną do toru F_N .

Na poniższym rysunku widać, że $\vec{F}_g = \vec{F}_S + \vec{F}_N$ a więc

$$\vec{F}_S + \vec{F}_N + \vec{F}_R + \vec{F} + \vec{F}_T = 0$$

Siła normalna do toru to siła nacisku równa co do wartości sile reakcji. Siły F_N i F_R mają przeciwne zwroty a więc ich suma jest równa 0 ($\vec{F}_N + \vec{F}_R = 0$) stąd

$$\vec{F}_S + \vec{F} + \vec{F}_T = 0.$$



Zapisując powyższe równanie skalarnie po uwzględnieniu zwrotów wektorów otrzymamy

$$-F_S + F - F_T = 0 \Rightarrow F = F_S + F_T \Rightarrow F = F_S + \mu F_N$$

Na podstawie rysunku możemy napisać

$$F_S = F_g \sin \alpha, \quad F_N = F_g \cos \alpha$$

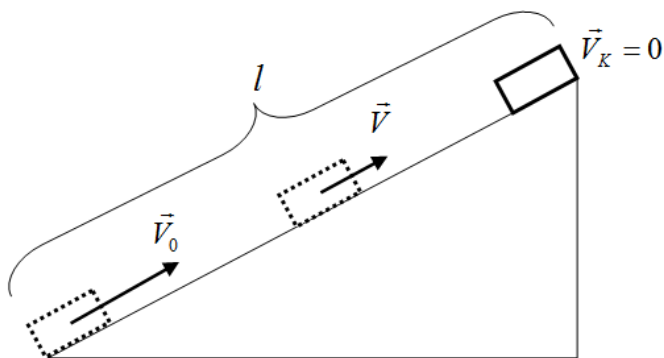
$$F = F_g \sin \alpha + \mu F_g \cos \alpha = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

Wartość siły wynosi $F = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$

zad. 4

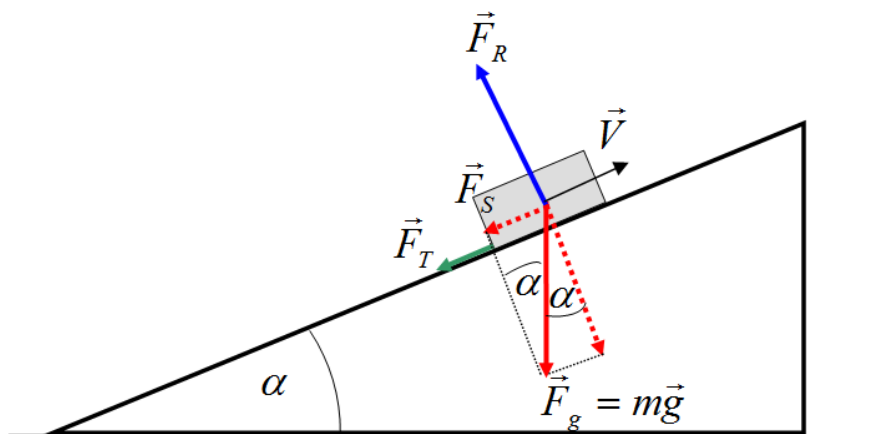
Jaką minimalną prędkość początkową należy nadać ciału o masie m , aby wjechało na szczyt równi pochyłej o długości l i kącie nachylenia α , jeżeli współczynnik tarcia kinetycznego wynosi μ . Wyznacz pracę wykonaną przez siły tarcia. Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

Dane: l, α, μ, g Szukane: V_0, W_T



W tym przypadku mamy do czynienia z prostoliniowym ruchem jednostajnie opóźnionym. Ciało będzie zwalniało pod wpływem siły tarcia i na skutek działania siły grawitacji. Pytanie dotyczy początkowej prędkości minimalnej a więc zakładamy, że na szczycie równi ciało na chwilę zatrzyma się.

Wykonajmy rysunek ciała w pewnej chwili na równi. Jest on analogiczny do rysunku z poprzedniego zadania, ale tym razem nie ma siły zewnętrznej ciągnącej (pchającej ciało).



Wypadkowa siła działająca na ciało będzie sumą wszystkich sił

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \vec{F}_T + \vec{F}_R + \vec{F}_g = \vec{F}_T + \vec{F}_R + \vec{F}_N + \vec{F}_S$$

Siła normalna do toru to siła nacisku równa co do wartości sile reakcji, siły F_N i F_R mają przeciwne zwroty a więc ich suma jest równa 0 ($\vec{F}_N + \vec{F}_R = 0$) stąd

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \vec{F}_T + \vec{F}_S$$

Przechodząc na zapis skalarny możemy zapisać

$$F_{\text{wyp}} = F_T + F_S \quad (\text{siły } F_T \text{ i } F_S \text{ mają te same kierunki i zwroty}).$$

Korzystając z II zasady dynamiki Newtona możemy zapisać, że siła wypadkowa będzie równa iloczynowi masy i przyspieszenia $F_{\text{wyp}} = ma$. W rzeczywistości a będzie opóźnieniem bo zwrot wektora a jest przeciwny do wektora prędkości V . Korzystając z zależności trygonometrycznych wprowadzonych w poprzednim zadaniu możemy zapisać

$$ma = F_S + F_T = F_g \sin \alpha + \mu F_g \cos \alpha = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

stąd

$$a = g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Skorzystajmy z zależności na drogę i prędkość w ruchu jednostajnie opóźnionym

$$l = V_0 t - \frac{1}{2} a t^2, \quad V_K = V_0 - a t$$

z początkowych rozważań wiemy, że prędkość końcowa jest równa zero ($V_K = 0$) a więc czas ruchu ciała na równi obliczymy z równania

$$0 = V_0 - a t \Rightarrow t = \frac{V_0}{a}$$

podstawiając czas ruchu ciała na równi do wzoru na drogę otrzymamy

$$l = V_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = V_0 \frac{V_0}{a} - \frac{1}{2} a \frac{V_0^2}{a^2} = \frac{V_0^2}{2a} \Rightarrow V_0 = \sqrt{2la} = \sqrt{2gl(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}.$$

Aby obliczyć pracę wykonaną przez siłę tarcia skorzystajmy ze wzoru na pracę. W tym przypadku podczas ruchu ciała wzdłuż wektora przemieszczenia działała siła tarcia $F_T = \mu mg \cos \alpha$ a więc możemy zapisać

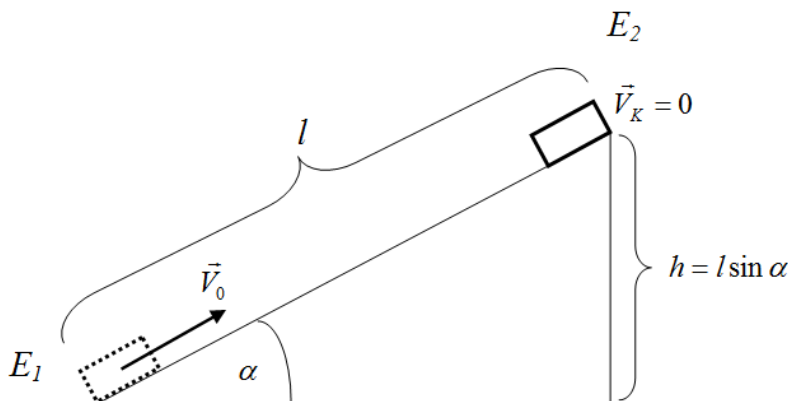
$$W_T = F_T \cdot l = \mu mgl \cos \alpha$$

Odp.

Minimalna prędkość początkowa wynosiła $V_0 = \sqrt{2gl(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}$ a praca wykonana przez siły tarcia $W_T = \mu mgl \cos \alpha$.

II sposób na obliczenie W_T (zasada zachowania energii)

Do ostatniego wzoru możemy dojść również korzystając z zasady zachowania energii. W chwili początkowej (na dole równi pochyłej) ciało posiadało jedynie energię kinetyczną a w chwili końcowej energię potencjalną wynikającą z faktu, że ciało wzniosło się na pewną wysokość. W bilansie energii musimy uwzględnić również ciepło Q które zostało wydzielone w trakcie ruchu pod górę.



$$E_1 = \frac{1}{2} m V_0^2, \quad E_2 = mgh + Q = mgl \sin \alpha + Q$$

z zasady zachowania energii $E_1 = E_2$

$$\frac{1}{2} m V_0^2 = mgl \sin \alpha + Q \Rightarrow Q = \frac{1}{2} m V_0^2 - mgl \sin \alpha$$

Ciepło powstało na skutek tarcia a więc $W_T = \frac{1}{2} m V_0^2 - mgl \sin \alpha$

Sprawdźmy jeszcze czy wynik uzyskany drugą metodą jest równy wynikowi pierwszemu. Podstawmy więc do ostatniego wzoru otrzymany wcześniej wynik na prędkość początkową $V_0 = \sqrt{2gl(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}$

$$W_T = \frac{1}{2} m V_0^2 - mgl \sin \alpha = \frac{1}{2} m 2gl(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) - mgl \sin \alpha = \mu mgl \cos \alpha$$

Jak widać drugą metodą otrzymaliśmy identyczną zależność.

Zadania do samodzielnego wyliczenia

S1. Dane są dwa wektory:

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}, \quad \vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$$

Oblicz:

- długość każdego wektora
- różnicę $\vec{b} - \vec{a}$
- iloczyn skalarny $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- kąt zawarty między wektorami,
- iloczyn wektorowy $\vec{b} \times \vec{a}$

S2. Granat wyrzucony pod kątem α do poziomu eksplodował w najwyższym punkcie toru po czasie t . Wyznacz prędkość granatu w chwili wyrzucenia? Wyznacz drogę poziomą pokonaną przez granat do chwili wybuchu. Przyspieszenie ziemskie jest dane – g . Wykonaj rysunek - zaznacz trajektorię lotu granatu oraz wektory prędkości.

$$\text{Odp. } V_0 = \frac{gt}{\sin \alpha}, \quad s = V_x t = V_0 \cos \alpha \cdot t$$

S3. W rzucie poziomym zasięg rzutu jest dwukrotnie większy od wysokości początkowej. Prędkość początkowa ciała wynosi V_0 . Oblicz czas trwania rzutu, prędkość końcową ciała oraz kąt upadku na Ziemię. Wykonaj rysunek, zaznacz wektory prędkości i przyspieszenia w chwili początkowej i końcowej. Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

$$\text{Odp. } t = \frac{V_0}{g}, \quad V_K = \sqrt{2}V_0, \quad \cos \beta = \frac{V_0}{V_K}$$

S4. Ciało o masie m zsuwa się bez prędkości początkowej po równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem α . Po czasie t prędkość ciała wynosi V . Oblicz współczynnik tarcia pomiędzy ciałem i równią. Wyznacz ilość ciepła wydzielonego podczas ruchu. Wykonaj rysunek i zaznacz poprawnie wektory. Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

$$\text{Odp. } \mu = \frac{g \sin \alpha - V/t}{g \cos \alpha}, \quad Q = mgh - \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m V (gt \sin \alpha - V)$$

(proszę pamiętać, że siła tarcia jest skierowana przeciwnie do kierunku ruchu ciała)

Zad. 1

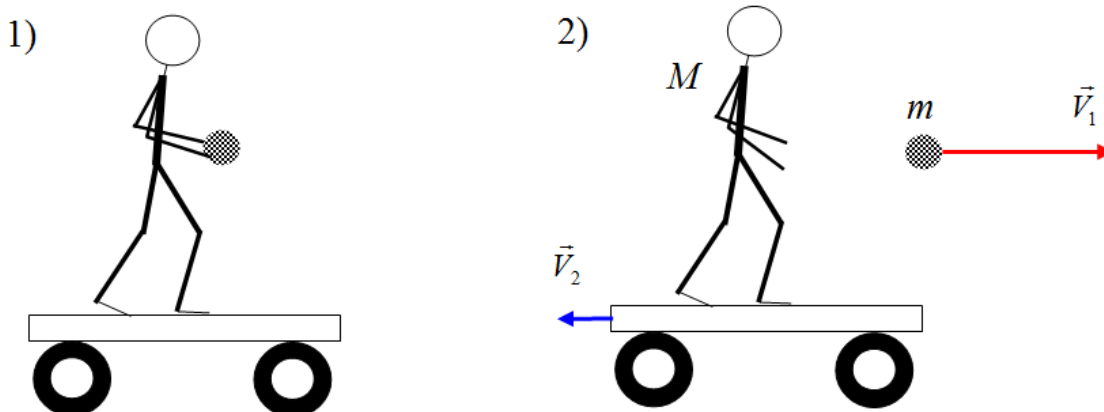
Człowiek z kamieniem w dłoni stoi na wózku spoczywającym na torach. W pewnym momencie człowiek wyrzuca poziomo kamień wzdłuż kierunku torów nadając mu prędkość V_1 . Jaką pracę wykonał człowiek jeżeli jego masa wraz z wózkiem wynosi M a masa kamienia m ?

Treść zadania jest krótka a zadanie proste do wyliczenia, ale jednak niejednokrotnie sprawia studentom problemy. Pytanie o pracę sugeruje zastosowanie wzoru $W = F \cdot s$ który w tym przypadku nam się nie przyda. Pracę wykonaną przez człowieka możemy natomiast wyznaczyć obliczając zmianę energii układu. Różnica energii końcowej i początkowej będzie równa pracy jaką wykonał człowiek. Innymi słowy mówiąc, jeżeli w pierwszej sytuacji wózek wraz z człowiekiem i kamieniem był w spoczynku a potem poruszał się zarówno wózek z człowiekiem jak i kamień to ruch ten wziął się z pracy wykonanej przez człowieka.

Dane: M, m, V_1

Szukane: W

Rozwiązanie



Jak widać na powyższym rysunku wektory prędkości człowieka i kamienia mają przeciwne zwroty, natomiast wartość prędkości kamienia jest większa od wartości prędkości człowieka. Skąd takie założenie? W układzie siły zewnętrzne równoważą się (siła grawitacji i siła reakcji podłoża) a więc całkowity pęd układu jest stały. Mamy więc tu do czynienia z zasadą zachowania pędu. Przypomnijmy, że pęd jest wielkością wektorową a więc stałość dotyczy kierunku, zwrotu i wartości wektora pędu.

Pęd początkowy (sytuacja 1) jest równy 0 bo układ nie porusza się, natomiast wektor pędu w sytuacji 2 będzie równy sumie wektorów pędu kamienia oraz wózka z człowiekiem

$$\vec{p}_1 = 0, \quad \vec{p}_2 = m\vec{V}_1 + M\vec{V}_2.$$

Z zasady zachowania pędu wynika, że $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$ a więc

$$0 = m\vec{V}_1 + M\vec{V}_2 \Rightarrow m\vec{V}_1 = -M\vec{V}_2.$$

Widać więc, że zwroty wektorów prędkości są przeciwne a jeżeli $m < M$ to $V_1 > V_2$.

Przejdźmy na zapis skalarny (musimy w tej sytuacji uwzględnić kierunki i zwroty wektorów)

$$p_1 = 0, \quad p_2 = mV_1 - MV_2$$

W powyższym wzorze pojawił się znak minus, gdyż wektory prędkości (oraz pędu) będą miały przeciwne zwroty. Porównując wartości pędów obliczymy prędkość człowieka wraz z wózkiem po wyrzuceniu kamienia

$$0 = mV_1 - MV_2 \quad \Rightarrow V_2 = \frac{mV_1}{M}.$$

Tak jak napisałem na początku, praca wykonana przez człowieka będzie równa różnicy energii końcowej i początkowej. Zapiszmy więc wzory na energię w sytuacjach 1 i 2. Jeżeli założymy, że poziom człowieka i kamienia względem powierzchni Ziemi nie ulegają zmianie to w rozważaniach możemy pominąć energię potencjalną układu (weźmiemy pod uwagę jedynie energię kinetyczną). W chwili początkowej energia całkowita równa się zero bo nic się nie porusza (energia kinetyczna jest równa 0). Natomiast w sytuacji 2 porusza się zarówno człowiek z wózkiem jak i kamień a więc sumujemy ich energie kinetyczne. Zwróćcie Państwo uwagę, że w tym przypadku sumujemy energie bo są to wielkości skalarne i w rozważaniach energetycznych nie ma znaczenia w którą stronę poruszają się poszczególne elementy układu.

$$E_1 = 0, \quad E_2 = \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}MV_2^2.$$

Pracę możemy więc wyliczyć z następującego wzoru

$$W = \Delta E = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}MV_2^2 - 0 = \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}MV_2^2$$

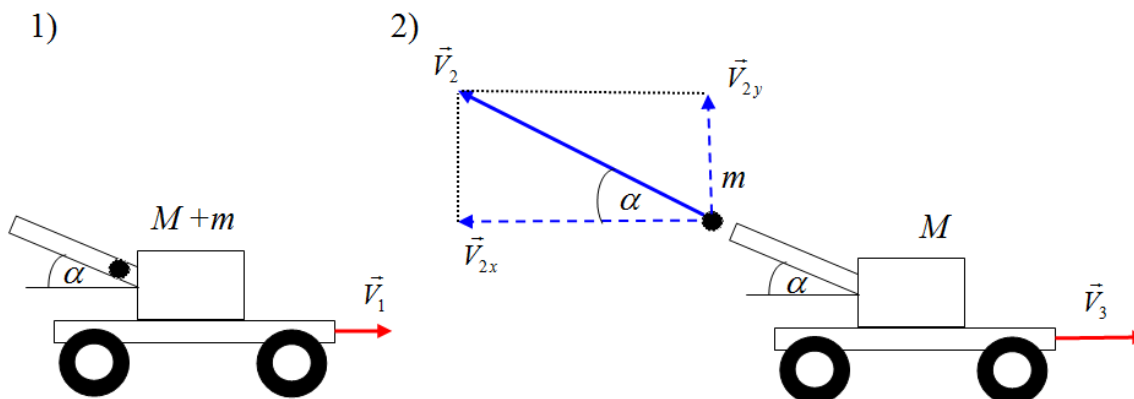
Podstawiając za V_2 zależność wyznaczoną wcześniej z zasady zachowania pędu ostatecznie otrzymamy zależność na pracę wykonaną przez człowieka

$$W = \frac{mV_1^2}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Zad. 2

Rozpędzony wagon kolejowy porusza się po torach z prędkością V_1 . Na wagonie znajduje się zamocowane działo, którego lufa jest skierowana pod kątem α przeciwnie do kierunku ruchu (patrz rysunek). Po chwili działo wystrzeliło pocisk o masie m nadając mu prędkość względem otoczenia V_2 . Jaka będzie prędkość wagonu wraz z działem po wystrzale?

Również w tym przypadku możemy skorzystać z zasady zachowania pędu jednak sytuacja jest nieco bardziej skomplikowana. Zaczniemy od rysunku



Ponownie dzielimy zadanie na dwa etapy. Jak wspomniałem, możemy wykorzystać zasadę zachowania pędu. W tym przypadku jednak siły równoważą się jedynie dla kierunku poziomego (w pionie odrzut wagonu nie jest możliwy bo działa siła reakcji podłoża). Będziemy więc rozpatrywać wektory pędu (prędkości) jedynie wzdłuż osi x . Jak widać na powyższym rysunku wektor prędkości kuli V_2 został rozłożony na dwie składowe z których interesuje nas składowa V_{2x} .

Zapiszmy wektorowo pędy w sytuacjach 1 i 2 (dla kierunku osi x).

$$\vec{p}_1 = (M + m)\vec{V}_1, \quad \vec{p}_2 = M\vec{V}_3 + m\vec{V}_{2x},$$

Przejdźmy na zapis skalarny (musimy w tej sytuacji uwzględnić kierunki i zwroty wektorów)

$$p_1 = (M + m)V_1, \quad p_2 = MV_3 - mV_{2x}.$$

W powyższym wzorze na p_2 pojawił się znak minus, gdyż wektory prędkości (oraz pędu) będą miały przeciwne zwroty.

Korzystając z zasady zachowania pędu $p_1 = p_2$ oraz zależności trygonometrycznej $\cos \alpha = V_{2x}/V_2$ możemy zapisać

$$(M + m)V_1 = MV_3 - mV_2 \cos \alpha$$

co ostatecznie daje

$$V_3 = \frac{(M + m)V_1 + mV_2 \cos \alpha}{M}.$$

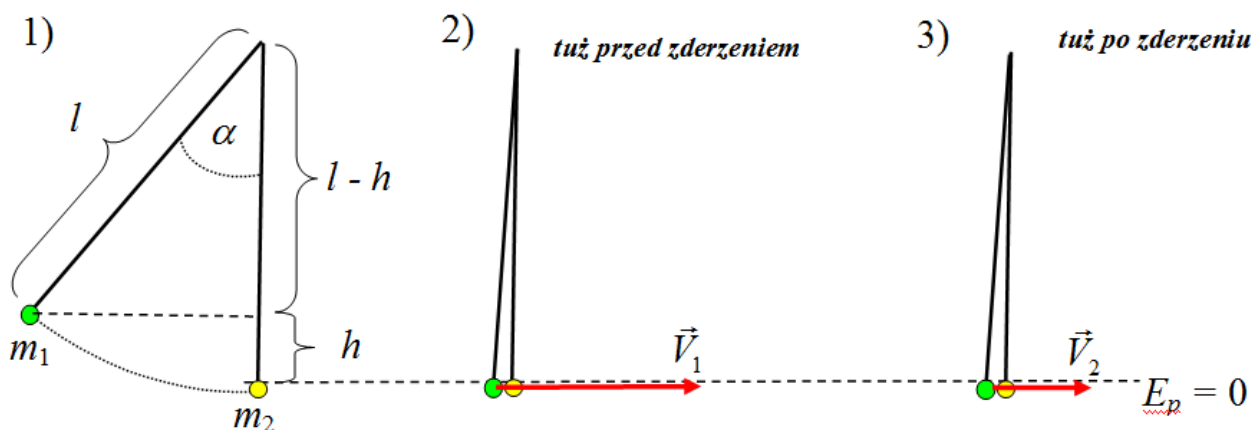
Zad. 3

Na dwóch niciach o długości l zawieszono w tym samym punkcie dwie małe kulki z plasteliny o masach m_1 i m_2 . Kulkę o masie m_1 odchyłono o pewien kąt α i puszczono. Ile ciepła wydzielilo się podczas zderzenia jeżeli było ono całkowicie niesprężyste. Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

Dane: l, m_1, m_2, α, g

Szukane: Q

Przy rozwiązywaniu zadania istotne jest, aby podzielić je na właściwe etapy, wykonać rysunki i zapisać wzory. Mamy do czynienia ze zderzeniem całkowicie niesprężystym a więc po zderzeniu kulki sklejają się a w trakcie zderzenia wydzielilo się ciepło, które należy uwzględnić w bilansie energetycznym. Rysunek będzie się składał z trzech etapów



Na rysunku przerywaną linią oznaczono poziom dla którego zakładamy, że energia potencjalna jest równa 0.

Zapiszmy energie i wartości pędów w poszczególnych przypadkach

$$\begin{array}{lll}
E_1 = m_1 gh & E_2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 & E_3 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_2^2 + Q \\
p_1 = 0 & p_2 = m_1 V_1 & p_3 = (m_1 + m_2) V_2
\end{array}$$

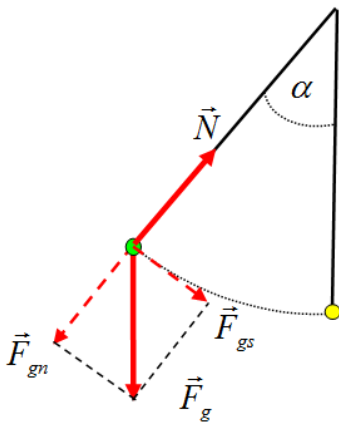
- 1) W pierwszym etapie kulki nie poruszają się a więc jedyną energią jest energia potencjalna kulki o masie m_1 wzniesionej na wysokość h . Jeżeli nie ma ruchu to pęd jest równy 0.
- 2) W sytuacji tuż przed zderzeniem kulka m_1 porusza się z prędkością V_1 . W związku z tym posiada energię kinetyczną E_1 i pęd p_1 .
- 3) Trzeci etap to sytuacja tuż po zderzeniu (kulki zderzyły się, ale jeszcze nie wychyliły). Kulki wskutek zderzenia całkowicie niesprężystego skleiły się i poruszają się razem z prędkością V_2 (stąd energia kinetyczna i pęd). W trakcie zderzenia wydzielilo się ciepło Q .

Korzystając z zasady zachowania energii możemy zapisać $E_1 = E_2 = E_3$.

Zasada zachowania pędu jest jednak spełniona tylko pomiędzy etapami 2 i 3 tzn. $\vec{p}_1 \neq \vec{p}_2 = \vec{p}_3$.

Dlaczego zasada zachowania pędu nie została spełniona pomiędzy etapami 1 i 2?

Bo podczas opadania na kulkę działała niezerównoważona składowa siły grawitacji F_{gs} (rys poniżej). To ona spowodowała, że kulka zaczęła przyspieszać do prędkości V_1 .



Teraz wystarczy skorzystać z rysunków i zapisanych powyżej zależności

$$\cos \alpha = \frac{l-h}{l} \Rightarrow h = l(1 - \cos \alpha)$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 \Rightarrow V_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}$$

$$p_2 = p_3 \Rightarrow m_1 V_1 = (m_1 + m_2) V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}$$

$$E_2 = E_3 \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_2^2 + Q \Rightarrow Q = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_2^2$$

Prędkości V_1 i V_2 zostały już wyliczone i wystarczyłoby podstawić je do poniższego wzoru

$$Q = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_2^2.$$

Zadania do samodzielnego wyliczenia

S4

Człowiek z kamieniem stoi na wózku poruszającym się z prędkością V_1 . W pewnym momencie człowiek rzucił przeciwnie do kierunku ruchu kamień o masie m nadając mu prędkość poziomą V_2 (względem otoczenia). Wyznacz masę człowieka wraz z wózkiem jeżeli ich prędkość po wyrzucie wynosi V_3 . Jaka pracę wykonał człowiek przy wyrzucie? Wykonaj rysunek, zaznacz wektory prędkości.

$$\text{Odp. } M = \frac{m(V_1 + V_2)}{V_3 - V_1}, \quad W = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}MV_3^2 + \frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}(M + m)V_1^2$$

S5

Kulka o masie M została zawieszona na nieważkiej i nierozciągliwej nici o długości l . Nici z kulką odchyłono od pionu o kąt β i puszczono. W chwili, gdy nici była równoległa do pionu w kulkę trafił lecący poziomo pocisk o masie m . Pocisk utkwiał w kulce a cały układ (kulka + pocisk) zatrzymał się. Znajdź ilość ciepła wydzielonego podczas zderzenia. Wykonaj rysunki i odpowiednio oznacz wektory prędkości.

$$\text{Odp. } Q = Mgl(1 - \cos \beta)(1 + M/m)$$

S6

Plastelinowa kulka o masie m_1 została powieszona na cienkiej i nierozciągliwej nici o długości l a następnie nici z kulką została odchyłona z położenia równowagi o kąt 90° . Po uwolnieniu kulki zaczęła ona opadać a w najniższym punkcie toru zderzyła się z drugą kulką o masie m_2 . O jaki kąt maksymalny odchyli się nici ze sklejonymi kulkami? Ile ciepła wydzielilo się podczas zderzenia? Kulki należy potraktować jako punkty materialne. Przyspieszenie ziemskie wynosi g . Wykonaj rysunki, zaznacz wektory prędkości.

$$\text{Odp. } \cos \alpha = \frac{l-h}{l} \quad \text{gdzie} \quad h = l \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2, \quad Q = m_1gl - \frac{(m_1 + m_2)V_2^2}{2}$$

Ruch po okręguKomentarz

W zadaniach będziemy mieli czynienia z ruchem punktu materialnego po okręgu. Jak już Państwo wiecie z przesłanych materiałów możemy w tym przypadku mówić o dwóch siłach związanych z tym ruchem. Siłą dośrodkową powodującą zakrzywienie toru ruchu oraz siłą odśrodkową (siłą bezwładności) odczuwalną z punktu widzenia obserwatora znajdującego się w ruchu po okręgu. Możemy rozwiązywać zadania z punktu widzenia obserwatora z zewnątrz (widzącego efekt działania siły dośrodkowej) lub obserwatora poruszającego się po okręgu. Ja preferuję pierwszy punkt widzenia.

Zad. 1

Na linie o długości l zawieszono kulkę a następnie wprowadzono ją w ruch tak, że zaczęła wykonywać pionową pętlę. Z jaką maksymalną prędkością kątową może obracać się kulka, jeżeli linka może wytrzymać siłę 4-krotnie większą od ciężaru kulki? Przyspieszenie ziemskie wynosi g . Wykonaj rysunek (zaznacz poprawnie wektory prędkości i sił).

Dane: l, g

Szukane: ω

Rozwiązanie

Zakładamy, że kulka porusza się po okręgu ze stałą co do wartości prędkością liniową V , styczną do okręgu. Dzieje się tak, gdyż występuje siła naciągu linki N , która wraz z siłą grawitacji F_g będą

stanowiły siłę dośrodkową F_d . Jak widać na poniższym rysunku pomimo, że wartość prędkości będzie cały czas taka sama (długość wektora czerwonego nie zmienia się) siła naciągu linki (wektor zielony) jest różna w zależności od punktu na okręgu. Dzieje się tak ponieważ wektor siły grawitacji jest różnie skierowany w stosunku do promienia okręgu. Jak widać w dolnym punkcie siła naciągu będzie największa bo linka musi "poradzić sobie" z siłą grawitacji oraz zakrzywić tor ruchu kulki (spełnić rolę siły dośrodkowej). Wartość siły dośrodkowej będzie z tego punktu widzenia równa sile naciągu minus siła grawitacji a więc możemy zapisać

$$F_d = N_1 - F_g$$

Linka może wytrzymać siłę 4-krotnie większą od ciężaru kulki a więc

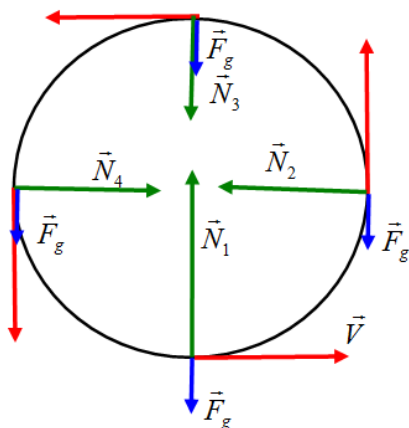
$$N_1 = 4F_g.$$

Z powyższych równań wynika, że

$$F_d = 4F_g - F_g = 3F_g.$$

Skorzystajmy ze wzoru na siłę dośrodkową (m - masa kulki, r - promień okręgu, V - prędkość liniowa, ω - prędkość kątowna)

$$F_d = m \frac{V^2}{r} = m \frac{(\omega r)^2}{r} = m \omega^2 r \quad r = l \quad \Rightarrow \quad F_d = m \omega^2 l.$$



Porównując otrzymane wzory na siłę dośrodkową uzyskamy

$$3F_g = m \omega^2 l \Rightarrow 3mg = m \omega^2 l \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

Maksymalna prędkość kątowna kulki to $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$

Uwaga do rysunku

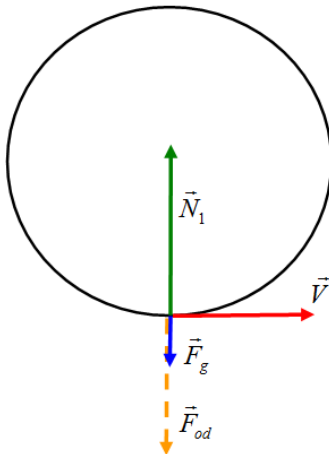
Patrząc na powyższy rysunek i obliczenia moglibyśmy powiedzieć, że

$$N_1 = 4F_g, \quad N_2 = N_4 = 3F_g, \quad N_3 = 2F_g.$$

Inny punkt widzenia

Zadanie można by obliczyć rozważając siłę bezwładności (siłę odśrodkową). Na poniższym rysunku widać, że linka musi "poradzić sobie" z siłą bezwładności (siłą odśrodkową) oraz siłą ciężkości a więc

$$N_1 = F_{od} + F_g$$



wiemy już, że linka może wytrzymać siłę 4-krotnie większą od ciężaru kulki czyli

$$N_1 = 4F_g$$

a więc

$$4F_g = F_{od} + F_g.$$

Wiemy, że wartości siły dośrodkowej i odśrodkowej są takie same a więc korzystając z powyższego wzoru oraz wcześniej wyliczonej siły dośrodkowej możemy zapisać

$$4F_g = m\omega^2 l + F_g \Rightarrow 4mg = m\omega^2 l + mg \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

Uzyskaliśmy więc ten sam wynik patrząc nieco inaczej na tę samą sytuację.

zad. 2

Mała kulka stacza się po rynn timer zakończonę pionow ą pętl ą o promieniu r

a) z jakiej minimalnej wysokości kulka powinna się stoczyć, aby nie odpaść od pętli (wykonać pełen obrót)?

b) z jakiej wysokości kulka ta powinna się stoczyć, aby odpaść od pętli na wysokości $h = \frac{3}{2}r$?

Kulkę traktujemy jako punk materialny, opory są pomijalnie małe.

Przydatne linki

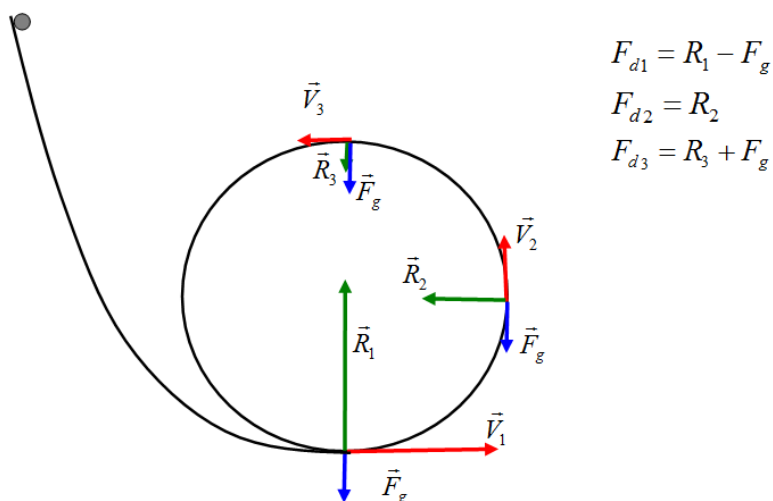
<https://www.youtube.com/watch?v=bCs8h8Yr4R0>

https://www.youtube.com/watch?v=HV_WuRzcuwo

Rozwiązanie

a)

Zastanówmy się jakie siły będą pełniły rolę siły dośrodkowej w trzech różnych punktach toru dla kulki która stoczyła się z dużej wysokości. Jak widać na poniższym rysunku wartość prędkość liniowej kulki V będzie malała wraz z jej wznoszeniem się na pętli (wzrost energii potencjalnej kosztem energii kinetycznej). Siła dośrodkowa która powoduje ruch po okręgu jest wypadkową sił reakcji podłoża i siły grawitacji. W najniższym punkcie (1) siła reakcji musi zakrzywić tor ruchu i zrównoważyć siłę grawitacji. W połowie wysokości siła grawitacji nie ma wpływu na ruch po okręgu bo jest prostopadła do promienia (nie ma składowej równoległej do promienia okręgu). W najwyższym punkcie toru rolę siły dośrodkowej pełni zarówno siła reakcji podłoża jak i siła grawitacji (mają ten sam kierunek i zwrot tzn. do środka okręgu).

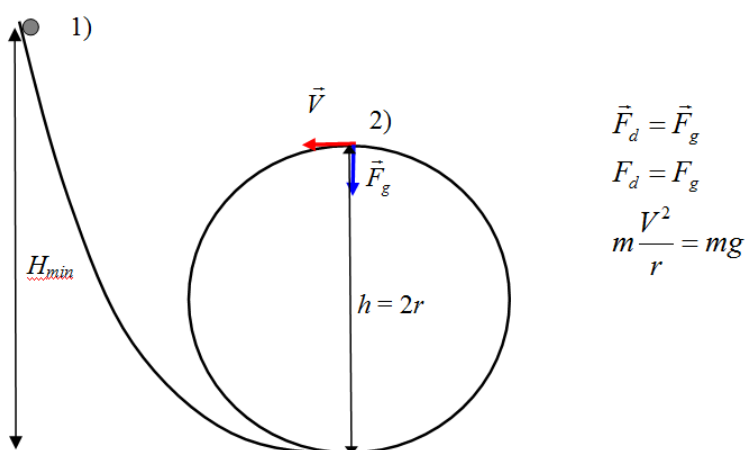


$$F_{d1} = R_1 - F_g$$

$$F_{d2} = R_2$$

$$F_{d3} = R_3 + F_g$$

Nietrudno się domyśleć, że aby kulka wykonała pełną pętlę musi pokonać najwyższy punkt kolistego toru a więc interesuje nas trzeci przypadek $F_{d3} = R_3 + F_g$. W zadaniu jednak jest pytanie... z jakiej minimalnej wysokości powinna stoczyć się kulka, aby pokonać pętlę? Oznacza to, że kulka "ledwie ledwie" pokona pętlę a więc w najwyższym punkcie nie będzie już naciskała na podłoże czyli siła reakcji będzie równa 0. Z tego płynie wniosek, że w najwyższym punkcie pętli siła dośrodkowa będzie równa sile grawitacji.



$$\vec{F}_d = \vec{F}_g$$

$$F_d = F_g$$

$$m \frac{V^2}{r} = mg$$

Z powyższego warunku możemy wyliczyć jaką minimalną prędkość powinna mieć kulka w najwyższym punkcie toru, aby pokonała pętlę.

$$m \frac{V^2}{r} = mg \Rightarrow \frac{V^2}{r} = g \Rightarrow V = \sqrt{gr}$$

Aby wyznaczyć wysokość minimalną skorzystamy z zasady zachowania energii mechanicznej (wiemy, że opory są pomijalnie małe). W sytuacji 1) kulka nie porusza się ma więc energię potencjalną względem najniższego punktu pętli

$$E_1 = mgH_{\min}$$

W położeniu 2) kulka posiada energię potencjalną i kinetyczną

$$E_2 = mgh + \frac{1}{2}mV^2 = mg2r + \frac{1}{2}mV^2.$$

Z zasady zachowania energii możemy zapisać

$$E_1 = E_2 \Rightarrow mgH_{\min} = mg2r + \frac{1}{2}mV^2$$

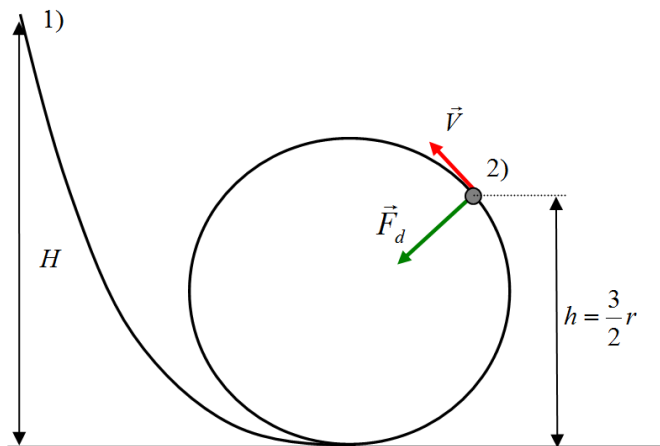
Podstawiając do powyższego równania wzór na prędkość $V = \sqrt{gr}$ uzyskamy

$$mgH_{\min} = mg2r + \frac{1}{2}mgr.$$

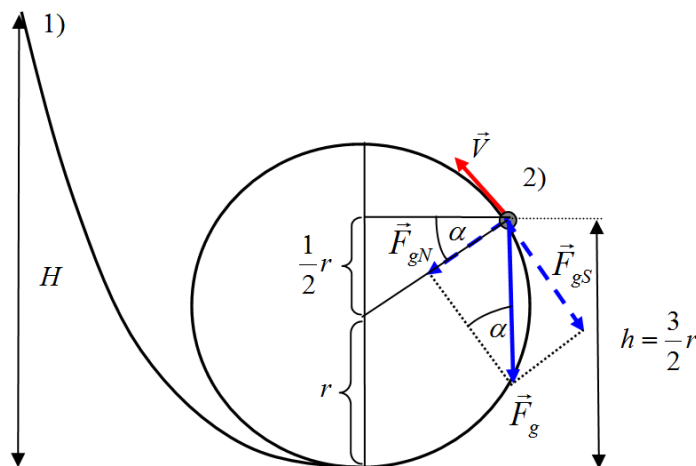
Po elementarnych przekształceniach możemy zapisać wzór na wysokość minimalną

$$H_{\min} = \frac{5}{2}gr$$

b) Na początek wykonajmy rysunek. Na poniższym rysunku uchwyciono chwilę w której kulka znajduje się przy torze, ale już na niego nie naciska a ułamek sekundy później oderwie się od niego i będzie poruszała się po paraboli (kontynuuje ruch jak w rzucie ukośnym).



Zadanie możemy obliczyć podobnie jak poprzedni podpunkt, jednak tym razem będzie nieco trudniej. Skoro w punkcie 2) kulka już nie naciska na podłoże (pętlę) tzn. siła reakcji jest równa 0. Jediną siłą jaka może pełnić rolę siły dośrodkowej w tym punkcie jest siła grawitacji. Jednak jest ona skierowana pionowo w dół dlatego rozłożymy ją na składowe styczną i normalną do toru. Dla przejrzystości rysunku powiększę wektor siły grawitacji w porównaniu z poprzednimi rysunkami.



Na powyższym rysunku liniami przerywanymi z zaznaczono składowe siły grawitacji czyli $\vec{F}_g = \vec{F}_{gN} + \vec{F}_{gS}$.

Nas będzie interesowała jedynie składowa normalna do toru bo to ona w tym przypadku będzie pełniła rolę siły dośrodkowej $\vec{F}_d = \vec{F}_{gN}$.

Z rysunku widać, że $F_{gN} = F_g \sin \alpha$ oraz $\sin \alpha = \frac{\frac{1}{2}r}{r} = \frac{1}{2}$

stąd $F_{gN} = \frac{1}{2} F_g = \frac{1}{2} mg$

Obliczmy jak w podpunkcie a) wartość prędkości jaką będzie miała kulka na wysokości h

$$m \frac{V^2}{r} = \frac{1}{2} mg \Rightarrow V = \sqrt{\frac{1}{2} gr}.$$

Dalej postępujemy jak w podpunkcie a).

Skorzystamy z zasady zachowania energii mechanicznej. W sytuacji 1) kulka nie porusza się ma więc energię potencjalną względem najniższego punktu pętli

$$E_1 = mgH$$

W położeniu 2) kulka posiada energię potencjalną i kinetyczną

$$E_2 = mgh + \frac{1}{2} mV^2 = mg \frac{3}{2} r + \frac{1}{2} mV^2.$$

Z zasady zachowania energii możemy zapisać

$$E_1 = E_2 \Rightarrow mgH = mg \frac{3}{2} r + \frac{1}{2} mV^2.$$

Podstawiając do powyższego równania wzór na prędkość $V = \sqrt{\frac{1}{2} gr}$ uzyskamy

$$mgH = mg \frac{3}{2} r + \frac{1}{2} m \frac{1}{2} gr.$$

Po elementarnych przekształceniach możemy zapisać wzór na poszukiwaną wysokość

$$H = \frac{7}{4} gr.$$

Zad. 3

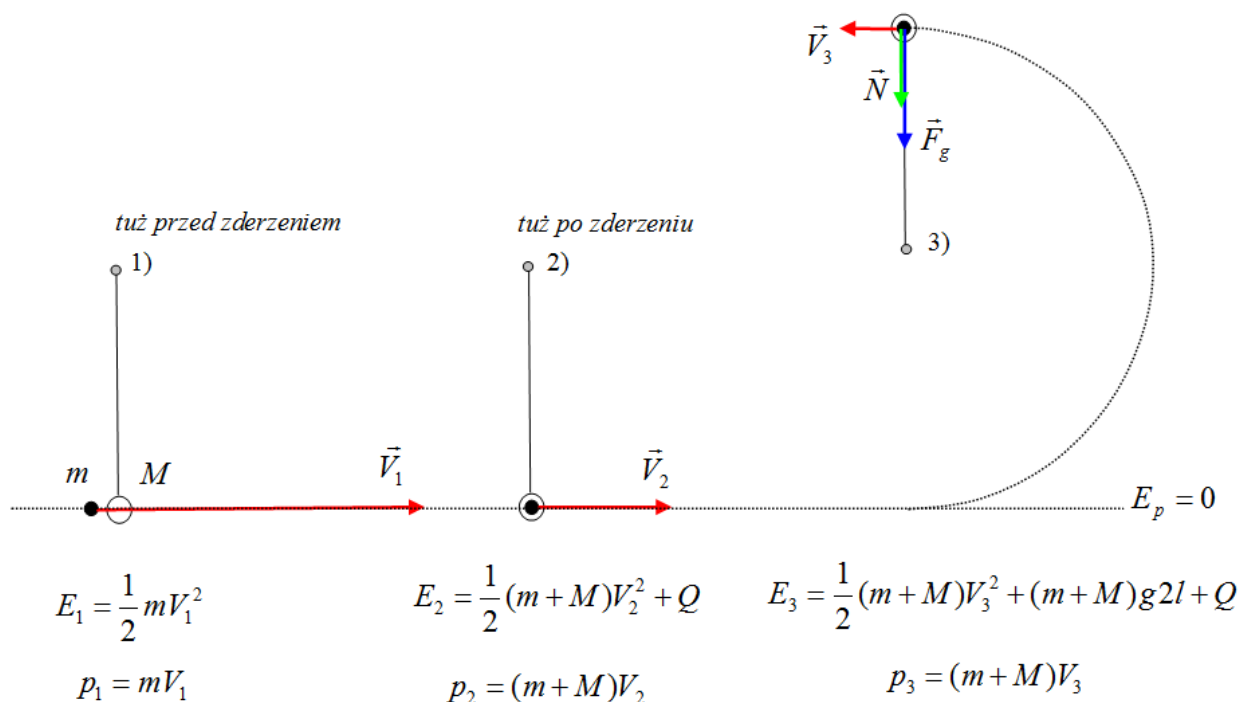
Na nici o długości l zawieszono niewielki ciężarek o masie M . Z ciężarkiem tym zderzył się całkowicie niesprężysto lecący poziomo pocisk o masie m . Ciężarek wraz z wbitym pociskiem zatoczył okrąg w płaszczyźnie pionowej. Oblicz siłę naciągu nici w najwyższym punkcie tego toru jeżeli prędkość początkowa pocisku wynosiła V_1 . Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

Dane: M, m, V_1, g

Szukane: N

Rozwiązanie

Na początek wykonajmy rysunek dzieląc zadanie na trzy etapy



Pod każdym etapem zapisano energię i pęd.

1) W pierwszym etapie (tu przed zderzeniem) pocisk porusza się a więc posiada energię kinetyczną i pęd.

2) W sytuacji tuż po zderzeniu pocisk wbija się w ciężarek (zderzenie całkowicie niesprężyste) i zaczynają poruszać się razem. W związku z tym układ (ciężarek + pocisk) posiada energię kinetyczną E_2 i pęd p_2 a dodatkowo wydzielilo się ciepło Q (zderzenie całkowicie niesprężyste).

3) Trzeci etap, układ w najwyższym punkcie kołowego toru. Układ ma prędkość w związku z tym posiada energię kinetyczną i pęd. Układ wzniósł się na wysokość $2l$ a tym samym posiada energię potencjalną. Cały czas mamy w układzie ciepło Q .

Korzystając z zasady zachowania energii możemy zapisać $E_1 = E_2 = E_3$.

Zasada zachowania pędu jest jednak spełniona tylko pomiędzy etapami 1 i 2 tzn. $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 \neq \vec{p}_3$.

Dlaczego zasada zachowania pędu nie została spełniona pomiędzy etapami 2 i 3?

Bo podczas wznoszenia na kulkę działała niezerównoważona składowa siły grawitacji F_{gs} styczna do toru. To ona spowodowała, że układ zwolnił do prędkości V_3 .

Jak widać na rysunku w najwyższym punkcie toru siła grawitacji + siła naciągu będą pełniły rolę siły dośrodkowej

$$\vec{F}_d = \vec{F}_g + \vec{N},$$

zapis skalarny jest analogiczny (kierunki i zwroty sił są takie same) $F_d = F_g + N$ stąd

$$N = F_d - F_g = m \frac{V_3^2}{l} - mg.$$

Żeby wyliczyć wartość siły naciągu w najwyższym punkcie toru musimy więc wyliczyć prędkość V_3 .

Porównajmy energie E_2 i E_3

$$\frac{1}{2}(m+M)V_2^2 + Q = \frac{1}{2}(m+M)V_3^2 + (m+M)g2l + Q$$

po elementarnych przekształceniach uzyskamy

$$V_3 = \sqrt{V_2^2 - 4gl}.$$

Nie znamy prędkości V_2 , ale możemy ją wyliczyć korzystając z zasady zachowania pędu $p_1 = p_2$

$$mV_1 = (m + M)V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{mV_1}{m + M}$$

$$V_3 = \sqrt{V_2^2 - 4gl}$$

$$V_3 = \sqrt{\left(\frac{mV_1}{m + M}\right)^2 - 4gl}$$

$$N = m \frac{V_3^2}{l} - mg$$

Uzyskałmy w powyższy sposób wartość siły naciągu nici w najwyższym punkcie toru.

Zadania do samodzielnego wyliczenia

S1

Ciężarówka o masie m jedzie po moście ze stałą prędkością V . Z jaką siłą naciska ciężarówka na most przejeżdżając przez jego środek, jeżeli:

- most jest poziomy
- most jest wypukły o promieniu krzywizny R
- most jest wklęsły o promieniu krzywizny R

Wykonaj rysunek, zaznacz wektory sił i prędkości. Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

$$\text{Odp. a) } F_N = mg, \text{ b) } F_N = mg - m \frac{V^2}{R}, \text{ c) } F_N = mg + m \frac{V^2}{R}$$

S2

Na nici o długości l zawieszono ciężarek o masie M . Z ciężarkiem tym zderza się całkowicie niesprężyste lecący poziomo pocisk o masie m . Oblicz minimalną prędkość jaką musiał posiadać pocisk jeżeli ciężarek wraz z wbitym pociskiem zatoczył okrąg w płaszczyźnie pionowej? Przyspieszenie ziemskie jest dane – g . Wykonaj rysunki, zaznacz wektory prędkości w poszczególnych etapach ruchu.

$$\text{Odp. } V = \frac{M + m}{m} \sqrt{5gl}$$

Podpowiedź

Powyższe zadanie to kompilacja zadań 2a) oraz 3.

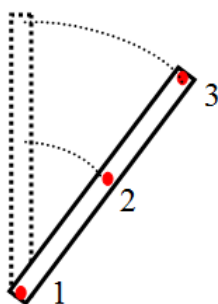
Zasada zachowania energii i zasada zachowania momentu pędu

zad. 1

Pionowy słupek o wysokości h po podpiłowaniu przy podstawie przewraca się. Znajdź prędkość liniową jego górnego końca w chwili uderzenia o Ziemię. Dane jest przyspieszenie ziemskie - g .

Wprowadzenie

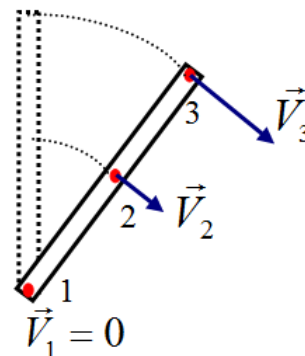
Prędkość liniowa a prędkość kąтова



Słupek zaczyna przewracać się. Co możemy powiedzieć o prędkościach liniowych i kątowych punktów 1, 2, 3 po chwili czasu?

Prędkości kątowe są takie same bo każdy z punktów pokonał tę samą drogę kątową w tym samym czasie (punkt 1 obrócił się wokół swojej osi).

Prędkości liniowe są różne. Punkt 3 pokonał najdłuższą drogę a punkt 1 nie przemieścił się w tym samym czasie.



$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_3 = \vec{\omega}$$

Wektor prędkości kątowej pokrywa się z osią obrotu (zawsze), w tym przypadku jest skierowany za kartkę.

$$V = \frac{2\pi r}{T}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow V = \omega r \quad \text{gdzie } T - \text{okres obrotu, } r - \text{promień okręgu}$$

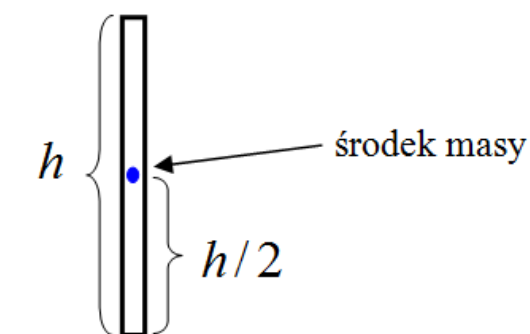
Rozwiązanie

Dane: h , g

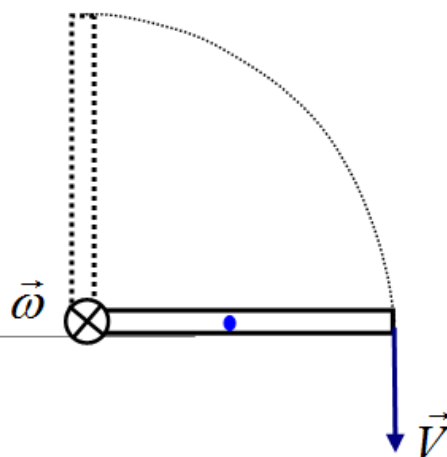
Szukane: ω

Zadanie podzielimy na dwa etapy 1) tuż po podcięciu słupa i 2) tuż przed upadkiem słupa na Ziemię.

1)



2)



Zakładając, że w trakcie ruchu nie występują opory powietrza zadanie najprościej można obliczyć stosując zasadę zachowania energii mechanicznej. Jako punkt odniesienia dla zerowej energii potencjalnej przyjmujemy powierzchnię Ziemi.

1) W pierwszej sytuacji nie ma ruchu a więc słup posiada tylko energię potencjalną. Nie możemy jednak zastosować klasycznego zapisu na energię potencjalną $E \neq mgh$ gdyż cała masa słupa nie znajduje się na wysokości h . Słup to bryła sztywna a więc skupimy się na jego środku masy. Znajduje się on na wysokości $h/2$ a więc

$$E_1 = mg \frac{1}{2} h$$

2) W drugiej sytuacji środek masy słupa znajduje się na powierzchni Ziemi a więc jego energia potencjalna jest równa zero. Nie można zapisać, że energia kinetyczna jest równa $E = mV^2/2$ bo słup nie porusza się z prędkością V a jedynie jego koniec. Możemy jednak zauważyć, że cały słup wykonuje ruch obrotowy względem osi obrotu na początku słupa stąd zastosujemy wzór na energię kinetyczną w ruchu obrotowym bryły sztywnej

$$E_2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \text{ gdzie } I \text{ to moment bezwładności pręta.}$$

Z zasady zachowania energii możemy zapisać

$$E_1 = E_2 \Rightarrow mg \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow mgh = I \omega^2$$

Moment bezwładności pręta względem osi obrotu przechodzącej przez jego koniec wynosi

$$I = \frac{1}{3} m l^2 \text{ gdzie } m - \text{masa pręta, } l - \text{długość pręta.}$$

Długość słupa wynosi h a więc jego moment bezwładności względem osi obrotu wynosi

$$I = \frac{1}{3} m h^2 \text{ z kolei } \omega = \frac{V}{h} \text{ co daje}$$

$$mgh = \frac{1}{3} m h^2 \left(\frac{V}{h} \right)^2 \Rightarrow V = \sqrt{3gh}$$

Prędkość górnego końca słupa w chwili uderzenia o Ziemię wynosi $V = \sqrt{3gh}$.

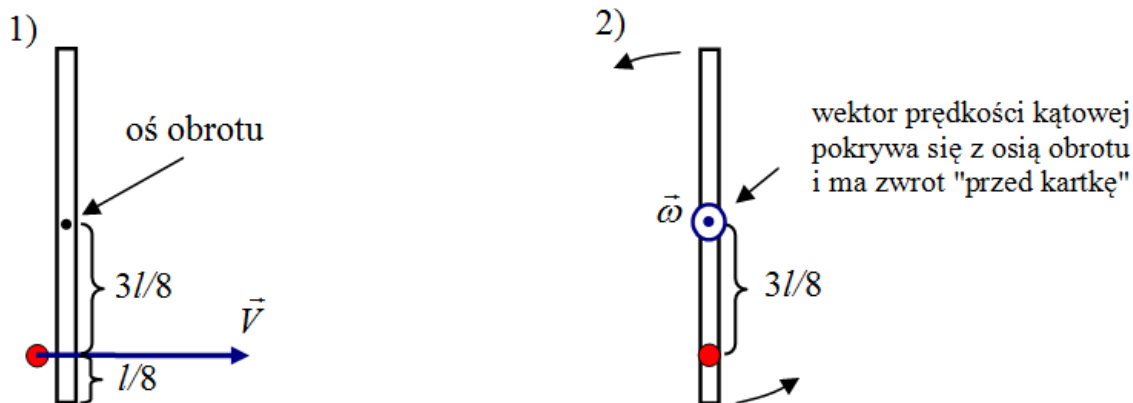
zad. 2

Listwa drewniana o długości l i masie M może obracać się dookoła osi prostopadłej do niej, przechodzącej przez jej środek. W odległości $l/8$ od końca listwy trafia pocisk o masie m lecący z prędkością V w kierunku prostopadłym do listwy i osi obrotu. Znajdź prędkość kątową, z jaką listwa zacznie się obracać, gdy utkwi w niej pocisk. Oblicz ilość ciepła wydzielonego podczas zderzenia.

Dane: l, M, m, V

Szukane: ω, Q

Zadanie podzielimy na dwa etapy 1) tuż przed uderzeniem pocisku i 2) po uderzeniu pocisku (wbiciu się w listwę). Zróbmy rysunki (rzut z góry)



Zakładając, że w trakcie ruchu nie występują opory powietrza i opory na osi, zadanie najprościej można obliczyć stosując zasadę zachowania energii oraz zasadę zachowania momentu pędu (jest to ruch obrotowy bryły sztywnej). Ze względu na to, że listwa jest ułożona poziomo i pocisk porusza się poziomo nie będzie zmian energii potencjalnej a więc możemy ją pominąć w rozważaniach. Zapiszmy energię i moment pędu w pierwszej i drugiej sytuacji.

$$E_1 = \frac{1}{2} m V^2 \quad E_2 = \frac{1}{2} I_U \omega^2 + Q$$

$$L_1 = \frac{3}{8} l m V \quad L_2 = I_U \omega$$

gdzie I_U - moment bezwładności układu (listwa + pocisk), Q - ciepło

1) W pierwszej sytuacji porusza się jedynie pocisk a więc mamy jedynie jego energię kinetyczną. Trudniejsza sprawa jest z momentem pędu. Łatwo byłoby wyznaczyć pęd, który jest równy $p = mV$, ale w zadaniu będziemy mieli do czynienia z ruchem obrotowym układu a więc musimy posłużyć się wielkością związaną z ruchem obrotowym. Tu pojawia się pytanie... jak pocisk nie poruszający się ruchem obrotowym może mieć moment pędu? Pocisk lecąc swobodnie nie ma oczywiście momentu pędu tylko pęd, ale trafiając na listwę będzie go posiadał. Spróbujmy wyliczyć jego wartość. Wektor momentu pędu możemy zapisać dwojako

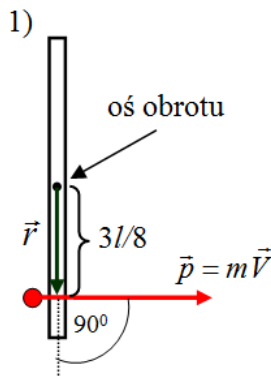
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \text{oraz} \quad \vec{L} = I \vec{\omega} \quad \text{gdzie } \vec{r} \text{ jest wektorem ramienia.}$$

W pierwszej kolejności spróbujmy dojść do wzoru na L_1 korzystając z pierwszej zależności. Mamy tutaj iloczyn wektorowy wektora ramienia i wektora pędu (patrz iloczyn wektorowy). Wartość momentu pędu możemy zapisać posługując się wiadomościami o iloczynie wektorowym.

$L = r \cdot p \sin \alpha$ gdzie kąt α jest kątem pomiędzy wektorami ramienia i pędu (patrz poniższy rysunek.

W tym przypadku $\alpha = 90^\circ$ a wartość (długość) wektora ramienia jest równa $3l/8$ tym samym wartość wektora momentu będzie równa

$$L_1 = r p = \frac{3}{8} l m V$$



Do tego samego wniosku powinniśmy dojść z drugiego wzoru $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

Wielkość I to moment bezwładności pocisku względem osi obrotu. Zakładając, że rozmiary pocisku są niewielkie i możemy go potraktować jako punkt materialny z definicji momentu bezwładności dla punktu materialnego możemy zapisać $I = mr^2$ natomiast $\omega = \frac{V}{r}$. Podstawiając nasze wielkości

do wzoru na wartość momentu bezwładności

$$L_1 = I\omega = mr^2 \frac{V}{r} = rmV = \frac{3}{8}lmV \text{ otrzymaliśmy ponownie ten sam wzór na } L_1.$$

Dociekliwi mogliby się zapytać... dlaczego we wzorze na E_1 użyłem wzoru dla ruchu postępowego a nie obrotowego? Odpowiedź brzmi... bo tak było szybciej i łatwiej. Postaram się jednak udowodnić niedowiarkom, że możemy również w przypadku energii rozpatrywać ten ruch jako hipotetyczny ruch obrotowy wokół osi umieszczonej w środku listwy. Dla ruchu obrotowego energię kinetyczną zapiszemy w postaci $E_1 = \frac{1}{2}I\omega^2$. Jak wcześniej zapisałem wartość momentu

bezwładności pocisku względem osi obrotu oddalonej o r wynosi $I = mr^2$, natomiast wartość prędkości kątowej $\omega = \frac{V}{r}$ stąd

$$E_1 = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mr^2 \frac{V^2}{r^2} = \frac{1}{2}mV^2.$$

2) Sytuacja druga jest znacznie prostsza. W wyniku zderzenia pocisku z listwą cały układ zaczyna obracać się. E_2 jest równa sumie energii kinetycznej ruchu obrotowego układu (listwa + pocisk) oraz ciepłu wydzielonemu podczas zderzenia. Moment pędu L_2 to moment pędu układu.

Na pocisk i listwę nie działają niezrównoważone momenty sił zewnętrznych a więc możemy skorzystać z zasady zachowania momentu pędu $\vec{L}_1 = \vec{L}_2$ (patrz wykłady). Zwroty i kierunki obu wektorów są takie same a więc $L_1 = L_2$ co daje

$$\frac{3}{8}lmV = I_U\omega \Rightarrow \omega = \frac{3lmV}{8I_U}.$$

Moment bezwładności układu I_U jest równy sumie momentów bezwładności listwy I_L oraz pocisku I_P . Moment bezwładności listwy względem osi przechodzącej przez jej środek jest równy

$$I_L = \frac{1}{12}Ml^2, \text{ natomiast } I_P = mr^2 = m\left(\frac{3l}{8}\right)^2 \text{ tym samym}$$

$$I_U = I_L + I_P = \frac{1}{12}Ml^2 + m\left(\frac{3l}{8}\right)^2.$$

Znając wartość prędkości kątowej układu po zderzeniu ω bez problemu możemy wyznaczyć ciepło wydzielone podczas zderzenia korzystając z zasady zachowania energii

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}I_U\omega^2 + Q \Rightarrow Q = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}I_U\omega^2$$

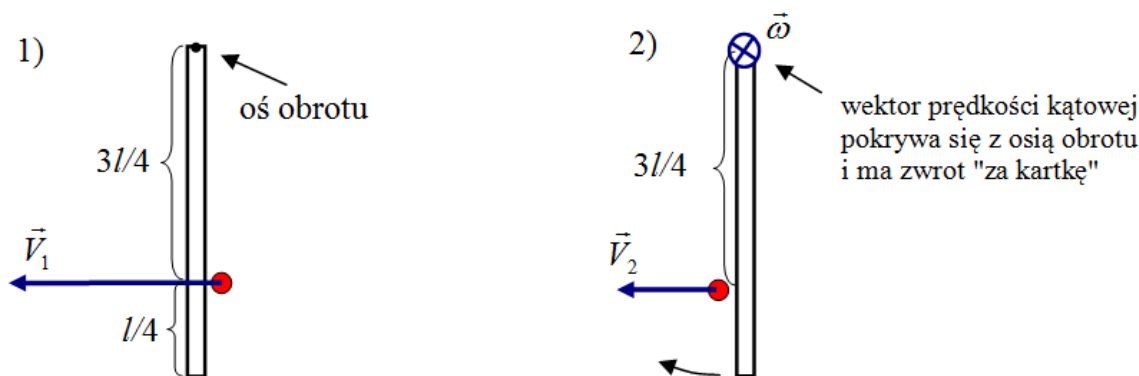
zad. 3

Listwa drewniana o długości l i masie M może obracać się dookoła osi prostopadłej do niej, przechodzącej przez jej koniec. W listwę trafia pocisk o masie m lecący z prędkością V_1 w kierunku prostopadłym do listwy i osi obrotu. Znajdź prędkość kątową z jaką listwa zacznie się obracać, jeżeli pocisk zrobił otwór w listwie w odległości $l/4$ od jej swobodnego końca a następnie kontynuował lot w pierwotnym kierunku z prędkością V_2 . Wyznacz ciepło wydzielone podczas zderzenia. Ubytek masy listwy należy zaniedbać.

Dane: l, M, m, V_1, V_2

Szukane: ω, Q

Zadanie jest podobne do zadania nr 2. Podzielimy je na dwa etapy 1) tuż przed uderzeniem pocisku i 2) po przebicciu listwy pociskiem. Zróbmy rysunki (rzut z góry)



Na rysunku celowo zmieniłem zwrot wektora prędkości liniowej (w stosunku do rysunku w zadaniu 2), aby było widać, że zwrot wektora prędkości kątowej również się zmieni.

Zakładając, że w trakcie ruchu nie występują opory powietrza i opory na osi, zadanie najprościej można obliczyć stosując zasadę zachowania energii oraz zasadę zachowania momentu pędu (jest to ruch obrotowy bryły sztywnej). Ze względu na to, że listwa jest ułożona poziomo i pocisk porusza się poziomo nie będzie zmian energii potencjalnej a więc możemy ją pominąć w rozważaniach.

Zapiszmy energię i moment pędu w pierwszej i drugiej sytuacji.

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}mV_1^2 & E_2 &= \frac{1}{2}I_L\omega^2 + \frac{1}{2}mV_2^2 + Q \\ L_1 &= \frac{3}{4}lmV_1 & L_2 &= I_L\omega + \frac{3}{4}lmV_2 \end{aligned}$$

gdzie - $I_L = \frac{1}{3}Ml^2$ - moment bezwładności listwy względem osi przechodzącej przez koniec listwy.

1) W pierwszej sytuacji porusza się jedynie pocisk a więc mamy jedynie jego energię kinetyczną. Moment pędu pocisku względem osi obrotu wyznaczymy analogicznie do zadania 2. Moment pędu

to ramię razy pęd. Wartość (długość) ramienia wynosi $3l/4$ natomiast wartość pędu równa się mV_1 stąd powyższy zapis.

2) W sytuacji drugiej pocisk przebił listwę i porusza się nadal ze zmniejszoną prędkością V_2 natomiast listwa zaczęła obracać się z prędkością ω . Energia druga będzie więc równa sumie energii kinetycznych listwy, pocisku oraz ciepła wydzielonemu w trakcie przebijania listwy.

Całkowity moment pędu w sytuacji drugiej będzie równy sumie momentu pędu listwy oraz momentowi pędu pocisku względem osi obrotu.

Na pocisk i listwę nie działają niezrównoważone momenty sił zewnętrznych a więc możemy skorzystać z zasady zachowania momentu pędu $\vec{L}_1 = \vec{L}_2$. Zwroty i kierunki obu wektorów są takie same a więc $L_1 = L_2$ co daje

$$\frac{3}{4}lmV_1 = I_L\omega + \frac{3}{4}lmV_2 \Rightarrow \omega = \frac{3lm(V_1 - V_2)}{4I_L}.$$

Znając wartość prędkości kątowej listwy po zderzeniu ω bez problemu możemy wyznaczyć ciepło wydzielone podczas zderzenia korzystając z zasady zachowania energii

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mV_1^2 = \frac{1}{2}I_L\omega^2 + \frac{1}{2}mV_2^2 + Q \Rightarrow Q = \frac{1}{2}mV_1^2 - \frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}I_L\omega^2.$$

Zadania do samodzielnego wyliczenia

S1. Dziecko o masie m stoi na zewnątrz kołowej karuzeli o momencie bezwładności I i promieniu R obracającej się z prędkością kątową ω_1 . Dziecko wchodzi na brzeg karuzeli.

a) Z jaką prędkością kątową będzie obracała się karuzela z dzieckiem?

b) O ile zmieni się energia kinetyczna układu, gdy dziecko przejdzie od brzegu do środka karuzeli?

Dziecko należy potraktować jako punkt materialny.

Odp.

$$\text{a) } \omega_2 = \frac{I\omega_1}{I + mR^2}, \quad \text{b) } \Delta E = \frac{1}{2}(I\omega_1^2 - \frac{(I\omega_1)^2}{I + mR^2})$$

S2. Na końcach poziomo wirującego pręta o masie M , przez środek którego przechodzi oś prostopadła do powierzchni Ziemi, siedzą dwie małpki (każda o masie m). Pręt ma długość l i wiruje z prędkością kątową ω_1 . Jaka będzie prędkość kątowa układu po przejściu małpek do środka pręta. Małpki potraktuj jako punkty materialne. Wykonaj rysunek.

$$\omega_2 = \frac{\frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{2}ml^2}{\frac{1}{12}Ml^2} \omega_1$$

zad. 1

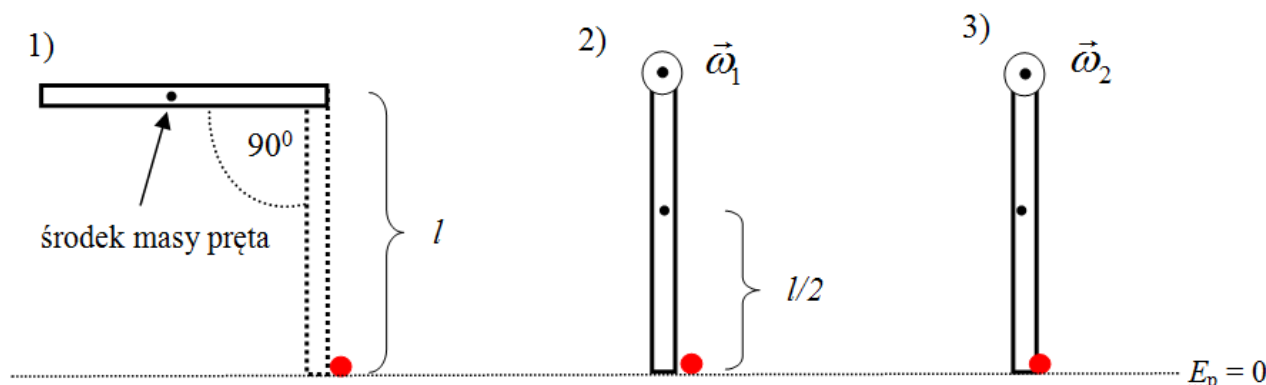
Pręt o długości l i masie m_1 , mogący obracać się wokół osi przechodzącej przez jego koniec został wychylony o 90° ze swojego najniższego położenia a następnie puszczone. W najniższym położeniu pręt zderzył się całkowicie niesprężysto z niewielką kulką o masie m_2 znajdującą się w odległości l od punktu zawieszenia pręta. Oblicz prędkość kątową układu (pręt + kulka) tuż po zderzeniu oraz ilość ciepła wydzielonego podczas zderzenia? Dane jest przyspieszenie ziemskie - g .

Rozwiązanie

Dane: l, m_1, m_2, g

Szukane: ω_2, Q

Zadanie podzielimy na trzy etapy 1) pręt wychylony o 90° z położenia równowagi 2) pręt tuż przed zderzeniem z kulką, 3) pręt tuż po zderzeniu z kulką (układ pręt + kulka)



Wektory prędkości kątowych ω są prostopadłe do kartki, ze zwrotem przed kartkę. Pozioma linia kropkowana pokazuje poziom odniesienia dla którego przyjmujemy, że energia potencjalna równa się 0.

Podobnie jak w poprzednich zadaniach skorzystamy z zasady zachowania energii oraz zasady zachowania momentu pędu (pręt jest bryłą sztywną obracającą się wokół osi przechodzącej przez jego koniec).

$$\begin{array}{lll} E_1 = m_1 g l & E_2 = m_1 g \frac{l}{2} + \frac{1}{2} I_p \omega_1^2 & E_3 = m_1 g \frac{l}{2} + \frac{1}{2} (I_p + I_k) \omega_2^2 + Q \\ L_1 = 0 & L_2 = I_p \omega_1 & L_3 = (I_p + I_k) \omega_2 \end{array}$$

1) W pierwszej sytuacji nie ma ruchu a więc słup posiada tylko energię potencjalną (kulka nie porusza się i nie ma energii potencjalnej). Środek masy pręta znajduje się na wysokości l od linii odniesienia a więc posiada energię potencjalną równą

$$E_1 = m_1 g l,$$

brak ruchu obrotowego znaczy, że $L_1 = 0$.

2) W drugiej sytuacji środek masy pręta znajduje się na wysokości $l/2$ od linii odniesienia a pręt wykonuje ruch obrotowy względem osi obrotu z prędkością kątową ω_1 a więc posiada energię potencjalną i energię kinetyczną ruchu obrotowego (kulka nie porusza się i nie ma energii potencjalnej). Pręt posiada również moment pędu

$$E_2 = \frac{1}{2} I_p \omega_1^2 \quad L_2 = I_p \omega_1 \quad \text{gdzie} \quad I_p = \frac{1}{3} m_1 l^2$$

I_p - moment bezwładności pręta

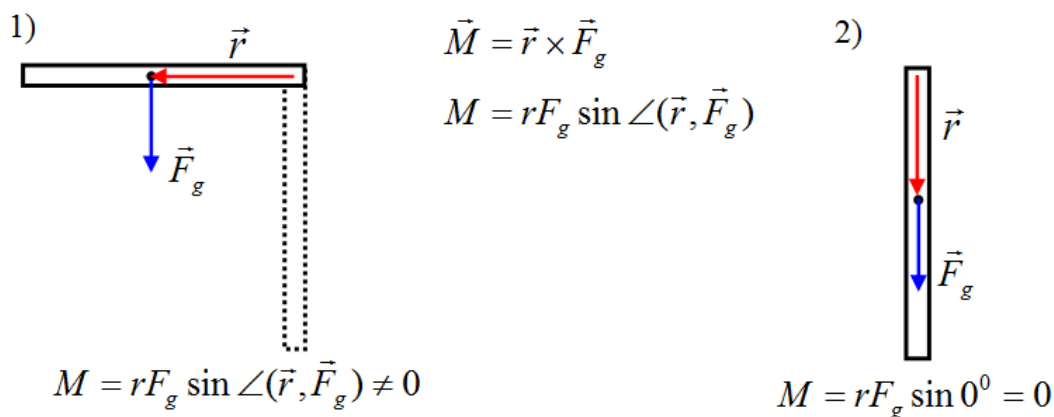
3) W trzeciej sytuacji pręt zderzył się całkowicie niesprężysto z kulką a więc utworzyły wspólny układ. Tuż po zderzeniu układ jeszcze się nie wychylił a więc nie zmieniła się jego energia potencjalna natomiast po połączeniu z kulką prędkość kątowa pręta zmalała i wydzielilo się ciepło (wynik zderzenia). Układ uzyskał prędkość kątową ω_2 a tym samym moment pędu L_3 .

$$E_3 = m_1 g \frac{l}{2} + \frac{1}{2} (I_p + I_k) \omega_2^2 + Q \quad L_3 = (I_p + I_k) \omega_2 \quad \text{gdzie} \quad I_k = m_2 l^2$$

I_k - moment bezwładności kulki względem osi obrotu oddalonej o l od kulki

Możemy zapisać $E_1 = E_2 = E_3$ oraz $L_1 \neq L_2 = L_3$

Dlaczego nie ma znaku równości pomiędzy momentami pędu L_1 i L_2 ? Dlatego, że pomiędzy sytuacją 1) oraz 2) na pręt działał zewnętrzny moment siły związany z siłą grawitacji. Popatrzmy na poniższy rysunek.



Zarówno w sytuacji gdy pręt opada jak i gdy pręt wisi w najniższym położeniu występuje siła grawitacji. Możemy wyznaczyć również wektor ramienia, który łączy oś obrotu ze środkiem masy pręta. Jednak przy maksymalnym wychyleniu pręta jak i w trakcie jego opadania kąt zawarty pomiędzy wektorami ramienia i siły grawitacji jest niezerowy a więc występuje niezerowy zewnętrzny moment siły. Gdy pręt wisi w najniższym położeniu (sytuacje 2 i 3) wyżej wspomniany kąt jest równy 0 a więc zewnętrzny moment siły jest równy 0. Zasada zachowania pędu pomiędzy sytuacjami 2 i 3 jest więc spełniona.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow m_1 gl = m_1 g \frac{l}{2} + \frac{1}{2} I_p \omega_1^2 \Rightarrow m_1 g \frac{l}{2} = \frac{1}{2} I_p \omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{m_1 gl}{I_p}}$$

$$L_2 = L_3 \Rightarrow I_p \omega_1 = (I_p + I_k) \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{I_p \omega_1}{I_p + I_k}$$

$$\omega_2 = \frac{I_p \omega_1}{I_p + I_k} \sqrt{\frac{m_1 gl}{I_p}} \quad \text{gdzie} \quad I_p = \frac{1}{3} m_1 l^2 \quad I_k = m_2 l^2$$

Chcąc obliczyć ciepło porównamy energie E_1 i E_3

$$m_1 gl = m_1 g \frac{l}{2} + \frac{1}{2} (I_p + I_k) \omega_2^2 + Q \Rightarrow Q = m_1 g \frac{l}{2} - \frac{1}{2} (I_p + I_k) \omega_2^2$$

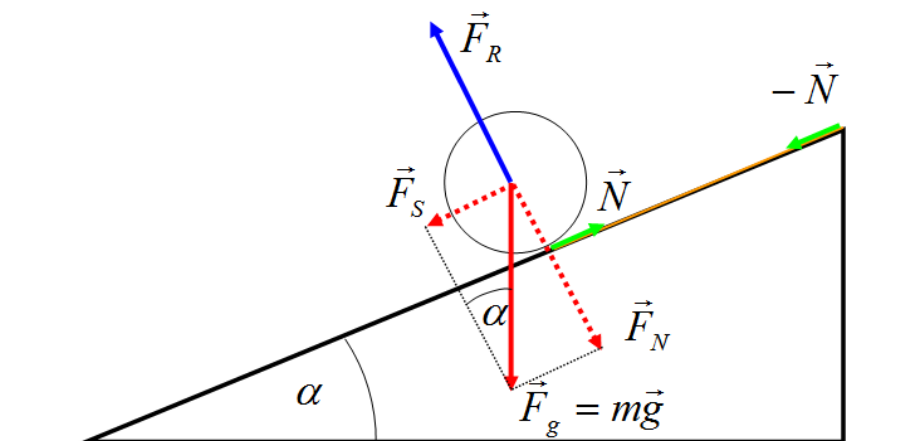
Zad. 2

Na koło o masie m , momencie bezwładności I i promieniu r nawinięto cienką nić, którą następnie umocowano do końca równi pochyłej o kącie nachylenia α . Gdy koło położono na równi i puszczono, zaczęło się swobodnie staczać odwijając nić. Oblicz przyspieszenie liniowe koła oraz siłę naciągu nici. Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

Dane: m, I, r, α, g

Szukane: a, N

Ruch obrotowy na równi komplikuje zadanie w stosunku do sytuacji gdy ciało zsuwa się po równi. Zaczniemy od rysunku



F_g - siła grawitacji $\vec{F}_g = \vec{F}_N + \vec{F}_S$

F_N - siła nacisku (składowa normalna siły grawitacji)

F_S - siła "zsuwająca" (składowa styczna siły grawitacji)

N - siła naciągu nici

F_R - siła reakcji (sprężystości) podłoża

Siła wypadkowa F_W działająca na koło jest równa sumie wszystkich sił działających na nie

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \vec{F}_R + \vec{F}_g + \vec{N}$$

Korzystając z równań $\vec{F}_g = \vec{F}_N + \vec{F}_S$ oraz $\vec{F}_N + \vec{F}_R = 0$

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \vec{F}_S + \vec{N}$$

Przechodząc na zapis skalarny musimy uwzględnić kierunki i zwroty wektorów. Kierunki wektorów F_S i N są takie same natomiast zwroty są przeciwne a więc uwzględnimy to dopisując znak 'minus' przed wartością wektora siły naciągu

$$F_{\text{wyp}} = F_S - N.$$

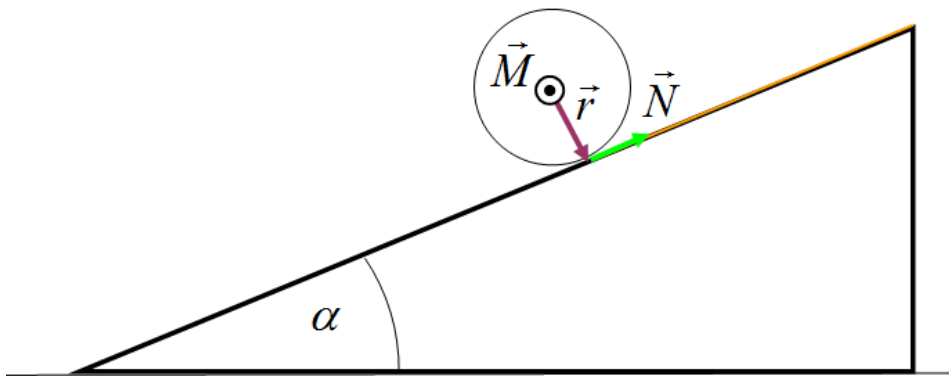
Korzystając z II zasady dynamiki Newtona można zapisać

$$ma = F_S - N \quad \text{gdzie } a \text{ jest przyspieszeniem liniowym koła}$$

Korzystając z zależności trygonometrycznej możemy zapisać $F_S = F_g \sin \alpha = mg \sin \alpha$ co daje

$$ma = mg \sin \alpha - N. \quad (x)$$

Obliczmy teraz siłę naciągu nici N . Zakładamy, że gdyby nie nić to koło poruszałoby się z poślizgiem, ale nić sprawia, że koło musi się staczać (nie uwzględniamy tarcia). Żeby koło obracało się musi działać na nie niezrównoważony moment siły. Jak go wyznaczyć? Przyjrzyjmy się poniższemu rysunkowi



Na rysunku zaznaczono wektory ramienia r , siły naciągu N oraz momentu siły M (wektor ten pokrywa się z osią obrotu i jest skierowany przed kartkę).

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{N}$$

$$M = rN \sin \angle(\vec{r}, \vec{N}) = rN \sin 90^\circ = rN$$

Korzystając z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego możemy napisać

$$M = I\varepsilon \text{ gdzie } \varepsilon \text{ jest przyspieszeniem kątowym koła.}$$

Porównując obie zależności na M otrzymamy

$$rN = I\varepsilon \Rightarrow N = \frac{I\varepsilon}{r}.$$

Korzystając z relacji pomiędzy przyspieszeniem liniowym i przyspieszeniem kątowym $a = \varepsilon r$ możemy zapisać

$$N = \frac{Ia}{r^2} \quad (\text{xx})$$

Podstawmy otrzymany wynik do równania uzyskanego wcześniej (x)

$$ma = mg \sin \alpha - N = mg \sin \alpha - \frac{Ia}{r^2}$$

Po przekształceniach otrzymamy ostatecznie wyrażenie na przyspieszenie liniowe

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}}$$

Siłę naciągu nici uzyskamy poprzez podstawienie uzyskanego wzoru na a do równania (xx)

$$N = \frac{I}{r^2} \left(\frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}} \right) = \frac{Img \sin \alpha}{mr^2 + I}$$

Zad. 3

Korzystając z rozwiązania zadania 2 wyznacz przyspieszenie:

- a) walca staczającego się na równi pochyłej (moment bezwładności walca $I_w = \frac{1}{2}mr^2$)
b) cienkościennej obręczy (moment bezwładności obręczy $I_o = mr^2$)

Rozwiązanie

$$\text{a) } a = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}} = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{mr^2}{2r^2}} = \frac{2}{3}g \sin \alpha$$

$$\text{b) } a = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}} = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{mr^2}{r^2}} = \frac{1}{2}g \sin \alpha$$

Rozwiązanie jest trywialne jeżeli wcześniej wyznaczylismy a , ale celowo dodałem to proste zadanie. Chciałem uzmysłowić Państwu, że w zależności od przestrzennego rozkładu masy (momentu bezwładności ciała) bryły będą staczały się z równi z różnym przyspieszeniem.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

zad. S_1

W swobodny koniec zawieszonego u sufitu jednorodnego pręta o masie M i długości l uderza idealnie niesprężyste kulka o masie m lecąca prostopadłe do pręta. Z jaką prędkością poruszała się kulka jeżeli po zderzeniu pręt (z wbity kulka) wychylił się o 90° . Jaka ilość ciepła wydzielila się w trakcie zderzenia? Kulke należy potraktować jako punkt materialny. Wykonaj stosowny rysunek. Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

$$\text{Odp. } V = \frac{\sqrt{(Mgl + 2mgl)(\frac{1}{3}Ml^2 + ml^2)}}{ml}, \quad Q = \frac{mV^2}{2} - \frac{(mVl)^2}{2(\frac{1}{3}Ml^2 + ml^2)}$$

zad. S_2

Walec o promieniu r stacza się po równi pochyłej o kącie nachylenia α wzdłuż drogi s . Oblicz prędkość kątową walca na dole równi oraz przyspieszenie liniowe walca. Dane jest przyspieszenie ziemskie g . Moment bezwładności walca wynosi $I_w = \frac{1}{2}mr^2$.

Odp.

$$V = \sqrt{\frac{4gs \sin \alpha}{3}} \quad a = \frac{2}{3}g \sin \alpha$$

Podpowiedź

Najłatwiej wyliczyć zadanie korzystając z zasady zachowania energii.

zad. 1

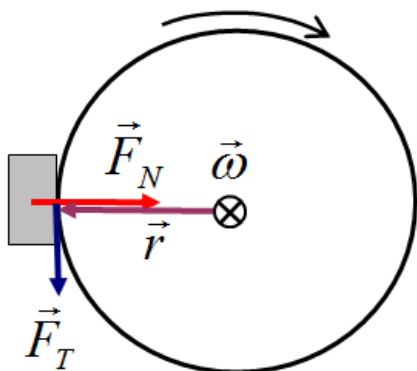
Koło o momencie bezwładności I i promieniu r obraca się wokół swojej osi symetrii. Jaką siłą należy przycisnąć klocek hamulcowy do obwodu koła, aby zatrzymać je po upływie czasu t jeżeli energia kinetyczna koła w chwili początkowej wynosi E_k ? Wyznacz ciepło wydzielone podczas

tego ruchu oraz drogę kątową jaką pokonało koło do chwili zatrzymania. Współczynnik tarcia kinetycznego między kołem i klockiem wynosi μ .

Dane: I, r, t, E_k, μ

Szukane: F_N, Q, α

Na początek wykonajmy stosowny rysunek



$\vec{F}_N$ - poszukiwana siła nacisku klocka na koło

$\vec{F}_T$ - siła tarcia

$\vec{r}$ - wektor ramienia (co do wartości równy promieniowi koła)

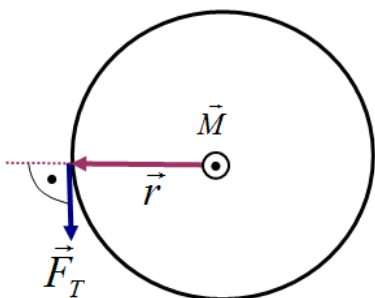
$\vec{\omega}$ - wektor prędkości kątowej. Obrót koła jest zgodny z ruchem wskazówek zegara a więc wektor prędkości kątowej ma kierunek pokrywający się z osią obrotu a zwrot skierowany za kartkę (oznaczenie - kółko z krzyżykiem)

Na rysunku koło obraca się zgodnie z ruchem wskazówek zegara a do jego obwodu dociśnięto klocek siłą o wartości F_N . Zważywszy na to, że współczynnik tarcia kinetycznego wynosi μ a wartość siły nacisku F_N , pojawi się siła tarcia o wartości F_T skierowana stycznie do obwodu koła

$$F_T = \mu F_N. \quad (1)$$

Punkt przyłożenia siły tarcia znajduje się w odległości r od osi obrotu a więc pojawi się moment siły wyhamowującej ruch obrotowy koła równy

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_T. \quad (2)$$



Kierunek wektora momentu siły $\vec{M}$ jest taki sam jak kierunek wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$ (oba wektory pokrywają się z osią obrotu) natomiast zwrot wektora momentu siły jest przeciwny do zwrotu wektora prędkości kątowej (jest skierowany przed kartkę - oznaczenie - kółko z kropką)). Mamy więc do czynienia z ruchem obrotowym jednostajnie opóźnionym.

Przechodząc na zapis skalarny możemy zapisać, że wartość momentu siły działającego na koło będzie równy

$$M = r F_T \sin \angle(\vec{r}, \vec{F}_T) = r F_T \sin 90^\circ = r F_T \quad (3)$$

Niezerównoważony moment siły będzie powodował, że koło będzie poruszało się ruchem obrotowym jednostajnie opóźnionym.

Moment siły możemy zapisać również innym wzorem korzystając z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego

$$M = I\varepsilon \quad \text{gdzie } \varepsilon \text{ oznacza opóźnienie kątowe koła.} \quad (4)$$

Porównując równania (3) i (4) uzyskamy

$$F_T = \frac{I\varepsilon}{r}. \quad (5)$$

Jeżeli skorzystamy z równań (1) i (5) otrzymamy wzór na siłę nacisku w postaci

$$F_N = \frac{I\varepsilon}{\mu r}. \quad (6)$$

Nie znamy jednak opóźnienia ε dlatego postaramy się je obliczyć. W ruchu obrotowym jednostajnie opóźnionym możemy zapisać następującą zależność na prędkość kątową po czasie t

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t \quad \text{gdzie } \omega_0 \text{ oznacza początkową prędkość kątową.} \quad (7)$$

Z treści zadania wiemy, że koło zatrzymuje się po czasie t a więc $\omega = 0$, czyli w naszym przypadku równanie (7) przybiera następująca postać

$$0 = \omega_0 - \varepsilon t \Rightarrow \varepsilon = \frac{\omega_0}{t} \quad (8)$$

Podstawiając uzyskany wynik do równania (6) otrzymamy

$$F_N = \frac{I\omega_0}{\mu r t}. \quad (9)$$

Pozostaje więc wyliczyć początkową prędkość kątową koła. Możemy to zrobić na podstawie znajomości jego energii kinetycznej

$$E_K = \frac{1}{2} I \omega_0^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2E_K}{I}} \quad (10)$$

Korzystając z równań (9) i (10) uzyskamy ostatecznie wzór na siłę nacisku

$$F_N = \frac{I \sqrt{\frac{2E_K}{I}}}{\mu r t} = \frac{\sqrt{2E_K I}}{\mu r t}$$

Ciepło wydzielone podczas wyhamowywania koła możemy obliczyć porównując energię początkową i końcową. W chwili początkowej koło miało energię kinetyczną ruchu obrotowego a w chwili końcowej koło nie poruszało się a więc jedyną energią w układzie było ciepło wydzielone podczas tarcia klocka o koło

$$E_1 = E_K \quad E_2 = Q. \quad (11)$$

Ciepło możemy wyliczyć korzystając z zasady zachowania energii

$$E_1 = E_2 \Rightarrow Q = E_K. \quad (12)$$

Drogę kątową możemy wyliczyć korzystając ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie opóźnionym

$$\alpha = \omega_0 t - \frac{1}{2} \varepsilon t^2. \quad (13)$$

Podstawiając do wzoru (13) zależność na opóźnienie kątowe (8) otrzymamy

$$\alpha = \omega_0 t - \frac{1}{2} \varepsilon t^2 = \omega_0 t - \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{t} t^2 = \frac{1}{2} \omega_0 t \quad \text{gdzie} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2E_K}{I}}. \quad (14)$$

Odp.

Siła nacisku wynosi $F_N = \frac{\sqrt{2E_K I}}{\mu r t}$, ciepło $Q = E_K$ a droga kątowa $\alpha = \frac{1}{2} \omega_0 t = \frac{1}{2} t \sqrt{\frac{2E_K}{I}}$.

zad. 2

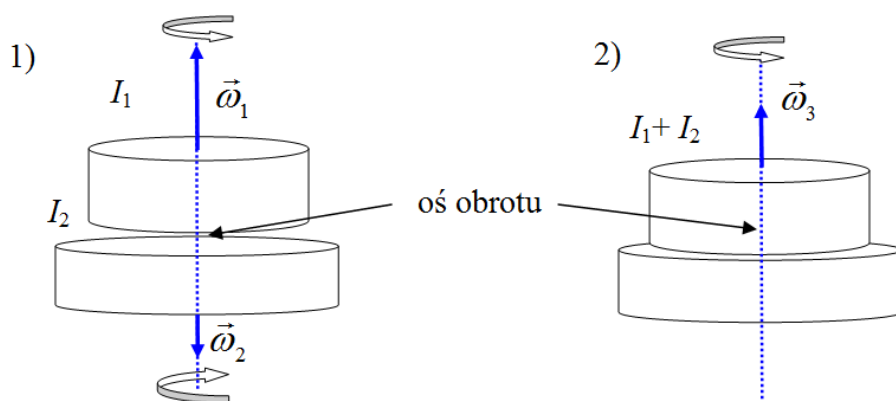
Dwie poziome tarcze wirują w przeciwnych kierunkach wokół pionowej osi przechodzącej przez ich środki. Momenty bezwładności tarcz wynoszą I_1 oraz I_2 a ich prędkości kątowe odpowiednio ω_1 i ω_2 . Po dosunięciu górnej tarczy do dolnej, obie tarcze (w wyniku zjawiska tarcia) obracają się dalej jak jedno ciało. Wyznacz:

- prędkość kątową tarcz po złączeniu,
- pracę wykonaną przez momenty sił tarcia.

Dane: $I_1, I_2, \omega_1, \omega_2$

Szukane: ω_3, W_T

Podzielmy zadanie na dwa etapy. W pierwszym (rys. 1) obie tarcze wirują niezależnie wokół tej samej osi obrotu, ich prędkości kątowe mają przeciwne zwroty. W drugim etapie (rys. 2) obserwujemy tarcze po jakimś czasie. Tarcza górna opadła na dolną wyniku czego zaczęły trzeć o siebie. Po pewnym czasie na skutek zjawiska tarcia tarcze poruszają się jak jeden układ (tę sytuację obserwujemy na rysunku 2)).



Zapiszmy energie i momenty pędów obu sytuacjach (mamy tu do czynienia z ruchem obrotowym brył sztywnych)

$$E_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 \qquad E_2 = \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \omega_3^2 + Q \quad (1)$$

$$\vec{L}_1 = I_1 \vec{\omega}_1 + I_2 \vec{\omega}_2 \qquad \vec{L}_2 = (I_1 + I_2) \vec{\omega}_3 \quad (2)$$

1) W pierwszej sytuacji obie tarcze obracają się niezależnie a więc ich energia całkowita jest równa sumie ich energii kinetycznych. Początkowy moment pędu jest równy sumie momentów pędu tarcz. Musimy pamiętać, że moment pędu jest wielkością wektorową a więc w tym przypadku istotny jest kierunek i zwrot wektora prędkości kątowej. Chcąc zapisać wartość początkowego momentu pędu musimy więc uwzględnić zwroty wektorów prędkości kątowych.

$L_1 = I_1 \omega_1 - I_2 \omega_2$ - znak minus wynika z faktu, że zwrot wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}_2$ jest przeciwny do zwrotu wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}_1$.

2) W sytuacji drugiej tarcze są już połączone tworząc wspólny układ o momencie bezwładności $I_3 = I_1 + I_2$ i obracają się z prędkością kątową o wartości ω_3 . Energia całkowita będzie równa energii kinetycznej ruchu obrotowego układu oraz ciepła wydzielonego podczas wyhamowywania tarcz. Moment pędu będzie momentem pędu układu.

Ze względu na to, że w trakcie całej sytuacji nie występują zewnętrzne momenty sił możemy skorzystać z zasady zachowania momentu pędu

$$L_1 = L_2 \Rightarrow I_1 \omega_1 - I_2 \omega_2 = (I_1 + I_2) \omega_3$$

a więc prędkość kątowa układu wyniesie

$$\omega_3 = \frac{I_1 \omega_1 - I_2 \omega_2}{I_1 + I_2} \quad (3)$$

Praca wykonana przez momenty sił tarcia będzie równa ciepłu wydzielonemu podczas wyhamowywania tarcz $W_T = Q$. Korzystając z zasady zachowania energii możemy zapisać

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \omega_3^2 + Q$$

$$\text{stąd } W_T = Q = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 - \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \omega_3^2 \quad \text{gdzie } \omega_3 = \frac{I_1 \omega_1 - I_2 \omega_2}{I_1 + I_2}.$$

Odp.

Prędkość kątowa tarcz po złączeniu wynosi $\omega_3 = \frac{I_1 \omega_1 - I_2 \omega_2}{I_1 + I_2}$ a praca wykonana przez momenty sił

$$\text{tarcia wynosi } W_T = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 - \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \omega_3^2.$$

Wstęp teoretyczny

Ruch drgający

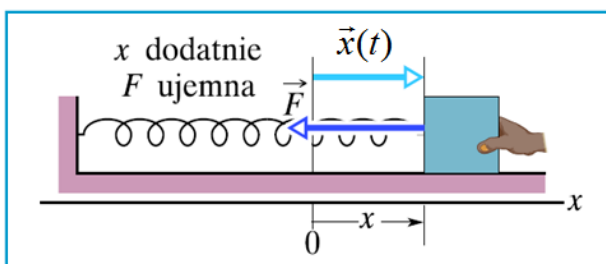
Ruch, w którym położenie ciała $x(t)$ powtarza się, nazywamy drganiem. Jeżeli powtarzalność zachodzi po tym samym czasie T , zwanym okresem, ruch taki nazywamy drganiem okresowym.

$$x(t+T) = x(t)$$

Ruch harmoniczny

Siła harmoniczna (sprężystości) – siła proporcjonalna do wychylenia ciała o zwrocie przeciwnym do wychylenia.

Ruch harmoniczny jest to ruch, jaki wykonuje ciało o masie m , na które działa siła proporcjonalna do przemieszczenia, ale o przeciwnym zwrocie.



Siła harmoniczna (sprężystości)

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

k - stała sprężystości

Równanie ruchu harmonicznego

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

$$ma = -kx$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Powyższe równanie jest równaniem różniczkowym drgań swobodnych którego rozwiązaniem jest następująca funkcja czasu

$$x(t) = x_m \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$$

podstawiając $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

otrzymamy równanie ruchu harmonicznego

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

amplituda drgań

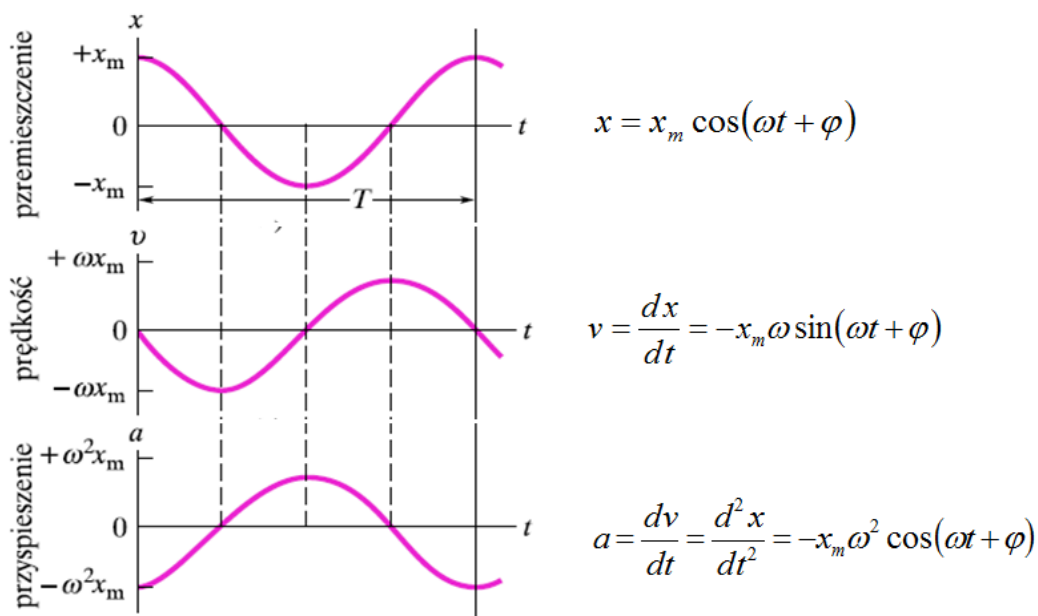
faza początkowa

częstotliwość kołowa
(częstotliwość kołowa drgań własnych)

częstotliwość kołowa drgań $\omega = \frac{2\pi}{T}$ okres drgań $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

Okres drgań harmoniczných T jest niezależny od amplitudy drgań x_m

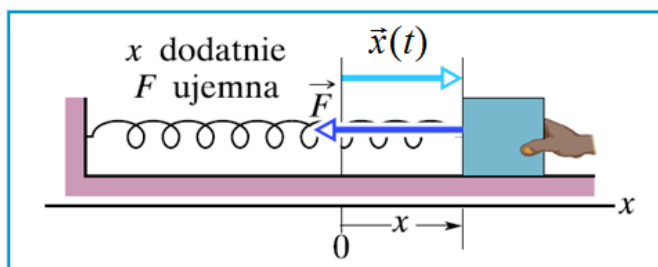
Zależność przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia od czasu



Jak widać z powyższych zależności prędkość jest maksymalna, gdy przemieszczenie (wychylenie) jest równe zero. Przyspieszenie natomiast przybiera wartość maksymalną dla maksymalnego przemieszczenia, ale ma znak minus ze względu na przeciwny zwrot.

Zasada zachowania energii dla oscylatora harmonicznego prostego

Oscylator harmoniczny prosty



$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = -x_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\begin{aligned} E &= E_p + E_k = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{k}{2} x_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{m}{2} x_m^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \\ &= \frac{k}{2} x_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{m}{2} x_m^2 \frac{k}{m} \sin^2(\omega t + \varphi) = \\ &= \frac{kx_m^2}{2} (\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)) = \frac{kx_m^2}{2} = E = \text{const.} \end{aligned}$$

Energia całkowita oscylatora harmonicznego prostego jest stała

zad.1

Płytkę wykonuje drgania harmoniczne w kierunku poziomym o okresie T . Spoczywający na tej płytce drewniany klocek zaczyna poruszać się (ślizgać) po powierzchni płytki z chwilą gdy amplituda drgań przekracza wartość A . Wyznacz współczynnik tarcia statycznego pomiędzy płytką a klockiem. Jaka prędkość maksymalną osiągnie płytka jeżeli okres drgań wynosi T a amplituda A . Dane jest przyspieszenie ziemskie g .

Dane: T, A, g

Szukane: μ_s

Wstęp

Co to jest współczynnik tarcia statycznego?

To współczynnik tarcia z którym mamy do czynienia, gdy ciało nie porusza się. Jest on zwykle o ok. 20% większy od współczynnika tarcia kinetycznego (związanego ze zjawiskiem tarcia w ruchu).

Jak się przekonać, że współczynnik tarcia statycznego jest większy od współczynnika tarcia kinetycznego?

Łatwo sprawdzić to doświadczalnie. Jeżeli staramy się przepchnąć np. ciężką szafę to najtrudniej jest ją ruszyć. Kiedy szafa już się porusza łatwiej nam ją pchać (przypuszczam, że wszyscy znają to z własnego doświadczenia).

Jak zapisać wartość siły tarcia statycznego?

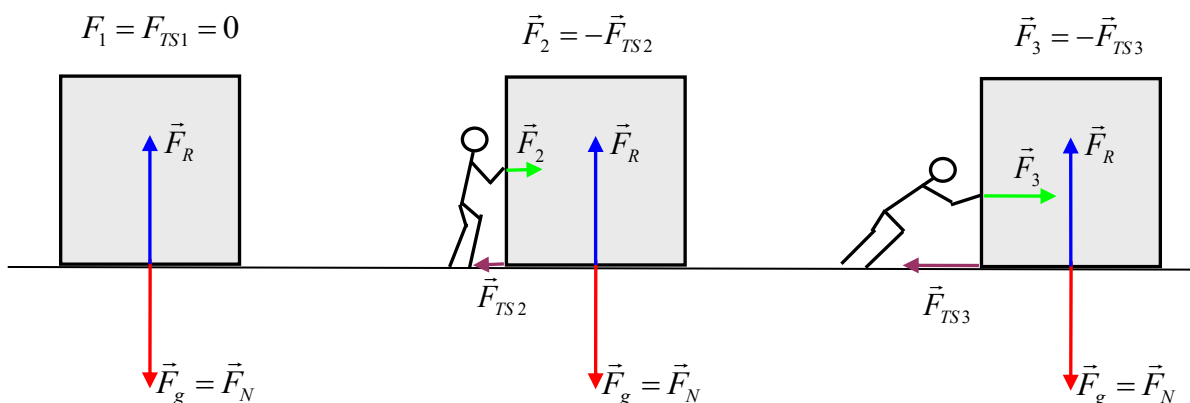
Siłę tę możemy zapisać następującym wzorem $F_{TS} \leq \mu_s F_N$.

Dlaczego w powyższym wzorze nie ma znaku '='?

Bo siła tarcia statycznego przybiera wartości od 0 do $F_{T_{\max}}$ a więc maksymalna siła tarcia wyniesie

$$F_{T_{\max}} = \mu_s F_N.$$

Przeanalizujmy to na poniższych przykładach



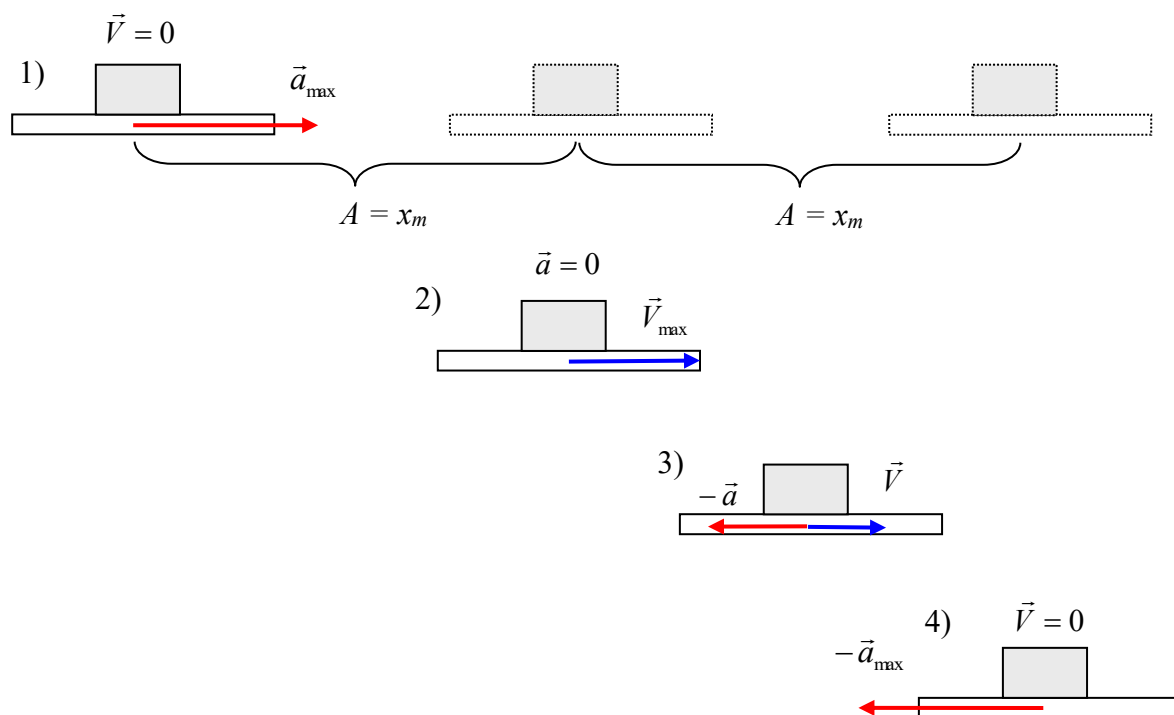
W pierwszej sytuacji siła grawitacji (w tym przypadku siła nacisku) jest równoważona poprzez siłę reakcji (sprężystości) podłoża. Nie ma siły tarcia pomimo, że współczynnik tarcia statycznego jest niezerowy.

W sytuacji drugiej wartość siły tarcia statycznego jest równa wartości siły wytwarzanej przez człowieka.

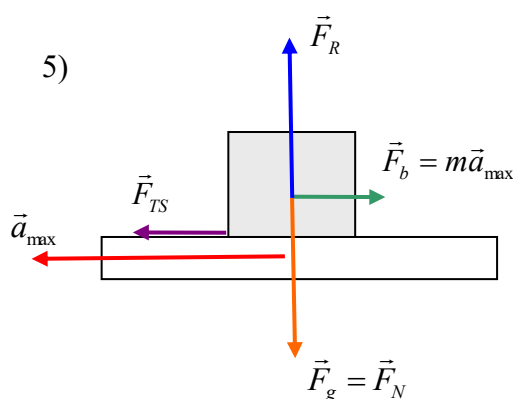
W sytuacji trzeciej wzrosła wartość siły człowieka a więc wzrosła również wartość siły tarcia statycznego. Jeżeli jednak siła człowieka będzie większa od maksymalnej siły tarcia statycznego $F_{T_{\max}}$ to szafa zacznie się poruszać i siła tarcia zmniejszy się bo będziemy mieli wtedy do czynienia z tarciem kinetycznym.

Po tym nieco przydługim wstępie przejdźmy do zadania.

Wyobraźmy sobie płytkę i spoczywający na niej klocek. Płytkę wykonuje poziome drgania o amplitudzie A . Na poniższym rysunku przeanalizujmy wektory przyspieszenia i prędkości płytki w różnych położeniach płytki.



Zastanówmy się w której z powyższych sytuacji jest największa szansa na poślizg klocka. Myślę, że wszyscy intuicyjnie wyczuwamy, że będzie to najbardziej prawdopodobne w skrajnych położeniach płytki. Aby odpowiedzieć na pytanie dlaczego tak będzie narysujmy siły dla czwartej sytuacji.



Na powyższym rysunku mamy następujące siły

- siła grawitacji F_g która jest zarazem siłą nacisku klocka na płytkę F_N
- siła reakcji (sprężystości) podłoża F_R (klocek nie opada pod wpływem siły grawitacji bo płytkę jest wykonana ze sztywnego materiału)
- siła bezwładności F_b . Jeżeli płytkę porusza się w lewą stronę z przyspieszeniem $a_{\max}$ to na klocek zadziała siła bezwładności o przeciwnym zwrocie (sami to odczuwamy, gdy np. autobus gwałtownie ruszy musimy się przytrzymać, aby się nie przewrócić)
- siła tarcia statycznego F_{TS} która powstrzymuje klocek przed poślizgiem (powoduje, że podąża on razem z płytką).

Łatwo się domyślić, że klocek nie wpadnie w poślizg dopóki wartość siły bezwładności będzie mniejsza lub równa wartości maksymalnej siły tarcia statycznego. W skrajnym przypadku

$$\vec{F}_b = -\vec{F}_{TS \max} \quad (1)$$

Skalarnie

$$F_b = F_{TS \max} \Rightarrow ma_{\max} = \mu_s F_N = \mu_s F_g = \mu_s mg \quad (2)$$

$$ma_{\max} = \mu_s mg \Rightarrow a_{\max} = \mu_s g \quad (3)$$

Aby obliczyć $a_{\max}$ skorzystajmy z ogólnego wzoru na przyspieszenie w ruchu harmonicznym (patrz wstęp teoretyczny)

$$a = -x_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi). \quad (4)$$

Znając funkcję cosinus możemy stwierdzić na podstawie powyższego wzoru, że wartość maksymalna przyspieszenia wyniesie

$$a_{\max} = x_m \omega^2 \quad (5)$$

gdzie x_m to amplituda ruchu harmonicznego (w naszym zadaniu $x_m = A$) a $\omega = \frac{2\pi}{T}$ to częstotliwość kołowa drgań.

Korzystając z równań (3) i (5) możemy zapisać

$$A \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \mu_s g \Rightarrow \mu_s = 4\pi^2 \frac{A}{gT^2}.$$

Ile wynosi maksymalna prędkość płytki?

Skorzystajmy z zależności prędkości od czasu w ruchu harmonicznym

$$V = -x_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

podstawiając $x_m = A$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ze znajomości funkcji sinus możemy zapisać

$$V_{\max} = x_m \omega = \frac{2\pi A}{T}.$$

Współczynnik tarcia statycznego wynosi $\mu_s = 4\pi^2 \frac{A}{gT^2}$

a maksymalna prędkość płytki $V_{\max} = \frac{2\pi A}{T}$.

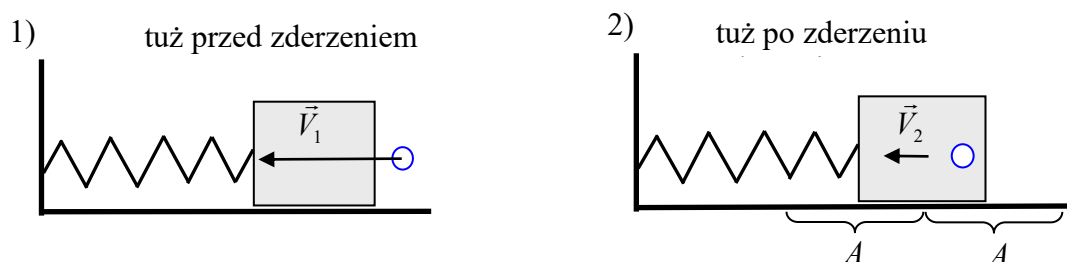
Zad. 2

Na poziomym, gładkim stole leży, przymocowany sprężyną do ściany klocek o masie M . W klocek trafia pocisk o masie m lecący poziomo z prędkością V_1 . Po zderzeniu, pocisk wbija się i klocek wraz z pociskiem wykonuje drgania harmoniczne o amplitudzie A . Wyznacz częstotliwość kołową tych drgań.

Dane: M, m, V_1, A

Szukane: ω

Zacznijmy od rysunku. Podzielimy go na dwa etapy, pierwszy tuż przed uderzeniem pocisku a drugi tuż po zderzeniu. W zadaniu zakładamy, że tarcie pomiędzy klockiem a stołem jest pomijalnie małe.



Zapišmy w obu przypadkach energie i pędy.

$$E_1 = \frac{1}{2} m V_1^2$$

$$p_1 = m V_1$$

$$E_2 = \frac{1}{2} (m + M) V_2^2 + Q$$

$$p_2 = (m + M) V_2$$

Ze względu na to, że nie znamy ciepła nie skorzystamy z zasady zachowania energii. Jeżeli siły tarcia są pomijalnie małe (siły zewnętrzne są równe zero) możemy skorzystać z zasady zachowania pędu

$$p_1 = p_2 \Rightarrow m V_1 = (m + M) V_2$$

stąd możemy obliczyć prędkość układu tuż po zderzeniu

$$V_2 = \frac{m V_1}{m + M} \quad (1)$$

Dalej możemy rozwiązywać zadanie na dwa sposoby.

I sposób

Energia kinetyczna układu po zderzeniu E_{K2} będzie równa energii całkowitej oscylatora E_C (patrz wstęp teoretyczny)

$$E_{K2} = \frac{1}{2} (m + M) V_2^2, \quad E_C = \frac{1}{2} k A^2 \quad \text{gdzie } k \text{ to stała sprężystości}$$

$$E_{K2} = E_C \Rightarrow \frac{1}{2} (m + M) V_2^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow k = \frac{(m + M) V_2^2}{A^2}. \quad (2)$$

Podstawiając do powyższego wzoru równanie (1), otrzymamy zależność na stałą sprężystości

$$k = \frac{(m+M) \left(\frac{mV_1}{m+M} \right)^2}{A^2} = \frac{m^2 V_1^2}{A^2 (m+M)} \quad (3)$$

Skorzystajmy teraz z zależności na częstotliwość kołową w ruchu harmonicznym (patrz wstęp teoretyczny)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

W naszym przypadku to układ o masie $m+M$ będzie wykonywał drgania a więc

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}. \quad (4)$$

Podstawiając równanie (3) do zależności (4) otrzymamy

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}} = \sqrt{\frac{m^2 V_1^2}{A^2 (m+M)^2}} = \frac{mV_1}{A(m+M)}$$

II sposób

Skorzystajmy z zależności na prędkość w ruchu harmonicznym

$$V = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

Jak widać prędkość maksymalna $V_{\max}$ będzie równa $A\omega$

$$V_{\max} = A\omega. \quad (7)$$

Wiemy, że tuż po zderzeniu prędkość układu wynosi V_2 i jest to prędkość maksymalna (większa nie będzie) stąd możemy zapisać

$$V_{\max} = V_2 \Rightarrow A\omega = \frac{mV_1}{m+M} \Rightarrow \omega = \frac{mV_1}{(m+M)A}.$$

Odp.

Częstotliwość kołowa drgań układu wynosi $\omega = \frac{mV_1}{(m+M)A}.$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

zad. S.7.1

Pozioma platforma drga ruchem harmonicznym w kierunku pionowym z amplitudą A . Oblicz najmniejszy dopuszczalny okres drgań platformy, jeżeli przedmioty spoczywające na platformie mają przez cały czas pozostawać z nią w stałym kontakcie. Wykonaj rysunek, zaznacz odpowiednie wektory. Przyspieszenie ziemskie jest dane – g .

$$\text{Odp. } T = 2\pi \sqrt{\frac{A}{g}}$$

zad. S.7.2

Na sprężynie jest zawieszona drgająca szalka wagi z odważnikami. Okres drgań pionowych jest wówczas równy T_1 . Szalkę zatrzymano i położono na niej dodatkowy ciężarek o masie m tak, że

sprężyna wydłużyła się o odcinek x . Jaki będzie okres drgań szalki po tej zmianie? Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

Odp.

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{T_1^2}{4\pi^2} + \frac{x}{g}}$$

zad.1

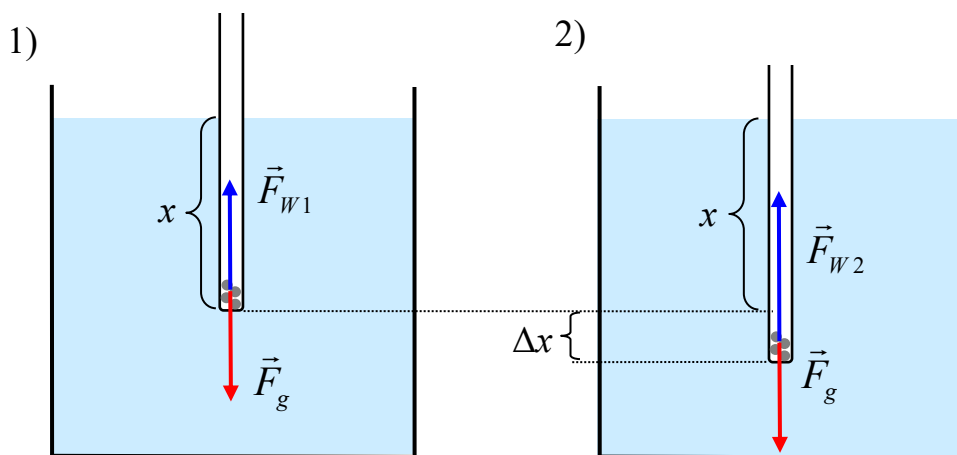
Do próbówki o masie m_1 nasypało odrobinę śrutu o masie m_2 a następnie zanurzono w cieczy tak, że pływała pionowo. Jeżeli próbówkę delikatnie się naciśnie a następnie puści zacznie wykonywać drgania o okresie T . Przyjmując, że drgania nie są tłumione, znajdź gęstość cieczy w której pływa próbówka. Pole przekroju poprzecznego próbówki wynosi s a przyspieszenie ziemskie g .

Dane: m_1, m_2, T, s, g

Szukane: ρ

Rozwiązanie

Wiemy, że próbówka wykonuje nie tłumione drgania w cieczy, ale nie wiemy czy jest to ruch harmoniczny. Jeżeli upewnilibyśmy się, że mamy do czynienia z ruchem harmonicznym to moglibyśmy posłużyć się znanymi już nam wzorami opisującymi ten ruch. Jak się przekonać czy mamy do czynienia z ruchem harmonicznym? Musimy przeanalizować siły działające na próbówkę. Jeżeli wypadkowa siła jest proporcjonalna do wychylenia to jest to siła harmoniczna a ruch jest ruchem harmonicznym. Aby to sprawdzić zaczniemy od rysunków.



$\vec{F}_g$ - siła grawitacji

x - głębokość zanurzenia próbówki w sytuacji 1)

$\vec{F}_{W1}$ - siła wyporu w sytuacji 1)

$x + \Delta x$ - głębokość zanurzenia próbówki w sytuacji 2)

$\vec{F}_{W2}$ - siła wyporu w sytuacji 2)

1) W pierwszej sytuacji próbówka pływa swobodnie w cieczy (wypadkowa siła jest równa 0). Na próbówkę działają dwie siły które się równoważą

$$\vec{F}_{W1} + \vec{F}_g = 0 \Rightarrow \vec{F}_{W1} = -\vec{F}_g \Rightarrow F_{W1} = F_g. \quad (1)$$

2) W sytuacji drugiej ktoś nacisnął probówkę zanurzając ją dodatkowo o Δx . Po usunięciu siły zewnętrznej (nacisku) probówka zacznie się wynurzać, gdyż wyniku dodatkowego zanurzenia siła wyporu wzrosła i teraz nie równoważy się z siłą grawitacji $F_g < F_{w2}$.

Wypadkowa siła pojawiająca się po dodatkowym zanurzeniu będzie równa

$$\vec{F}_{wyp} = \vec{F}_{w2} + \vec{F}_g \Rightarrow F_{wyp} = F_{w2} - F_g. \quad (2)$$

W zapisie skalarnym uwzględniono zwroty wektorów (stąd znak "minus")

Korzystając z równań (1) i (2) możemy zapisać następującą zależność na wartość siły wypadkowej

$$F_{wyp} = F_{w2} - F_{w1}. \quad (3)$$

Wartość siły wyporu zgodnie z prawem Archimedes'a równa się ciężarowi cieczy wypartej przez ciało. Ciężar cieczy Q_C jest równy jej masie m_c pomnożonej przez przyspieszenie ziemskie g .

$$Q_C = m_c g. \quad (4)$$

Masę wypartej cieczy można obliczyć mnożąc objętość części probówki zanurzonej w cieczy V przez gęstość cieczy ρ

$$m_c = V\rho. \quad (5)$$

Objętości wypartej cieczy w sytuacjach 1) i 2) możemy zapisać następująco

$$V_1 = xs, \quad V_2 = (x + \Delta x)s \quad (6)$$

Korzystając z powyższych równań zapiszmy wzór na wartość siły wypadkowej w sytuacji 2)

$$F_{wyp} = F_{w2} - F_{w1} = V_2 \rho g - V_1 \rho g = (x + \Delta x)s\rho g - xs\rho g.$$

Ostatecznie

$$F_{wyp} = s\rho g \Delta x \quad (7)$$

W powyższym równaniu wielkości s , g i ρ są stałe a więc ich iloczyn również jest stały
 $s\rho g = const$.

Przyjmując, że powyższy iloczyn jest równy k otrzymamy następujące równanie na siłę wypadkową

$$F_{wyp} = k\Delta x. \quad (8)$$

Analizując równanie (8) możemy dojść do wniosku, że wypadkowa siła działająca na probówkę jest proporcjonalna do jej dodatkowego zanurzenia (również wynurzenia) czyli do Δx . Jest to więc siła harmoniczna a $k = s\rho g$ jest stałą sprężystości.

Mamy do czynienia z ruchem harmonicznym więc skorzystajmy ze wzoru na okres drgań w tym ruchu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \text{gdzie} \quad m = m_1 + m_2, \quad k = s\rho g \quad (9)$$

stąd

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{s\rho g}} \Rightarrow \rho = \frac{4\pi^2(m_1 + m_2)}{sgT^2}$$

Odp.

$$\text{Gęstość cieczy wynosi } \rho = \frac{4\pi^2(m_1 + m_2)}{sgT^2}.$$

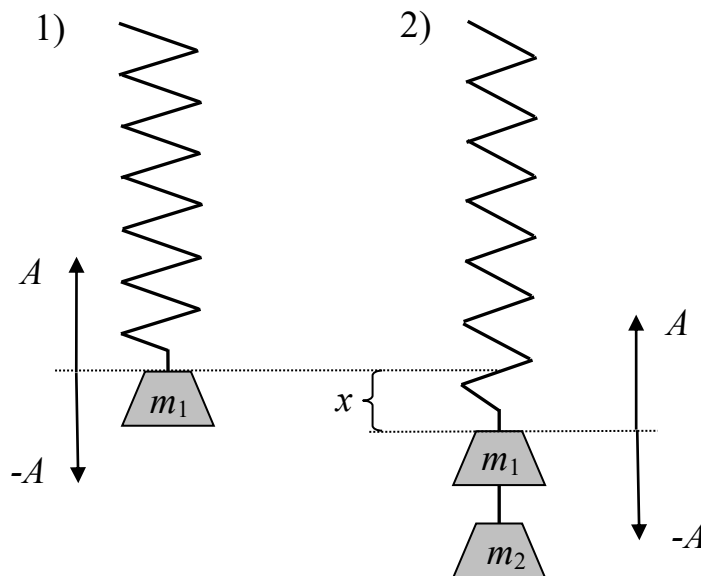
2. Na sprężynie zawieszono ciężarek o masie m_1 a następnie w wprowadzono go w ruch tak, że wykonywał drgania harmoniczne o okresie T_1 . Następnie do tej samej sprężyny z ciężarkiem m_1 dołączono dodatkowy ciężarek. Jaka jest masa dodatkowego ciężarka jeżeli tym razem układ wykonywał drgania harmoniczne o okresie T_2 ? O ile wydłużyła się sprężyna pod wpływem dodatkowego obciążenia? Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

Dane: m_1, T_1, T_2, g

Szukane: m_2, x

Rozwiązanie

Zacznijmy od rysunku.



W sytuacji 1) sprężyna jest obciążona ciężarkiem o masie m_1 i wykonuje drgania o pewnej amplitudzie A oraz okresie T_1 .

W sytuacji 2) sprężyna jest obciążona ciężarkami o łącznej masie $m_1 + m_2$ i wykonuje drgania o pewnej amplitudzie A i okresie T_2 . Położenie równowagi znajduje się niżej od położenia równowagi w sytuacji 1) bo pod wpływem dodatkowego obciążenia sprężyna wydłużyła się o x .

W obu przypadkach mamy do czynienia z drganiami harmonicznymi bo w przypadku sprężyny siła jest proporcjonalna do wydłużenia sprężyny. Zapiszmy więc wzory na okresy drgań w obu przypadkach

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}. \quad (1)$$

Przekształcając wzory możemy otrzymać zależności na stałą sprężystości sprężyny k

$$k = \frac{4\pi^2 m_1}{T_1^2}, \quad k = \frac{4\pi^2 (m_1 + m_2)}{T_2^2} \quad (2)$$

stąd

$$\frac{4\pi^2 m_1}{T_1^2} = \frac{4\pi^2 (m_1 + m_2)}{T_2^2}.$$

Przekształcając powyższe równanie otrzymamy masę dodatkowego ciężarka

$$m_2 = m_1 \left(\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 - 1 \right) \quad (3)$$

Wydłużenie sprężyny x wyliczymy korzystając z prawa Hooke'a. Dla odkształceń sprężystych wydłużenie jest proporcjonalne do działającej siły

$$F = kx \quad (4)$$

$$F = m_2 g \Rightarrow m_2 g = kx \quad (5)$$

Przekształcając równanie (5) oraz korzystając z równań (2) i (3) możemy zapisać

$$x = \frac{m_2 g}{k} = m_1 \left(\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 - 1 \right) g \frac{T_1^2}{4\pi^2 m_1} = \frac{(T_2^2 - T_1^2)g}{4\pi^2}$$

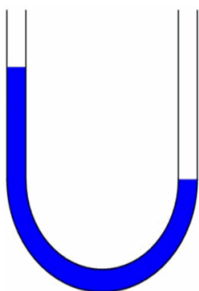
Odpowiedź

Masa dodatkowego ciężarka wynosi $m_2 = m_1 \left(\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 - 1 \right)$ a sprężyna wydłużyła się o odcinek $x = \frac{(T_2^2 - T_1^2)g}{4\pi^2}$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

zad. S_1

W rurce zgiętej w kształcie litery U znajduje się słup wody o łącznej długości l , przy czym w chwili początkowej poziom wody w jednym ramieniu rurki jest wyższy niż w drugim. Jaki będzie okres drgań słupa wody jeżeli siły lepkości uznamy za pomijalnie małe? Wykonaj rysunek. Dane jest przyspieszenie ziemskie g .



Woda w U - rurce

Odp. $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$

zad. S_2

Okres drgań pewnego wahadła matematycznego wynosił T_1 . Wahadło umieszczono w windzie i wprowadzono w ruch. Winda zaczęła poruszać się w górę ruchem jednostajnie przyspieszonym. Oblicz nowy okres drgań wahadła jeżeli wiadomo, że w ciągu czasu t winda pokonała odcinek s . Wykonaj rysunek i zaznacz odpowiednie wektory. Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

Wzór na okres drgań wahadła matematycznego $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ gdzie l jest długością wahadła.

Odp.

$$T_2 = T_1 \sqrt{\frac{g}{g + \frac{2s}{t^2}}}$$

zad. 1

Na końcach odcinka o długości d umieszczono dwa ładunki o wartościach q_+ oraz $2q_-$ ($q_+ = |q_-|$).

Wyznacz w jakich punktach prostej przechodzącej przez obydwa ładunki

a) natężenie pola elektrycznego jest równe 0

b) potencjał pola elektrycznego równa się 0

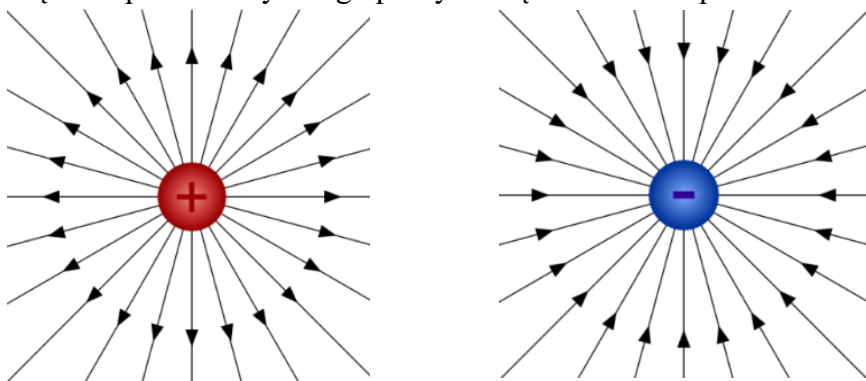
Pomijamy trywialne rozwiązania $+\infty$ oraz $-\infty$.

Dane: $d, q_+, 2q_-$

Szukane: x

Wstęp teoretyczny

Zanim przystąpimy do rozwiązywania zadania przypomnijmy sobie jak wyglądają linie sił pola elektrycznego pochodzące od ładunków punktowych (dodatniego i ujemnego). Kierunek i zwrot wektorów natężenia pola elektrycznego pokrywa się z liniami sił pola.



Jak widać linie sił pola elektrycznego (tym samym wektory natężenia pola) będą skierowane "od" dodatniego ładunku punktowego oraz "do" ujemnego ładunku punktowego.

Natężenie pola elektrycznego ładunku punktowego (wielkość wektorowa) można zapisać następującym równaniem

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \text{ skalarnie } E = k \frac{q}{r^2}$$

gdzie $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}$, k - stała elektryczna zależna od ośrodka, ϵ_0 - przenikalność elektryczna próżni,

ϵ_r - względna przenikalność elektryczna ośrodka, q - wartość ładunku, $\vec{r}$ - wektor przemieszczenia (r to odległość pomiędzy ładunkiem a punktem w którym mierzymy natężenie pola).

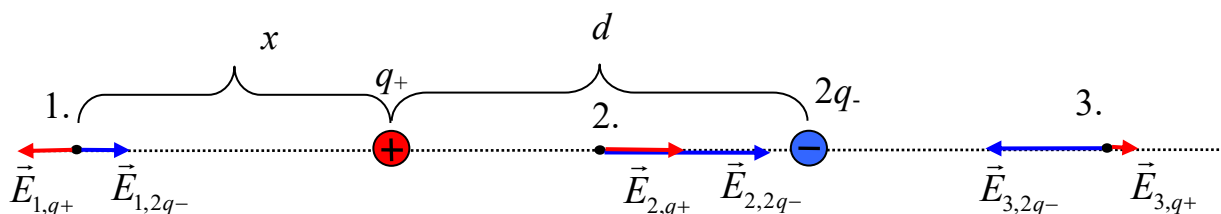
Potencjał pola elektrycznego ładunku punktowego (wielkość skalarna) można zapisać następującym wzorem

$$V = k \frac{q}{r}$$

gdzie r to odległość pomiędzy ładunkiem a punktem w którym mierzymy potencjał pola.

Rozwiązanie

a) wykonajmy rysunek i zastanówmy się w których punktach na prostej wypadkowe natężenie pola może być równe zero czyli $\vec{E}_{q+} + \vec{E}_{2q-} = 0$.



Musimy pamiętać, że natężenie pola to wielkość wektorowa. Warunkiem koniecznym na to, że suma wektorów ma być równa zero są te same kierunki i wartości wektorów, ale ich przeciwne zwroty.

Kierunki wszystkich wektorów na rysunku są takie same (pokrywają się z prostą przechodzącą przez ładunki) a zwroty są różne w zależności od punktów w których rozpatrujemy wektory natężenia.

1) W punkcie 1. wektory natężenia pola mają przeciwne zwroty (czyli jest nadzieja na wyzerowanie). Wartość ładunku dodatniego jest mniejsza od ujemnego, ale punkt po lewej stronie znajduje się bliżej ładunku dodatniego a więc mniejsza wartość ładunku może zostać zrekompensowana przez mniejszą odległość od punktu. W okolicy punktu 1 (czyli po lewej stronie ładunku dodatniego) wektory natężenia pola powinny się wyzerować. Musimy wyliczyć ile konkretnie wynosi x .

2) W punkcie 2. czyli pomiędzy ładunkami zwroty wektorów są jednakowe a więc nie ma możliwości na wyzerowanie wypadkowego natężenia pola (jego wartość zawsze będzie większa od 0)

3) W punkcie 3. wektory natężenia pola mają przeciwne zwroty (czyli byłaby nadzieja na wyzerowanie). Wypadkowy wektor będzie jednak różny od zera bo wartość ładunku dodatniego jest mniejsza od ładunku ujemnego a przy tym ładunek dodatni znajduje się w większej odległości od punktu 3. niż ładunek ujemny.

Skoro wyeliminowaliśmy punkty pomiędzy ładunkami i po ich prawej stronie, skoncentrujmy się na wyliczeniu odległości x .

Suma wektorów natężeń pól elektrycznych w punkcie 1. ma być równa 0 a więc

$$\vec{E}_{1,q+} + \vec{E}_{1,2q-} = 0$$

Przechodząc na zapis skalarny musimy uwzględnić zwroty wektorów.

$$-E_{1,q+} + E_{1,2q-} = 0 \quad (\text{znak minus bo zwrot } \vec{E}_{1,q+} \text{ jest przeciwny do osi } x)$$

a więc

$$E_{1,2q-} = E_{1,q+}$$

możemy zapisać $|q_-| = q_+ = q$ a więc

$$k \frac{2q}{(x+d)^2} = k \frac{q}{x^2}$$

$$2x^2 = (x+d)^2 \quad | \sqrt{}$$

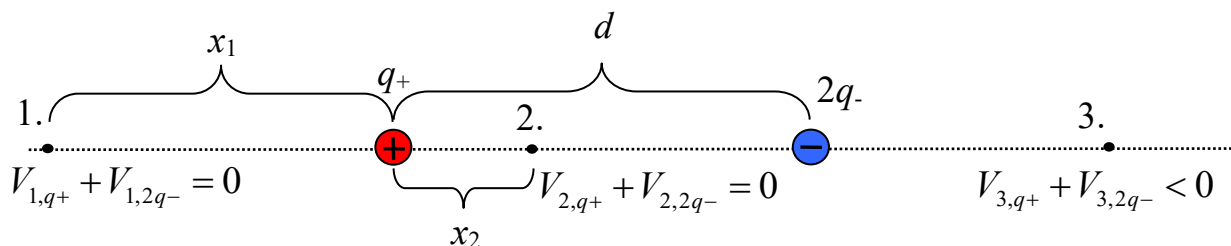
Wiemy, że $x > 0$ oraz $x + d > 0$ a więc w powyższym przypadku nie musimy rozwiązywać równania kwadratowego, lecz wystarczy równanie obustronnie pierwiastkować. Stąd po przekształceniach

$$x = \frac{d}{\sqrt{2}-1}.$$

Punkt w którym wypadkowe natężenie pola elektrycznego jest równe zero leży po lewej stronie od ładunku dodatniego w odległości $x = \frac{d}{\sqrt{2}-1}$ od niego.

b) obliczanie wypadkowych potencjałów jest prostszym zadaniem ze względu na to, że potencjał jest wielkością skalarną a więc w tym przypadku wystarczy zwykłe sumowanie. Musimy jednak pamiętać, że potencjał elektryczny od ładunku ujemnego ma wartość ujemną a od dodatniego dodatnią.

Podobnie jak w podpunkcie a) wykonajmy rysunek i zastanówmy się mniej więcej w których punktach wypadkowy potencjał mógłby być równy zero czyli $V_{q+} + V_{2q-} = 0$.



Potencjały V_{q+}, V_{2q-} mają przeciwne znaki a więc warunkiem wyzerowania potencjału w danym punkcie jest równość ich wartości bezwzględnych.

1) w punkcie 1. jest szansa na wyzerowanie wypadkowego potencjału. Wprawdzie wartość ładunku dodatniego jest mniejsza od wartości bezwzględnej ładunku ujemnego, ale ładunek q_+ znajduje się bliżej punktu 1. niż ładunek $2q_-$.

2) w punkcie 2. jest szansa na wyzerowanie wypadkowego potencjału, ale spodziewamy się, że punkt 2. będzie bliżej ładunku q_+ (ze względu na to, że jego wartość jest mniejsza od wartości bezwzględnej ładunku ujemnego).

3) W punkcie 3. (na lewo od ładunku ujemnego) nie ma możliwości wyzerowania potencjału bo wartość bezwzględna potencjału od ładunku ujemnego będzie zawsze większa od potencjału ładunku dodatniego.

Obliczmy więc odległości x_1 oraz x_2 .

$$V_{1,q+} + V_{1,2q-} = 0$$

dla wygody możemy zapisać $q_+ = q$ oraz $2q_- = -2q$ stąd

$$k \frac{q}{x_1} + k \frac{-2q}{x_1 + d} = 0 \Rightarrow k \frac{q}{x_1} = k \frac{2q}{x_1 + d}.$$

Po elementarnych przekształceniach otrzymamy

$$x_1 = d.$$

Wyliczmy teraz x_2

$$V_{2,q+} + V_{2,2q-} = 0$$

$$k \frac{q}{x_2} + k \frac{-2q}{d - x_2} = 0 \Rightarrow k \frac{q}{x_2} = k \frac{2q}{d - x_2}$$

stąd

$$x_2 = \frac{d}{3}.$$

Wypadkowy potencjał będzie równy zero w punktach $x_1 = d$ oraz $x_2 = d/3$.

zad. 2

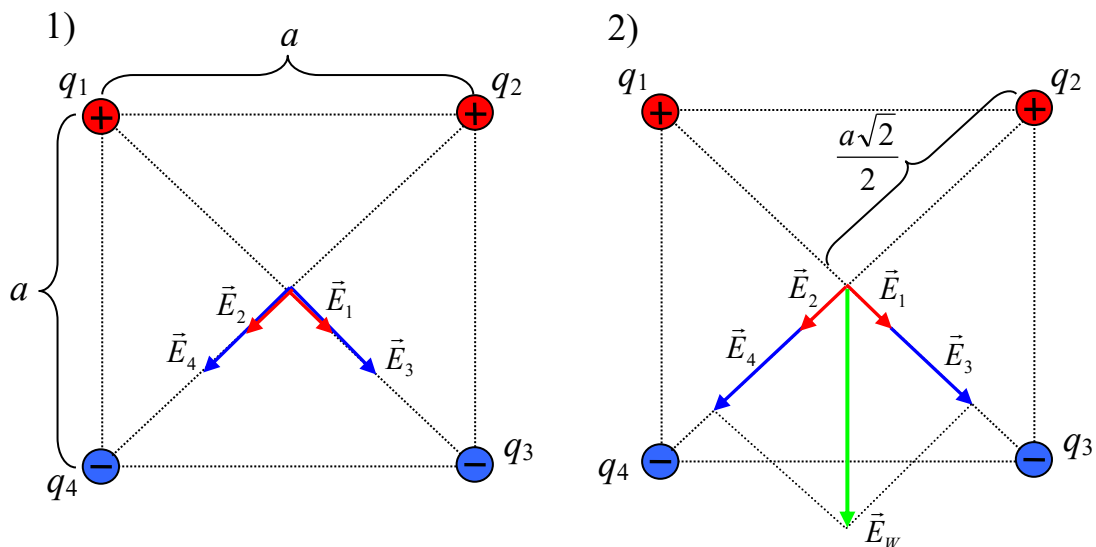
Cztery ładunki $q_1 = q_+$, $q_2 = q_+$, $q_3 = 2q_-$, $q_4 = 2q_-$ (gdzie $q_+ = |q_-|$) umieszczono w rogach kwadratu o bokach a (patrz rysunek). Wyznacz wypadkowe natężenie pola elektrycznego oraz potencjał w środku tego kwadratu. Wyznacz wektor siły działającej na dodatkowy ładunek ujemny Q umieszczony w środku tego kwadratu? Wyznacz energię potencjalną dodatkowego ładunku umieszczonego w tym punkcie. Dana jest stała elektryczna ośrodka k .

Dane: $a, q_+, 2q_-, Q, k$

Szukane: E_W, V_W, F, E_P

Rozwiązanie

Natężenie pola elektrycznego to wielkość wektorowa a więc zacznijmy od rysunku.



Na rysunku 1) przedstawiono wektory natężenia pola w punkcie znajdującym się w środku kwadratu. Na rysunku 2) wektory te zsumowano. Wektor wypadkowego natężenia pola można zapisać poniższym równaniem

$$\vec{E}_W = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4.$$

W celu obliczenia wartości wektora E_W przejdźmy na zapis skalarny. Musimy jednak pamiętać o kierunkach i zwrotach wektorów składowych.

Z rysunku widać, że możemy zapisać następującą relację pomiędzy długością (wartością) wektora E_W oraz sumą długości wektorów E_1 i E_3

$$E_W = \sqrt{2}(E_1 + E_3)$$

stąd

$$E_W = \sqrt{2} \left(k \frac{q_+}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + k \frac{|2q_-|}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \right) = \sqrt{2} \left(k \frac{q}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + k \frac{2q}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \right)$$

po elementarnych przekształceniach otrzymamy wartość wektora natężenia pola w środku kwadratu (kierunek i zwrot jak na rysunku)

$$E_W = k \frac{6q}{a^2} \sqrt{2}.$$

Przystąpmy do obliczeń potencjału wypadkowego V_W . Teraz będzie łatwiej bo potencjał to wielkość skalarna

$$V_W = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

$$V_1 = k \frac{q_1}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}, \quad V_2 = k \frac{q_2}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}, \quad V_3 = k \frac{q_3}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}, \quad V_4 = k \frac{q_4}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

podstawiając do powyższych równań $q_1 = q_2 = q$ oraz $q_3 = q_4 = -2q$ otrzymamy

$$V_W = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = k \frac{q}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + k \frac{q}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + k \frac{-2q}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + k \frac{-2q}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = -k \frac{4q}{a\sqrt{2}}$$

Wypadkowy potencjał w środku kwadratu wynosi $V_W = -k \frac{4q}{a\sqrt{2}}.$

Wyznamy siłę działającą na ujemny ładunek Q , który dodatkowo umieszczono w środku kwadratu. Jeżeli znamy natężenie pola elektrycznego jest to banalnie proste.

Skorzystamy z ogólnego wzoru na siłę działającą na ładunek elektryczny q w polu elektrycznym o natężeniu E

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

stąd

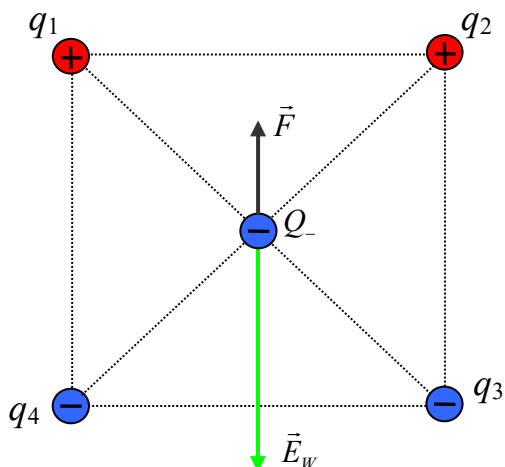
$$\vec{F} = Q \vec{E}_W.$$

Wartość wektora siły zapiszemy równaniem

$$F = k \frac{6qQ}{a^2} \sqrt{2}.$$

Odpowiedzmy jeszcze jaki będzie kierunek i zwrot tej siły.

Posłużmy się poniższym rysunkiem



Kierunek siły działającej na ładunek w polu elektrycznym jest zawsze taki sam jak kierunek wektora natężenia pola natomiast zwroty są zgodne dla ładunku dodatniego lub przeciwne dla ładunku ujemnego. Jest to wyraźnie widoczne we wzorze na siłę. Jeżeli wektor natężenia pomnożymy przez ujemną wartość to otrzymamy wektor o tym samym kierunku, ale o przeciwnym zwrocie.

Obliczenie energii potencjalnej ładunku jest najprostsze. Skorzystamy tu z zależności

$$E_p = qV$$

a więc energia potencjalna dodatkowego ładunku w środku kwadratu będzie wynosiła

$$E_p = Q_- V_w = -k \frac{4qQ_-}{a\sqrt{2}}.$$

Zważywszy, że ładunek Q_- jest ujemny a więc jego energia potencjalna będzie dodatnia (wypadkowy potencjał jest ujemny).

Jak widać znajomość parametrów pola E oraz V w prosty sposób umożliwia nam wyznaczenie odpowiednio siły działającej na dowolny ładunek oraz jego energii potencjalnej.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

S_1

Na końcach odcinka o długości x znajdują się ładunki $+4q$ oraz $-2q$. Oblicz natężenie i potencjał pola elektrycznego w punkcie A leżącym na prostej przechodzącej przez ładunki. Odległość punktu A od ładunku $+4q$ wynosi $2x$ a od ładunku $-2q$ wynosi x . Przenikalność elektryczna ośrodka wynosi ϵ_0 . Wykonaj obliczenia i rysunek (zaznacz wektory natężenia pola).

Odp. $E_{\text{wyp}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2}, \quad V_{\text{wyp}} = 0$

S_2

W 3 wierzchołkach kwadratu o bokach a umieszczono kolejno dodatnie ładunki punktowe q , $2q$ i q . Wyznacz wypadkowe natężenie pola oraz potencjał elektryczny w czwartym wierzchołku kwadratu. Jaka byłaby energia potencjalna ładunku punkowego o wartości $-Q$ umieszczonego w czwartym wierzchołku? Wykonaj rysunek, zaznacz wektory natężenia pola elektrycznego.

Współczynnik przenikalności elektrycznej ośrodka wynosi ε . Odp.

$$E_{\text{wyp}} = \frac{kq}{a^2}(1 + \sqrt{2}), \quad V_{\text{wyp}} = \frac{kq}{a}(2 + \sqrt{2}), \quad E_p = -Q \cdot V_{\text{wyp}}, \quad \text{gdzie} \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$$

zad. 1

Pomiędzy okładki próżniowego kondensatora płaskiego równoległe do płytek wpada elektron i wylatuje pod kątem α do pierwotnego kierunku. Oblicz prędkość początkową elektronu w chwili wejścia do kondensatora. Dane: l - długość okładek kondensatora, U - napięcie (różnica potencjałów) pomiędzy okładkami kondensatora, d - odległość między okładkami kondensatora, e^- ładunek elektronu, m - masa elektronu. Zakładamy, że siły grawitacyjne są pomijalnie małe.

Dane: α, l, U, d, e^-, m

Szukane: V_0

Krótki wstęp teoretyczny

Kondensator to urządzenie służące m.in. do magazynowania ładunku (jest wiele innych zastosowań kondensatorów). Czym różni się kondensator od akumulatora?

Po pierwsze budowę a po drugie "możliwościami".

Plusem akumulatora jest możliwość zgromadzenia większego ładunku przy tych samych gabarytach i wadze co kondensator. Plusem kondensatora jest możliwość szybkiego ładowania i rozładowania kondensatora. Patrząc na kondensator elektryczny z punktu widzenia "magazynu" ładunku elektrycznego jest to magazyn który możemy stosunkowo szybko zapłacić i rozładować.

W smartfonach używamy akumulatorów, które wprawdzie długo się ładuje, ale energia elektryczna wystarcza również na długo. W defibrylatorach wykorzystuje się kondensatory, które szybko można naładować do pożądanej wartości energii np. 200 J a potem szybko rozładować odzyskując zgromadzoną energię elektryczną w krótkim czasie. Tym samym możemy uzyskać dużą moc impulsu prądowego. W powyższym zadaniu wykorzystamy wzór na wartość natężenia pola elektrycznego E w kondensatorze

$$E = \frac{U}{d},$$

gdzie U to napięcie między okładkami kondensatora (różnica potencjałów między okładkami) a d to odległość między okładkami kondensatora.

Rozwiązanie

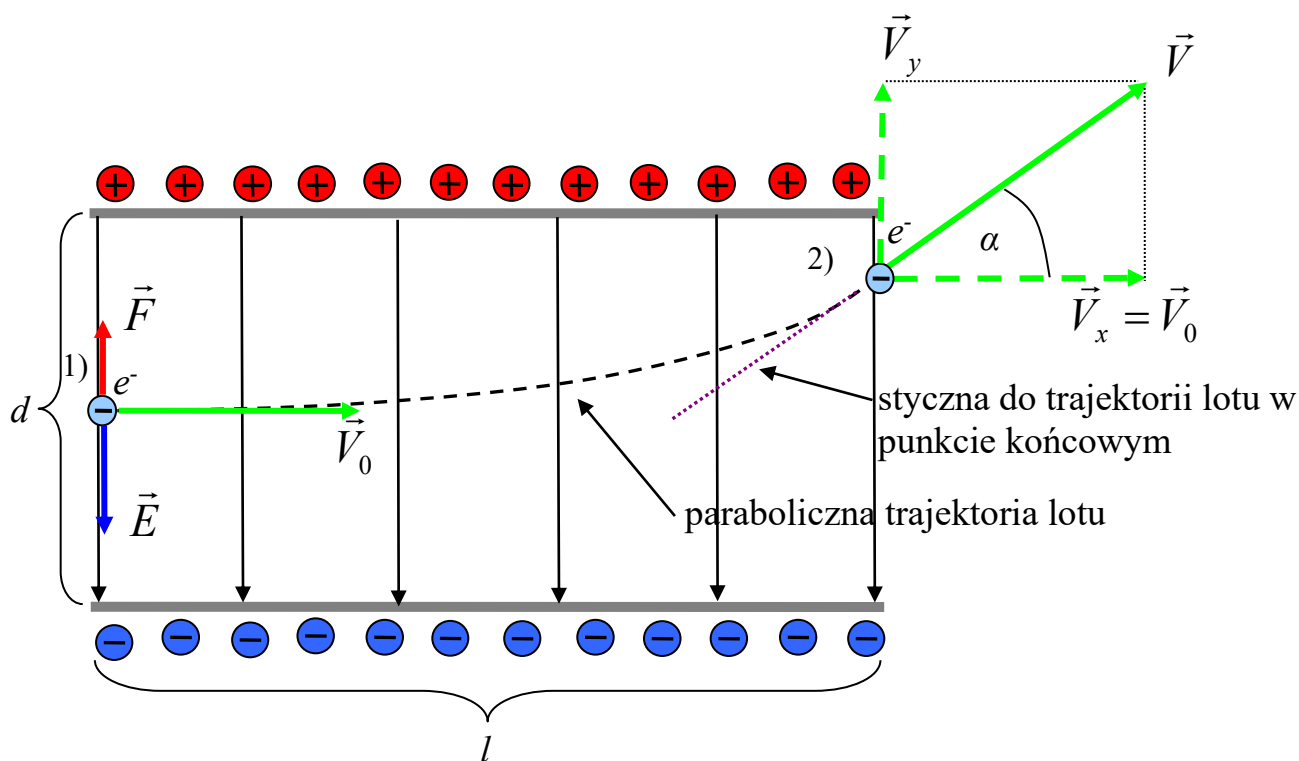
Zacznijmy od rysunku. Na poniższym rysunku elektron porusza się poziomo z prędkością o wartości V_0 po czym wpada pomiędzy okładki kondensatora równoległe do jego pierwotnej trajektorii. Ze względu na to, że pomijamy siły grawitacyjne moglibyśmy zorientować rysunek w dowolnym kierunku, gdyż nie miałyby to znaczenia. Okładki kondensatora (płytki metalowe) są naładowane różnoimiennie. Przyjąłem, że górna okładka jest naładowana dodatnio a dolna ujemnie stąd kierunek i zwrot linii sił pola elektrycznego (czarne strzałki) jest z "góry na dół". Mamy w tym przypadku do czynienia z polem jednorodnym, czyli wektor natężenia pola elektrycznego jest jednakowy w każdym punkcie wewnątrz kondensatora. Jeżeli ładunek znalazł się w polu elektrycznym to zadziała na niego siła $\vec{F} = q\vec{E}$. W naszym konkretnym przypadku na elektron zadziała siła $\vec{F} = e^-\vec{E}$.

Wartość tej siły możemy po prostu zapisać

$$F = e^- E. \tag{1}$$

Kierunek siły będzie zgodny z liniami sił pola (z kierunkiem wektora pola elektrycznego) natomiast jej zwrot będzie przeciwny do zwrotu wektora natężenia pola (elektron ma ładunek ujemny).

Jeżeli przyjrzymy się rysunkowi możemy zauważyć, że sytuacja jest zbliżona do ruchu cząstki w polu grawitacyjnym.



W sytuacji 1) elektron porusza się poziomo z prędkością V_0 w polu elektrycznym a więc działa na niego siła F równoległa do wektora natężenia pola elektrycznego E , ale o przeciwnym zwrocie. Siła ta spowoduje przyspieszanie ładunku w kierunku pionowym, ale nie ma wpływu na prędkość poziomą (jest do niej prostopadła). Trajektorią lotu elektronu będzie więc parabola tak jak to obserwowaliśmy w polu grawitacyjnym. W punkcie 2) (u wylotu kondensatora) elektron ma już nową prędkość (zmiana wartości, kierunku i zwrotu) gdyż podczas lotu przez cały czas działała siła F nadając elektronowi pionowe przyspieszenie.

Przystąpmy do obliczeń.

W kierunku poziomym elektron poruszał się ze stałą prędkością V_0 . W tym wypadku możemy zapisać następującą zależność na prędkość ładunku (ruch jednostajny)

$$V_0 = \frac{l}{t} \text{ gdzie } t \text{ jest czasem przelotu elektronu przez kondensator.} \quad (2)$$

W kierunku pionowym będziemy mieli ruch jednostajnie przyspieszony stąd zależność na prędkość końcową w kierunku pionowym (położenie 2)

$$V_y = at \text{ gdzie } a \text{ jest przyspieszeniem elektronu.} \quad (3)$$

Na rysunku widać, że możemy zapisać następującą zależność

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_y}{V_0}. \quad (4)$$

Spróbujmy wyliczyć prędkość V_y korzystając ze wzoru (3). Na początek wyznaczmy przyspieszenie elektronu a . Możemy to zrobić posługując się II zasadą dynamiki Newtona $F = ma$ stąd

$$a = \frac{F}{m}. \quad (5)$$

Podstawiając równanie (1) do wzoru (5) uzyskamy

$$a = \frac{e^- E}{m} . \quad (6)$$

Teraz skorzystamy ze wzoru na natężenie pola elektrycznego wewnątrz próżniowego kondensatora płaskiego (patrz wstęp teoretyczny)

$$E = \frac{U}{d} . \quad (7)$$

Podstawiając powyższe równanie do wzoru (6) otrzymamy ostatecznie wzór na wartość przyspieszenia elektronu

$$a = \frac{e^- U}{md} . \quad (8)$$

Czas przelotu elektronu możemy wstępnie zapisać przy pomocy przekształconego równania (2)

$$t = \frac{l}{V_0} . \quad (9)$$

Podstawmy teraz zależności (8) i (9) do równania (3)

$$V_y = at = \frac{e^- Ul}{mdV_0} . \quad (10)$$

Po podstawieniu powyższego wzoru do równania (3) uzyskamy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_y}{V_0} = \frac{e^- Ul}{mdV_0^2}$$

a stąd wzór na prędkość początkową elektronu

$$V_0 = \sqrt{\frac{e^- Ul}{md \operatorname{tg} \alpha}}$$

Ze względu na dosyć złożony wzór i połączenie różnych wielkości dla pewności wykonajmy jeszcze rachunek jednostek.

$$[V_0] = \sqrt{\frac{C \cdot V \cdot m}{kg \cdot m}} = \sqrt{\frac{C \cdot V}{kg}} = \sqrt{\frac{A \cdot s \cdot V}{kg}} = \sqrt{\frac{W \cdot s}{kg}} = \sqrt{\frac{J}{kg}} = \sqrt{\frac{N \cdot m}{kg}} = \sqrt{\frac{kg \frac{m}{s^2} \cdot m}{kg}} = \sqrt{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{m}{s}$$

Odp.

$$\text{Prędkość początkowa elektronu wynosiła } V_0 = \sqrt{\frac{e^- Ul}{md \operatorname{tg} \alpha}} .$$