

Fizyka

dr hab. Bogusław Furmann prof. PP

**Zakład Inżynierii i Metrologii Kwantowej na
Wydziale Inżynierii Materiałowej i Fizyki
Technicznej P. P. ul. Piotrowo 3 pok. 540 BM**

Tematyka wykładu

1. Fizyka jako nauka, wielkości fizyczne i ich jednostki
2. Kinematyka
3. Dynamika ruchu postępowego
4. Pole grawitacyjne
5. Ruch obrotowy
6. Drgania i fale
7. Mechanika płynów i gazów
8. Przemiany gazowe

Tematyka wykładu c.d

- 9. Termodynamika
- 10. Pole elektryczne i prąd stały
- 11. Pole magnetyczne
- 12. Indukcja i fale elektromagnetyczne
- 13. Optyka geometryczna i falowa
- 14. Fizyka kwantowa i relatywistyczna
- 15. Zagadnienia fizyki współczesnej

Podręczniki

- D.Halliday, R.Resnick, J.Walker; *Podstawy Fizyki tom 1,2,3,4,5*
- J. Massalski, M. Massalska; *Fizyka dla Inżynierów tom 1 i 2*
- K.Jezierski, B.Kołodka, K.Sierański; *Wzory i Prawa z Objaśnieniami, trzy części*
- K.Jezierski, B.Kołodka, K.Sierański; *Zadania z Rozwiązaniami, dwie części*

David
Halliday

Robert
Resnick

Jearl
Walker

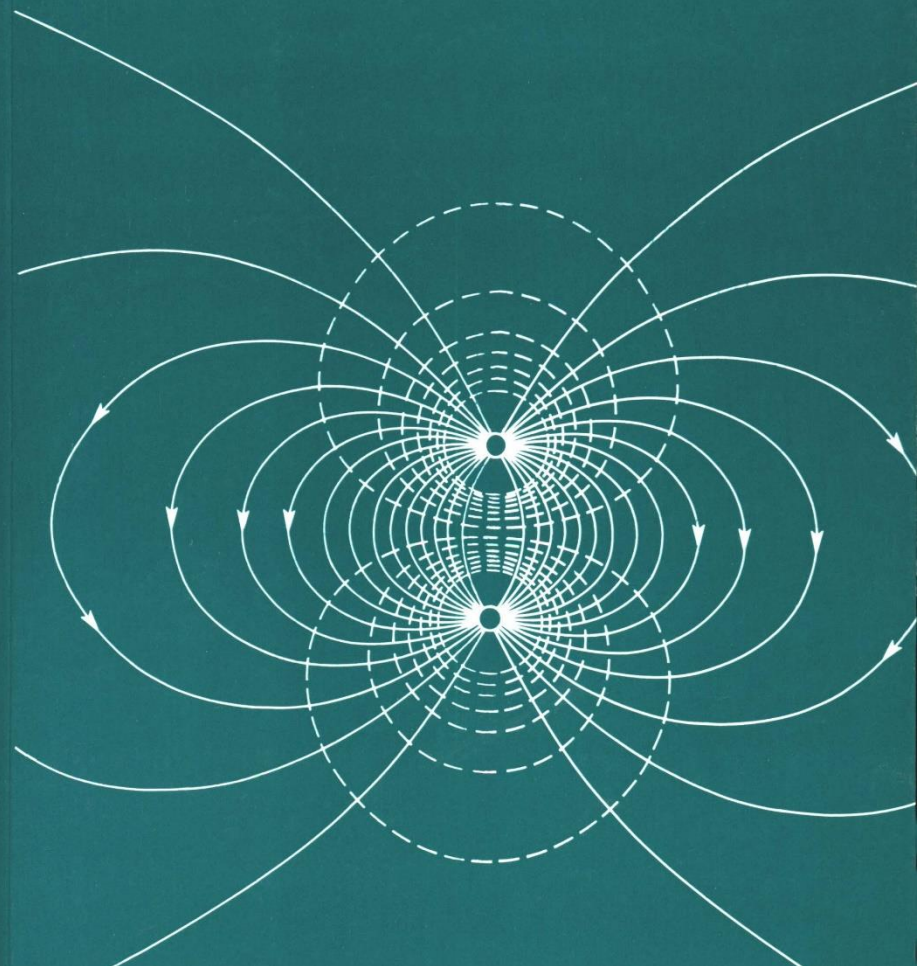


Podstawy **FIZYKI**

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN

David Halliday
Robert Resnick

FIZYKA 2



Wstęp

1. Przedmiot zainteresowań fizyki jako nauki
2. Metody badań stosowane w fizyce
3. Skala zjawisk i układy jednostek wielkości fizycznych
4. Rodzaje wielkości fizycznych
5. Algebra wektorów
6. Fizyka a rachunek różniczkowy i całkowy

Co to jest fizyka

Większość dyscyplin naukowych można zdefiniować podając ich przedmiot zainteresowań. I tak **biologia** zajmuje się **organizmami żywymi**, **geografia** badaniem **Ziemi** itp.. W przypadku fizyki taka definicja jest trudna. **Przedmiotem zainteresowania fizyki jest cała materia**. Fizyka, która od greckiego „FIZIS” czyli przyroda nazywana była kiedyś filozofią przyrody bada **najbardziej ogólne prawa rządzące przyrodą**. Badania te można wykonywać różnymi metodami. Podstawowymi są **badania teoretyczne i badania doświadczalne**.

Fizyk teoretyk będzie starał się wyjaśnić znane zjawiska w oparciu o proste reguły, oraz przewidywać nowe prawa i zależności pomiędzy zjawiskami.

Fizyk doświadczalny ma za zadanie odkrywać i opisywać nowe zjawiska i prawidłowości nimi rządzące, lub sprawdzać doświadczalnie przewidywania teoretyczne

Szybki rozkwit nauk przyrodniczych w ostatnim czasie zawdzięczamy silnemu oddziaływaniu pomiędzy teorią a doświadczeniem.

Ze słowem FIZYKA spotykamy się bardzo często m. in. w nazwach innych dziedzin nauki jak np.. biofizyka, astrofizyka, geofizyka, fizykoterapia.

Biofizyka bada strukturę i funkcjonowania makrocząsteczek z których jesteśmy zbudowani.

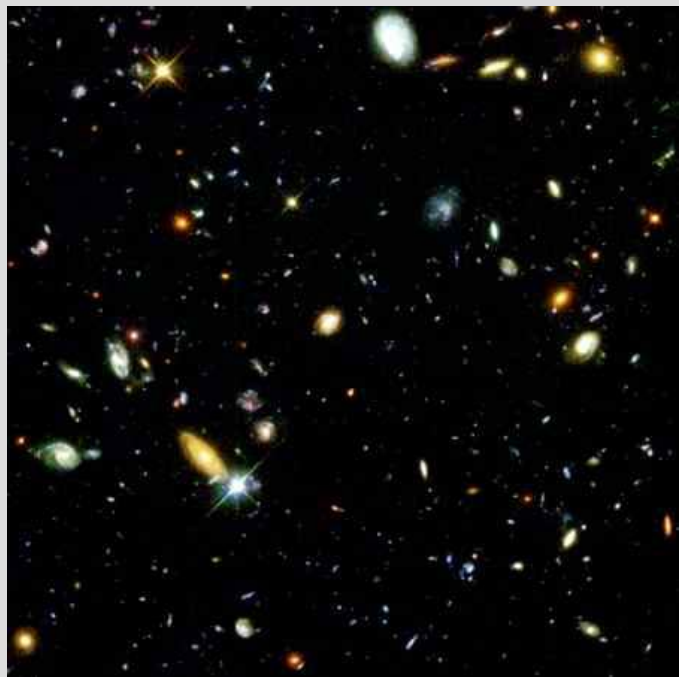
Geofizyka i astrofizyka zajmują się badaniem naszego makroskopowego otoczenia.

Znamy oczywiście szereg innych dziedzin fizyki. Są nimi np..

- Fizyka ciała stałego — badająca własności materii skondensowanej
- Fizyka atomowa -- badająca strukturę atomów
- Fizyka statystyczna — badająca układy wielu cząstek
- Fizyka jądrowa -- badająca własności jąder atomowych
- Fizyka cząstek elementarnych -- zajmująca się własnościami tych cząstek i oddziaływaniami pomiędzy nimi
- Fizyka medyczna -- stosująca metody fizyczne w medycynie

Zobaczmy, z jakimi obiektami nie makroskopowymi możemy mieć do czynienia w badaniach fizycznych.

Skala przestrzenno-czasowa zjawisk fizycznych



Galaktyki sfotografowane przez Kosmiczny Teleskop Hubble'a skierowany na „pusty” obszar nieba w Wielkiej Niedźwiedzicy.

Charakterystyczne rozmiary w skali makroskopowej (km):

Długość równika - 40 tysięcy,
odległość do Księżyca - 384 tysiące, odległość do Słońca - 150 milionów, odległość do najbliższych gwiazd, $4 \cdot 10^{13}$,
promień dostępnej do obserwacji części Wszechświata - $1.5 \cdot 10^{23}$ kilometra.

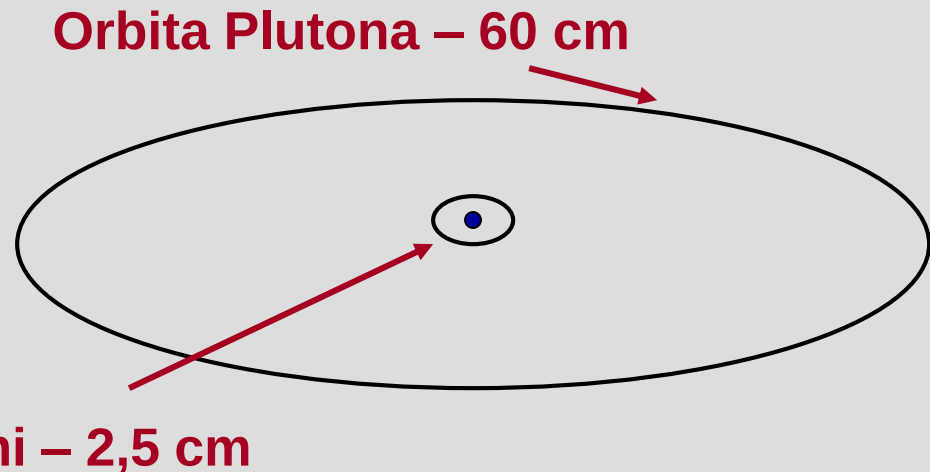
Skala czasu wyrażona w latach:

Okres obrotu Ziemi wokół własnej osi - 1/366,
okres obrotu Ziemi wokół Słońca 1,
okres obrotu Słońca wokół środka Galaktyki - 240 milionów,
wiek Ziemi - 4.6 miliarda,
wiek Wszechświata - około 15 miliardów.

Rozmiary Wszechświata

D. Goldsmith „Największa pomyłka Einsteina?”

Wyobraźmy sobie Słońce o wielkości ziarnka piasku.



Do najbliższej gwiazdy (Alfa Centauri) odległość wynosi ponad 3 km.

Nasza Galaktyka (Droga Mleczna) zawiera około sto miliardów gwiazd.



Tyle ziarenek piasku mieści się w pudełku po butach.

Wielkość Galaktyki w tej skali odpowiada odległości Księżyca od Ziemi.



Galaktykę wypełnia głównie pusta przestrzeń.

Rozmiary Wszechświata

D. Goldsmith „Największa pomyłka Einsteina?”

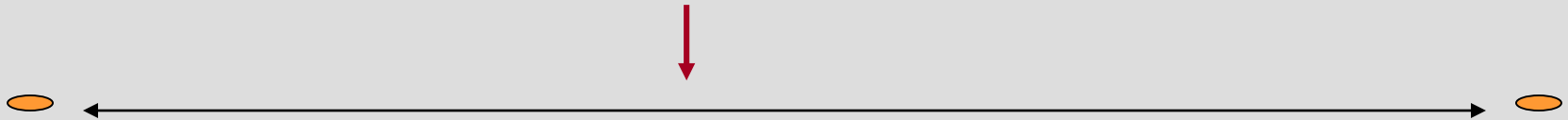
Zmiana skali: Droga Mleczna wielkości dużego talerza.

Słońce

Gwiazdy widoczne gołym okiem znajdują się w odległości 3 mm od Słońca (większość z nich poniżej 1 mm).



Najbliższa sąsiednia galaktyka, Wielka Mgławica Andromedy to drugi talerz w odległości kilku metrów.

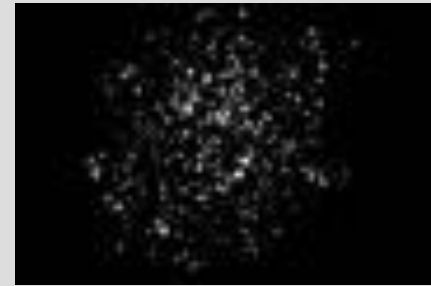


Galaktyki tworzą gromady galaktyk. Droga Mleczna należy do Grupy Lokalnej

W naszej skali: Grupa Lokalna to kikadziesiąt tac, talerzyków itp. W odległościach kilku do kilkunastu metrów od siebie.

Rozmiary Wszechświata

Najbliższa gromada galaktyk
(gromada w Pannie) odległa o
kilkaset metrów.



Inne gromady galaktyk: gromada
w Warkoczu Bereniki odległa o
1,5 km,
gromada w gwiazdozborze
Bliźniąt – 6 km.



Promień obserwowalnego Wszechświata ponad 42 km.

Skala przestrzenno-czasowa zjawisk fizycznych



Charakterystyczne rozmiary w skali mikroskopowej (m):

grubość włosa - 10^{-4} ,
średnica wirusa ospy - 10^{-7} ,
promień atomu - 10^{-9} ,
promień jądra atomowego - 10^{-14} ,
rozmiar elektronu - poniżej 10^{-18} .

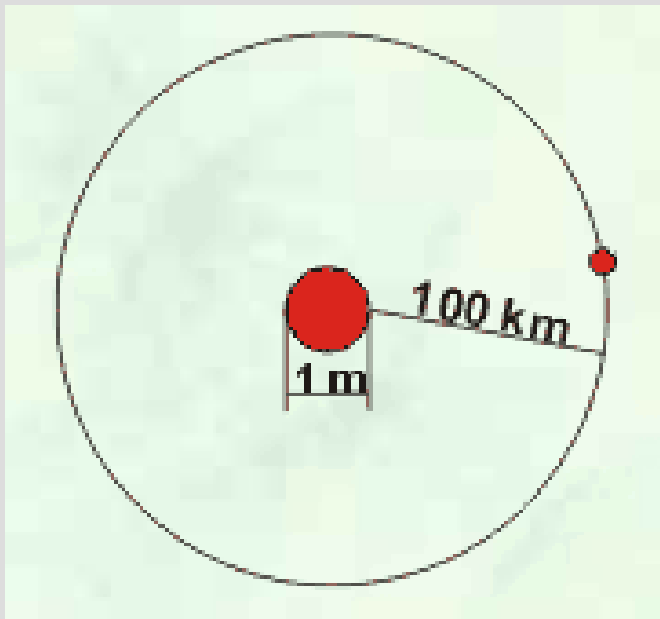
... i czasy (s):

błysk lampy błyskowej - 0.001,
czas lotu elektronu w kineskopie - 10^{-8} ,
najkrótsze błyski laserowe - 10^{-15} ,
czas zderzeń jądrowych - 10^{-23} .

Ślady cząstek w komorze pęcherzykowej

Rozmiary atomu

Tak wyglądają proporcje rozmiarów jądra atomowego i całego atomu.



Świat zarówno w mikro, jak i makroskali wypełnia głównie pusta przestrzeń.

Przegląd podstawowych rozmiarów



Odległość Ziemia-Słońce: 150 000 000 000m

Odległość Ziemia-Księżyc: 380 000 000m

Długość muru chińskiego: 2 400 000m

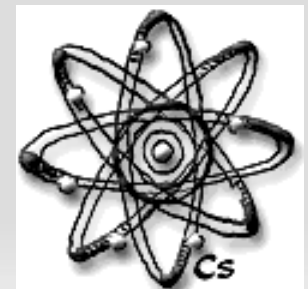
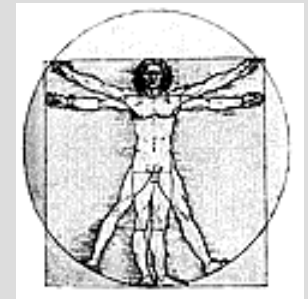
Wysokość Mt. Everestu: 8 848m

Wzrost człowieka: ~1.8m

Grubość włosa ludzkiego: 0.000 08m

Rozmiar cząsteczki H₂O : 0.000 000 001m

Rozmiar atomu: 0.000 000 000 3m



Wielkości fizyczne

Wielkości skalarne wyrażane są ilościowo jedną liczbą.

Przykłady: masa, czas, temperatura, potencjał elektryczny.

$$M=2,4 \text{ kg}$$

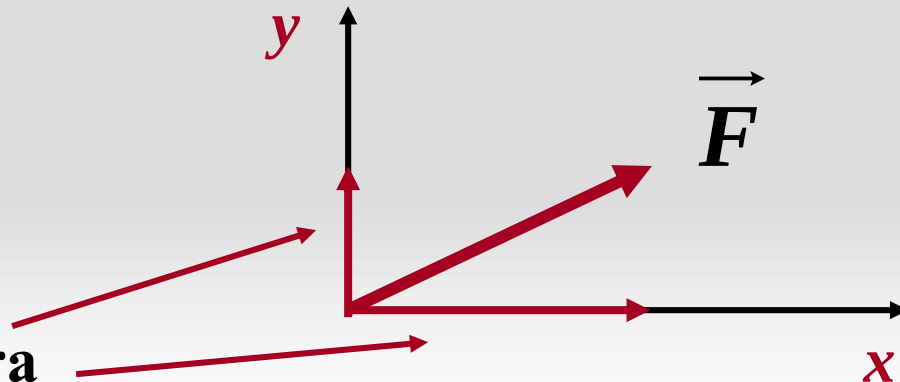
Wielkości wektorowe wyrażamy za pomocą n liczb.

Liczba n odpowiada wymiarowi przestrzeni, w której prowadzimy analizę badanego zjawiska.

Przykłady: prędkość, pęd, siła, przyspieszenie, natężenie pola elektrycznego.

$$\vec{F} = [4, 2]N$$

Składowe wektora



Wielkości fizyczne

Wielkości tensorowe stosujemy do badania ośrodków i zjawisk o cechach anizotropowych czyli takich, których własności zależą od kierunku w przestrzeni.

Przedstawiamy je za pomocą **tablicy liczb**, które zapisujemy w postaci macierzy.

Za pomocą tensorów opisujemy na przykład własności kryształów i ośrodków ciągłych. Takie wielkości jak **przewodność elektryczna**, **przenikalność elektryczna i magnetyczna** zależą od kierunku względem osi krystalograficznych **w kryształach** - mają więc charakter tensorowy.

Jednostki

W Polsce stosujemy *Międzynarodowy Układ Jednostek*, "*SI*". Podstawowymi jednostkami tego układu są: jednostka długości (metr), masy (kilogram) i czasu (sekunda).

Oprócz nich, za podstawowe uważa się jeszcze jednostki natężenia prądu, światłości, temperatury bezwzględnej oraz ilości materii.

Jednostki podstawowe

wielkość fizyczna	nazwa jednostki	oznaczenie
długość	metr	m
masa	kilogram	kg
czas	sekunda	s
natężenie prądu	amper	A
temperatura bezwzględna	kelwin	K
światłość	kandela	cd
ilość materii	mol	

Jednostki pod i wielokrotne

Układ jednostek SI: m, kg, s, mol

femto- 10^{-15}

micro- 10^{-6}

kilo- 10^3

pico- 10^{-12}

mili- 10^{-3}

mega- 10^6

nano- 10^{-9}

centi- 10^{-2}

giga- 10^9

Pomiar podstawowych wielkości mechaniki



Pomiar długości

Pomiar przy pomocy części ciała: łokieć, stopa



$$1m = \frac{\text{Biegun} - \text{Paryż} - \text{Równik}}{10,000,000}$$

1m jest długością, jaką światło pokonuje w $1/299\,792\,458$ części sekundy

Jednostki

Jednostka długości - metr, jest to długość równa 1650763,73 długości fali w próżni odpowiadającej pomarańczowej linii w widmie promieniowania kryptonu ^{86}Kr (przejście pomiędzy poziomami $2p_{10}$ i $5d_2$). W SI jeden metr jest też zdefiniowany jako odległość jaką przebywa światło w próżni w czasie $1/299,792,458$ sekundy

Jednostka masy - kilogram, do 2019 roku była to masa wzorca wykonanego ze stopu platyny i irydu (stop bardzo twardy i odporny na korozję) i przechowywanego w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag w Sèvres koło Paryża (w przybliżeniu masa jednego litra czystej wody w temperaturze 4°C). Od 2019 kilogram jest zdefiniowany przez wartość stałej Plancka, która wynosi $6,626\,070\,15 \times 10^{-34}$ Js

Jednostka czasu - sekunda, jest to przedział czasu równy 9 192 631 770 okresom promieniowania emitowanego przy przejściu pomiędzy dwoma nadsubtelnymi poziomami stanu podstawowego atomu cezu ^{133}Cs .

Jednostki

Inne jednostki:

Odległość do gwiazd wyraża się często w latach świetlnych.

Wykorzystujemy tu związek: $s = v \cdot t$

Inny przykład to wyrażanie masy w jednostkach energii wykorzystując słynny wzór Einsteina $E = m \cdot c^2$

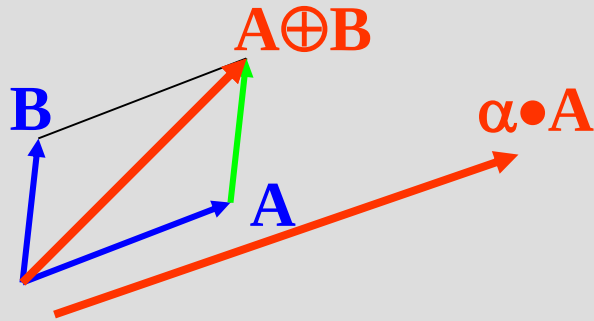
Masę cząstek elementarnych wyrażamy zazwyczaj w megaelektronowoltach (MeV). Znając wartość prędkości światła i masę w megaelektronowoltach, nietrudno jednak wyrazić ją także w kilogramach. Będzie to oczywiście wartość bardzo mała.

Wektory

- Do pełnego scharakteryzowania skalaru wystarczy jedna liczba. Jednak większość wielkości fizycznych wymaga podania większej ilości liczb. Takie wielkości nazywamy wektorowymi (jeśli wystarczą 3 liczby) lub tensorowymi
- Przykłady wektorów: Siła, prędkość, przyspieszenie, pęd, moment pędu
- Przykłady tensorów: Moment bezwładności, przenikalność elektryczna

WEKTORY

1- geometrycznie:
element zorientowany



2- algebraicznie:
zbiór liczb $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{A} = [A_1, A_2, A_3]$$

$$\mathbf{B} = [B_1, B_2, B_3]$$

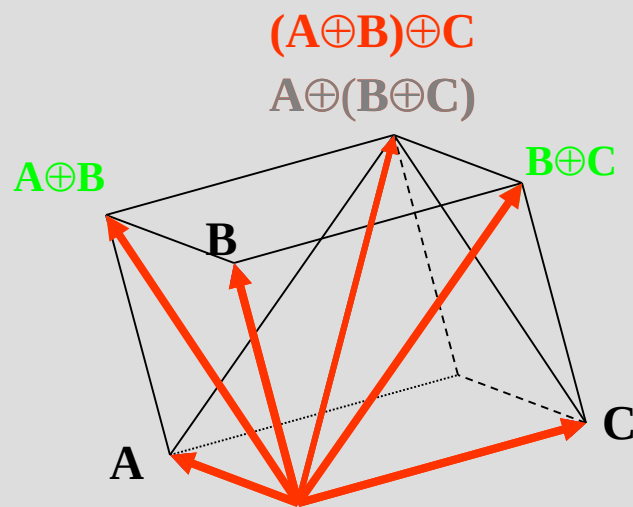
$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = [A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3]$$

$$\alpha \bullet \mathbf{A} = [\alpha A_1, \alpha A_2, \alpha A_3]$$



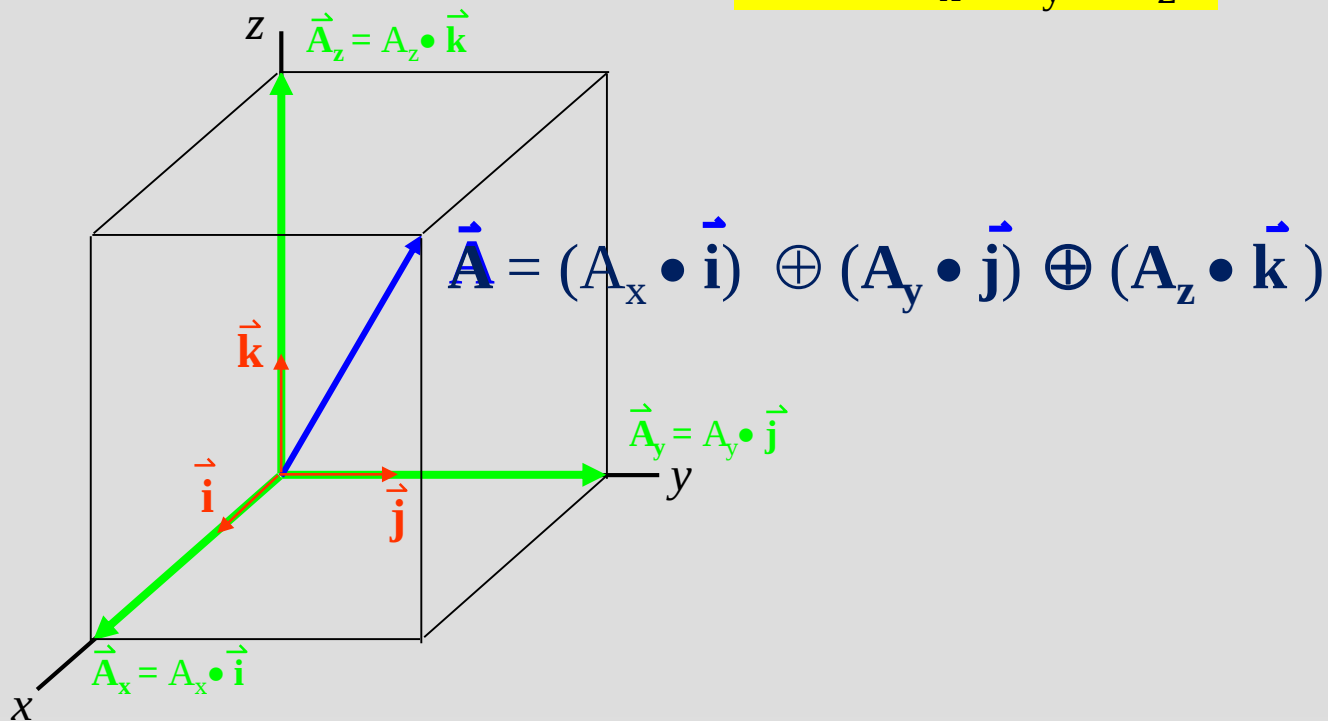
Prawo łączności dodawania

jeśli $a, b, c \in V$ to $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$



Element zorientowany $\leftrightarrow$ trójce liczb (Układ Kartezjański)

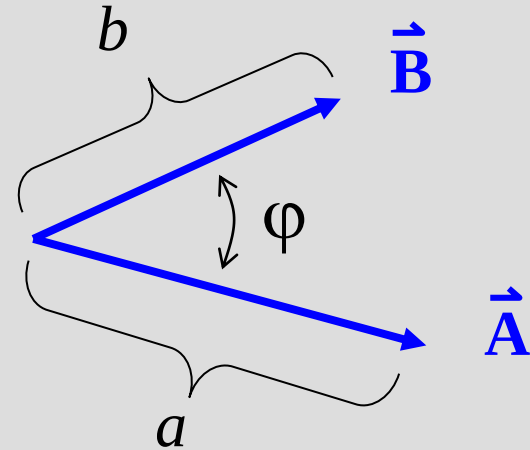
$$\bar{\mathbf{A}} = [A_x, A_y, A_z]$$



Iloczyn skalarny - geometrycznie

$$\vec{A} \circ \vec{B} = ab \cos \varphi$$

gdzie a i b są długościami wektorów a φ jest kątem między nimi



Np:

iloczyn skalarny dwóch wektorów prostopadłych;

$$\vec{A} \circ \vec{B} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0$$

Kąt między wektorami

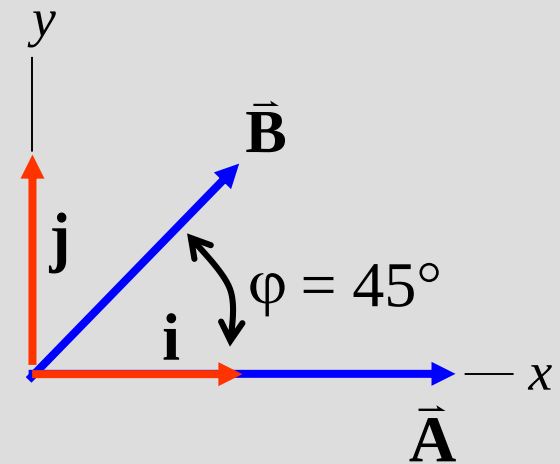
Kąt między dwoma wektorami jest zdefiniowany przez iloczyn skalarny

$$\varphi = \cos^{-1} \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

np:

Znajdź kąt między $[2,0]$ and $[1,1]$.

$$\varphi = \cos^{-1} \frac{2 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = 45^\circ$$



$$\vec{A} = [2,0]$$

$$\vec{B} = [1,1]$$

Iloczyn skalarny w układzie współrzędnych

$$\overline{\mathbf{A}} = [a_1, a_2, \dots] \quad \overline{\mathbf{A}} \circ \overline{\mathbf{B}} = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad \overline{\mathbf{B}} = [b_1, b_2, \dots]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \circ \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \circ (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) = \\ &= a_1 b_1 \cos 0^\circ + a_1 b_2 \cos 90^\circ + a_1 b_3 \cos 90^\circ + \\ &+ a_2 b_1 \cos 90^\circ + a_2 b_2 \cos 0^\circ + a_2 b_3 \cos 90^\circ + \\ &+ a_3 b_1 \cos 90^\circ + a_3 b_2 \cos 90^\circ + a_3 b_3 \cos 0^\circ = \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \mathbf{a} \circ \mathbf{b} \end{aligned}$$

np: $[1, -1, 2] \circ [2, 3, 0] = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 0 = -1$

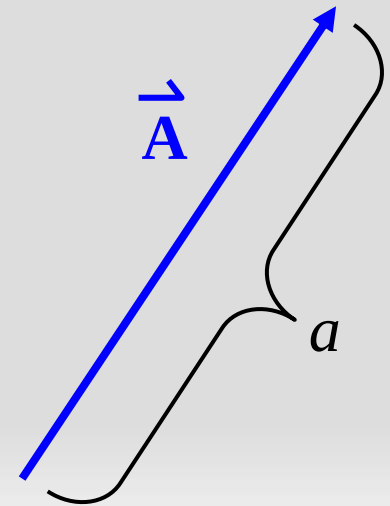
Długość wektora=moduł=wartość bezwzględna

Jest to liczba zdefiniowana przez iloczyn
skalarny:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2}$$

np: geometrycznie

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{\vec{A}^2} = \sqrt{a^2 \cdot \cos 0^\circ} = a$$



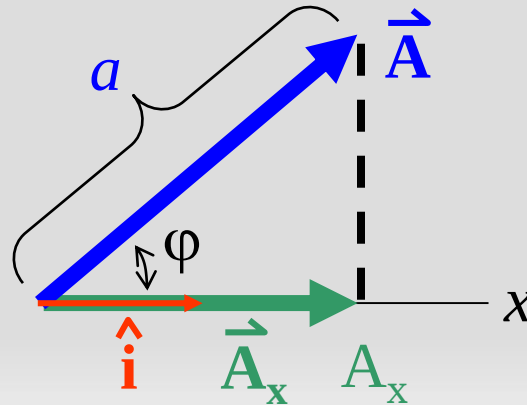
Rzut wektora

Dla dowolnego wektora $\vec{A}$ i wektora jednostk. $\mathbf{e}_i$, wektor

$$\vec{A}_i = (\vec{A} \circ \mathbf{e}_i) \bullet \mathbf{e}_i$$

Jest zwany rzutem wektora $\vec{A}$ na kierunek wektora $\mathbf{e}_i$

np

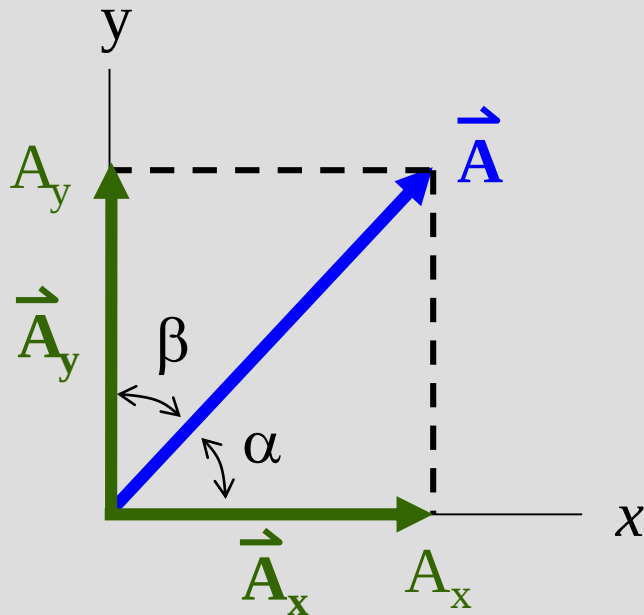


$$A_x = (a \cos \varphi)$$

$$\vec{A}_x = (a \cdot 1 \cdot \cos \varphi) \bullet \hat{i}$$

Składowe

Np.: przestrzeń 2D



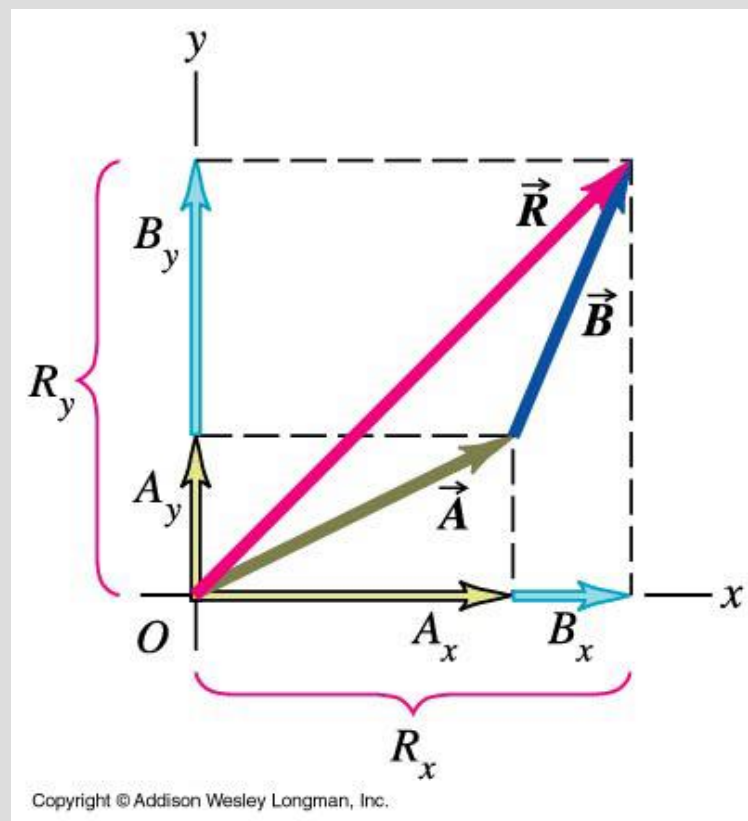
$$\begin{aligned} A_x &= \mathbf{A} \circ \hat{\mathbf{i}} = \\ &= A \cdot 1 \cdot \cos \alpha \\ &= A \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\vec{A}_x = A \cos \alpha \bullet \hat{\mathbf{i}}$$

$$A_y = A \cos \beta = A \sin \alpha$$

$$\vec{A}_y = A \sin \alpha \bullet \hat{\mathbf{j}}$$

Dodawanie wektorów

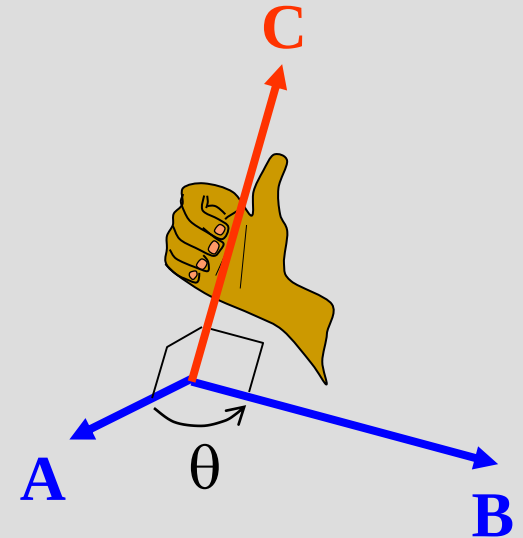


Iloczyn wektorowy

Iloczynem wektorowym $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ jest wektor $\mathbf{C}$,
którego moduł jest równy

$$C = AB\sin\theta$$

i który jest prostopadły do płaszczyzny na której
leżą $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$. Zwrot wektora $\mathbf{C}$ określa reguła
prawej dłoni (śruby prawoskrętnej)



Iloczyn wektorowy w układzie współrzędnych

Można go obliczyć metodą wyznacznika:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

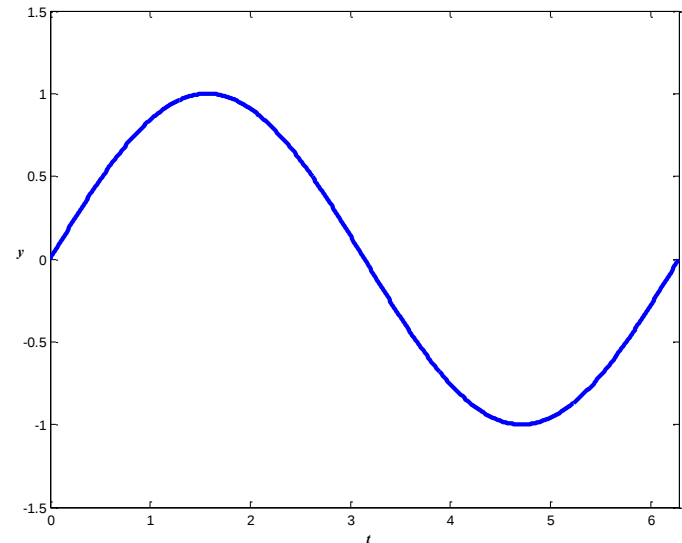
$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = & \mathbf{i}[a_2b_3 - a_3b_2] \\ & + \mathbf{j}[a_3b_1 - a_1b_3] + \mathbf{k}[a_1b_2 - a_2b_1] \end{aligned}$$

Rachunek różniczkowy i całkowy w fizyce

•Funkcja jednej zmiennej

Zmienna zależna $y = \sin(t)$ Zmienna niezależna

- Wykres $y=f(t)$
- jest krzywą płaską



Pojęcie pochodnej

Gdy ciało porusza się po linii prostej, współrzędna jego położenia x zmienia się wraz z upływem czasu t .



x X

Przypuśćmy, że w pewnym przedziale czasu Δt położenie zmieniło się o Δx . Powiemy, że w przedziale czasu Δt ciało miało prędkość średnią:

$$v_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Pojęcie pochodnej

Jednak w czasie Δt ciało mogło zwalniać i przyspieszać. Można zatem zadać pytanie: jaka była **prędkość chwilowa** na początku omawianego przedziału czasu?

Aby uzyskać odpowiedź na tak postawione pytanie, należałoby zmierzyć zmianę położenia ciała w krótszym przedziale czasu.



x



x



x

x

Interesuje nas więc granica

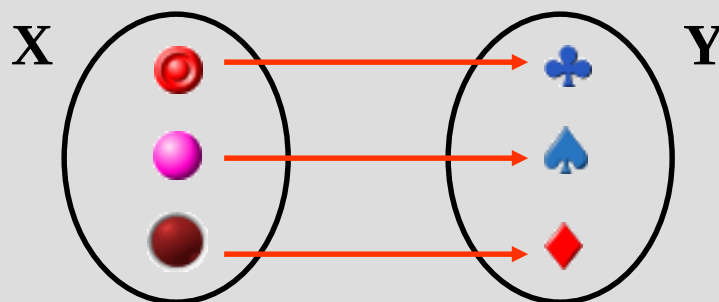
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

zwana **pochodną położenia x względem czasu t.**



Definicja pochodnej

Przypuśćmy, że określona jest funkcja $y(x)$, która przyporządkowuje wielkości x (zmiennej niezależnej) pewną inną wielkość y (zmienną zależną).



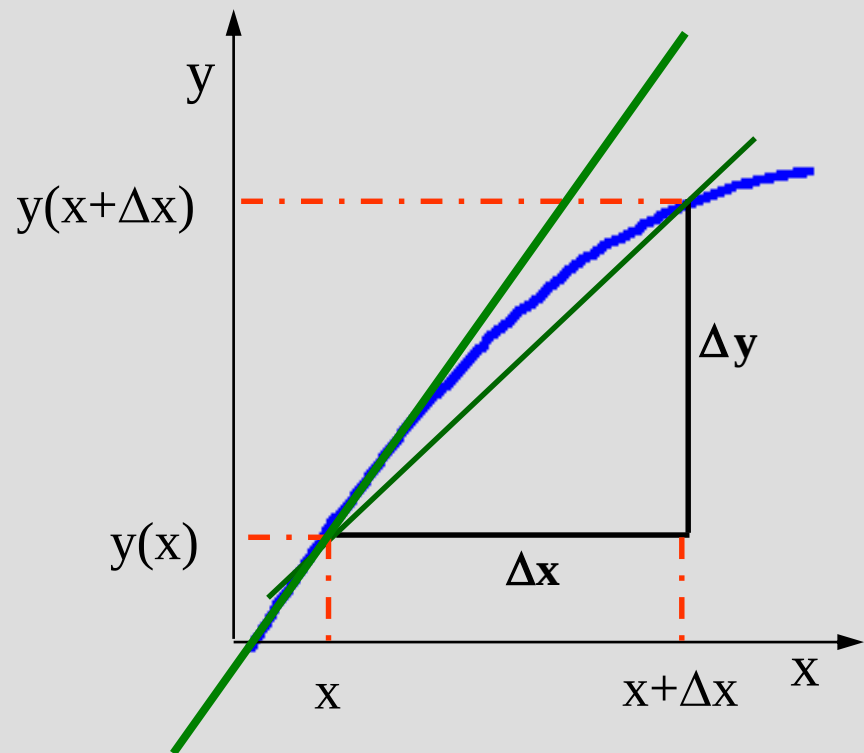
Pochodną funkcji $y(x)$ w punkcie x_0 nazywamy granicę „ilorazu różnicowego”:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

Interpretacja geometryczna

Wartość ilorazu różnicowego $\Delta y / \Delta x$ jest tangensem kąta, określającego **nachylenie siecznej**, czyli linii, która przecina krzywą w punktach $(x, y(x))$ i $(x + \Delta x, y(x + \Delta x))$.

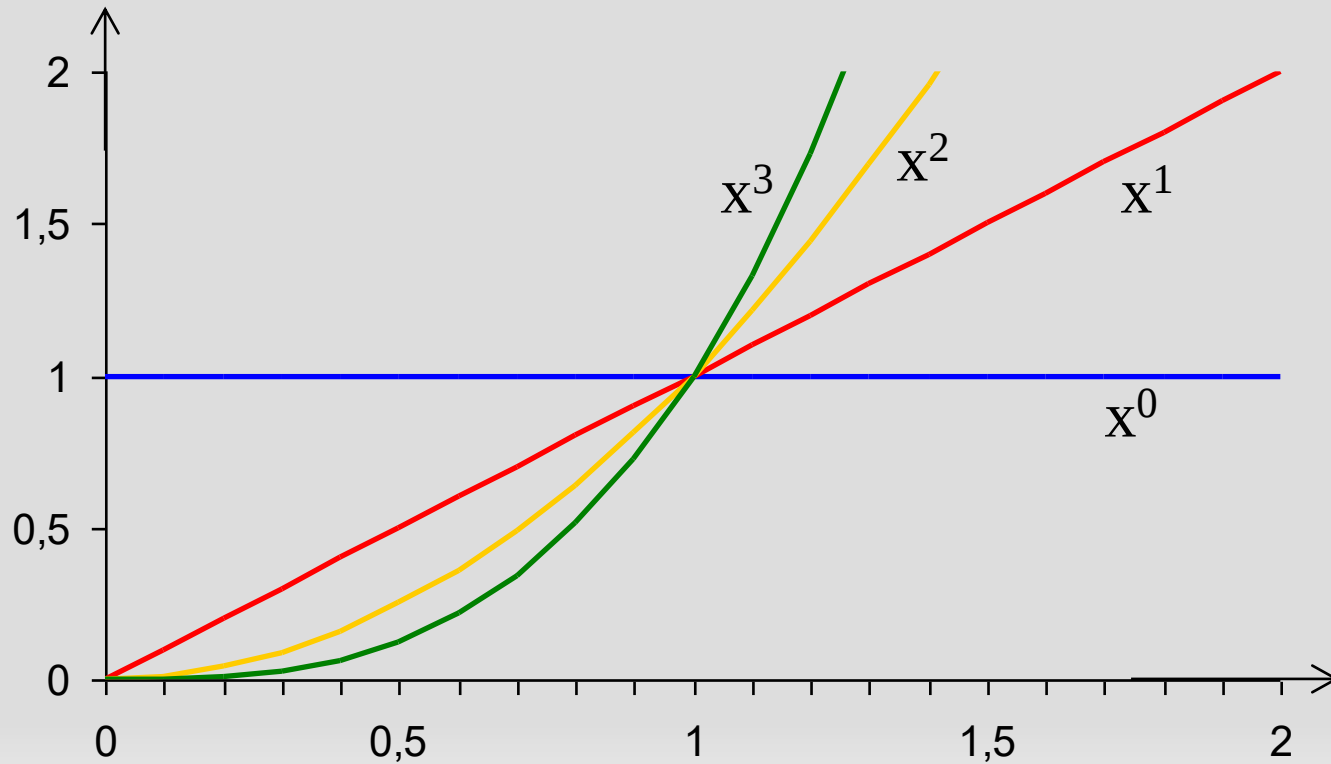
Kiedy $\Delta x \rightarrow 0$, sieczna dąży do stycznej do krzywej w punkcie $(x, y(x))$.



Pochodna równa jest tangensowi kąta nachylenia stycznej do osi OX.

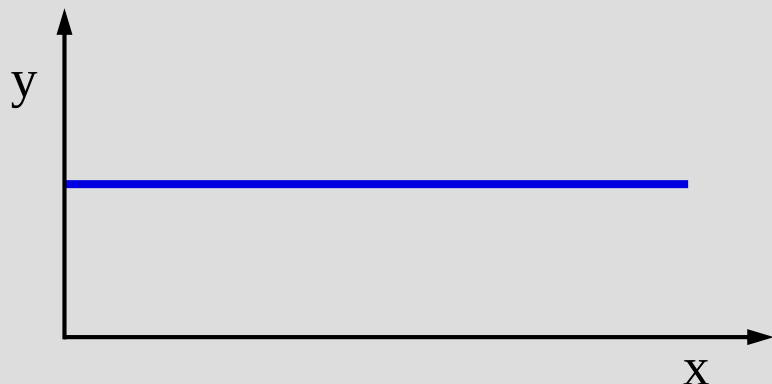
Funkcje potęgowe

Funkcje potęgowe mają postać $y(x) = x^n$.



Pochodne funkcji potęgowych

Funkcja stała $y(x) = c$

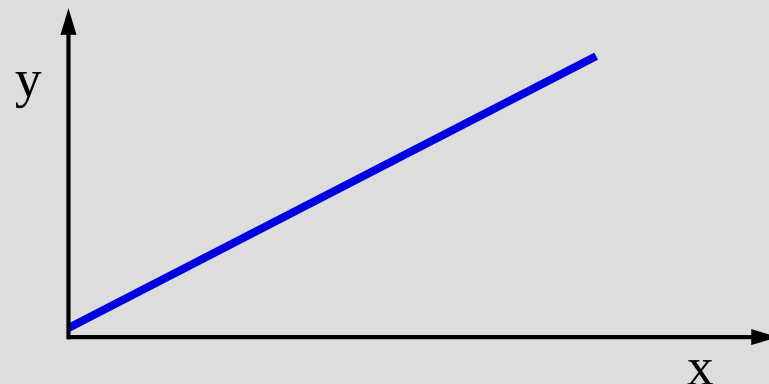


Licznik ilorazu różnicowego
jest równy:

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = c - c = 0$$

Pochodna funkcji stałej
jest równa zero.

Funkcja liniowa $y(x) = a \cdot x$



Iloraz różnicowy wynosi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a$$

Pochodna funkcji liniowej
jest stała i wynosi a.

Pochodne funkcji potęgowych

Funkcja kwadratowa $y=a \cdot x^2$

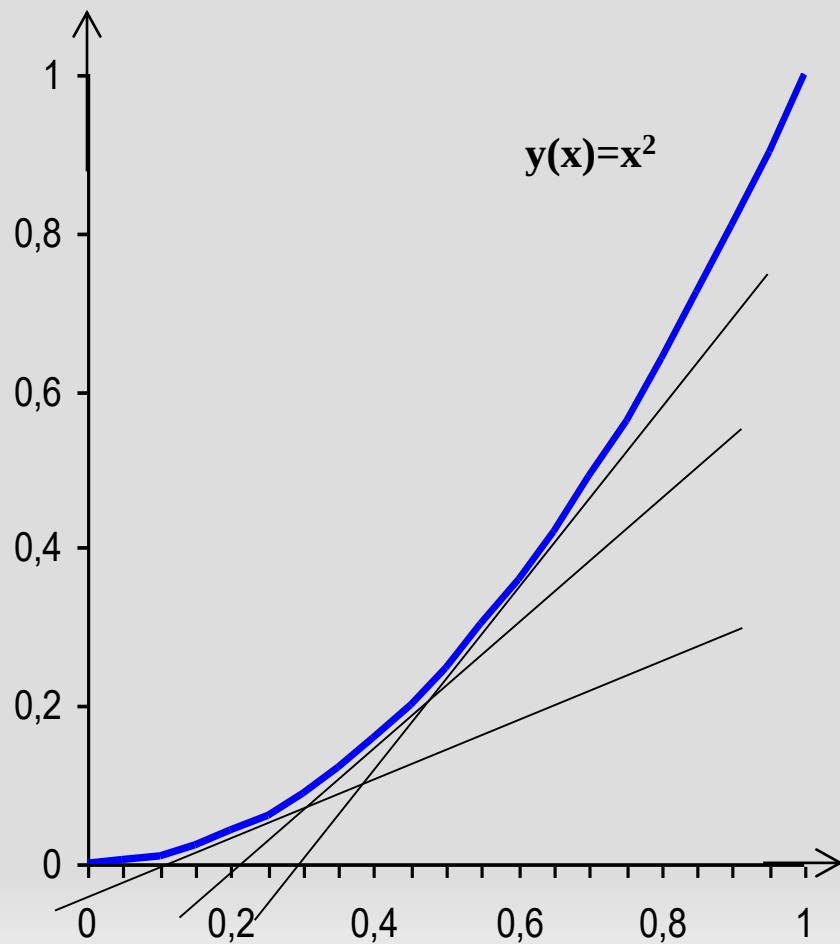
Iloraz różnicowy wynosi:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \\ &= \frac{a(x + \Delta x)^2 - a(x)^2}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x\end{aligned}$$

Pochodna jest granicą tego ilorazu dla $\Delta x \rightarrow 0$ i wynosi

$$y'(x) = 2ax$$

Kąt nachylenia stycznej do wykresu funkcji rośnie wraz ze wzrostem x .

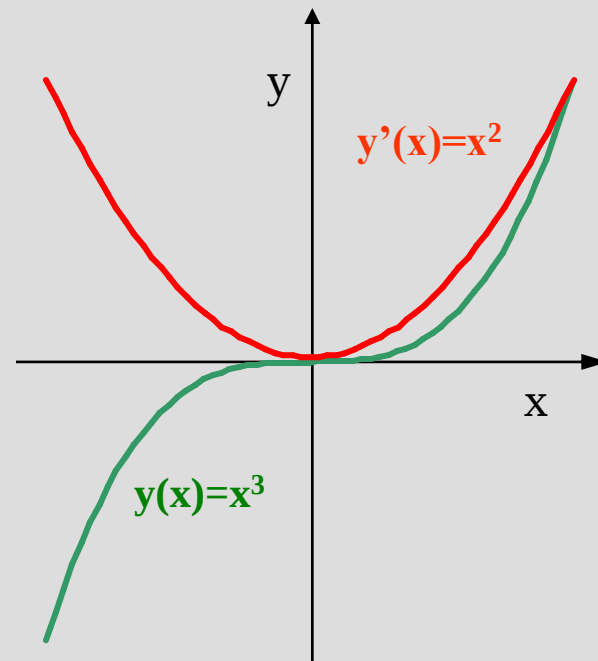


Pochodne funkcji potęgowych

Funkcja trzeciego stopnia $y(x) = a \cdot x^3$

Iloraz różnicowy jest równy:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{a(x + \Delta x)^3 - ax^3}{\Delta x} = \\ &= \frac{3ax^2\Delta x + 3ax\Delta x^2 + a\Delta x^3}{\Delta x} \\ &= 3ax^2 + 3ax\Delta x + a\Delta x^2\end{aligned}$$



Pochodna , czyli granica tego ilorazu dla Δx dążącego do zera, wynosi $y'(x)=3ax^2$

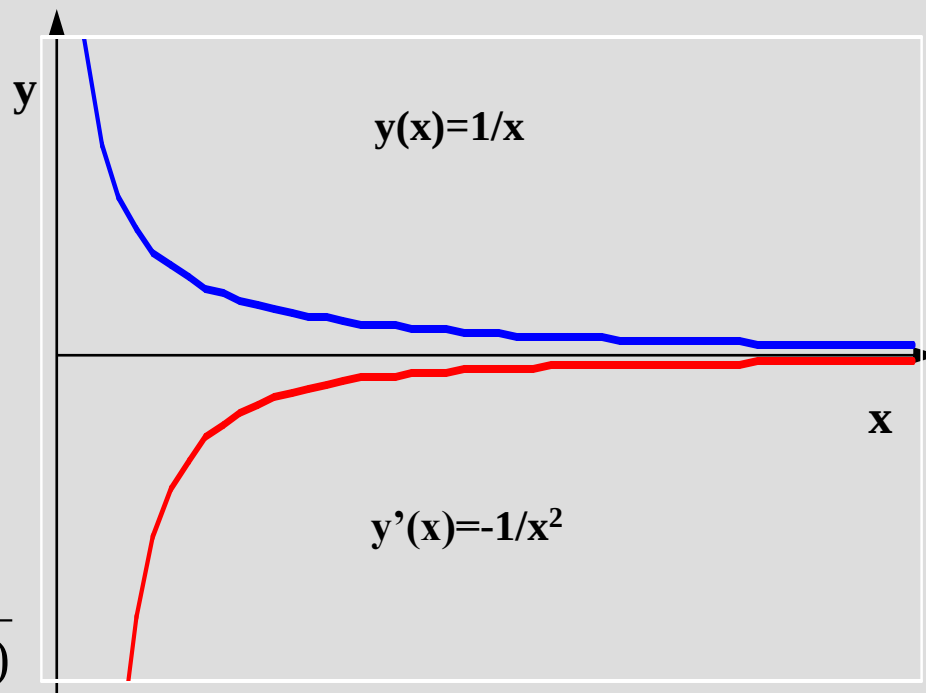
Pochodne funkcji potęgowych

Funkcja stopnia -1

$$y(x) = x^{-1}$$

Iloraz różnicowy wynosi:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \\ &= \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}}{\Delta x} = \frac{-1}{x(x + \Delta x)}\end{aligned}$$



Pochodna jest granicą tego ilorazu dla Δx dążącego do zera i wynosi $y'(x) = (-1) \cdot x^{-2}$

Funkcja jest malejąca, więc jej pochodna jest ujemna.

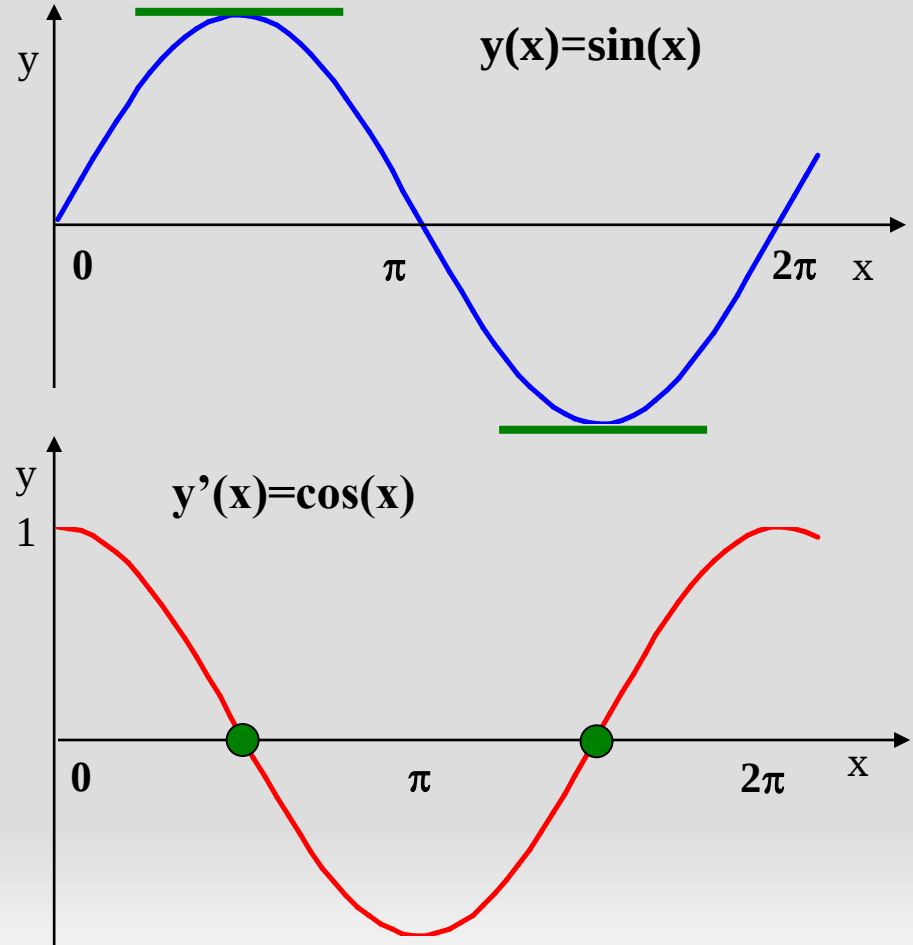
Pochodna funkcji sinus

Funkcja $y(x) = \sin(x)$

Iloraz różnicowy wynosi:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = \\ &= \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\ &= \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\end{aligned}$$

Czyli $\sin'(x) = \cos(x)$



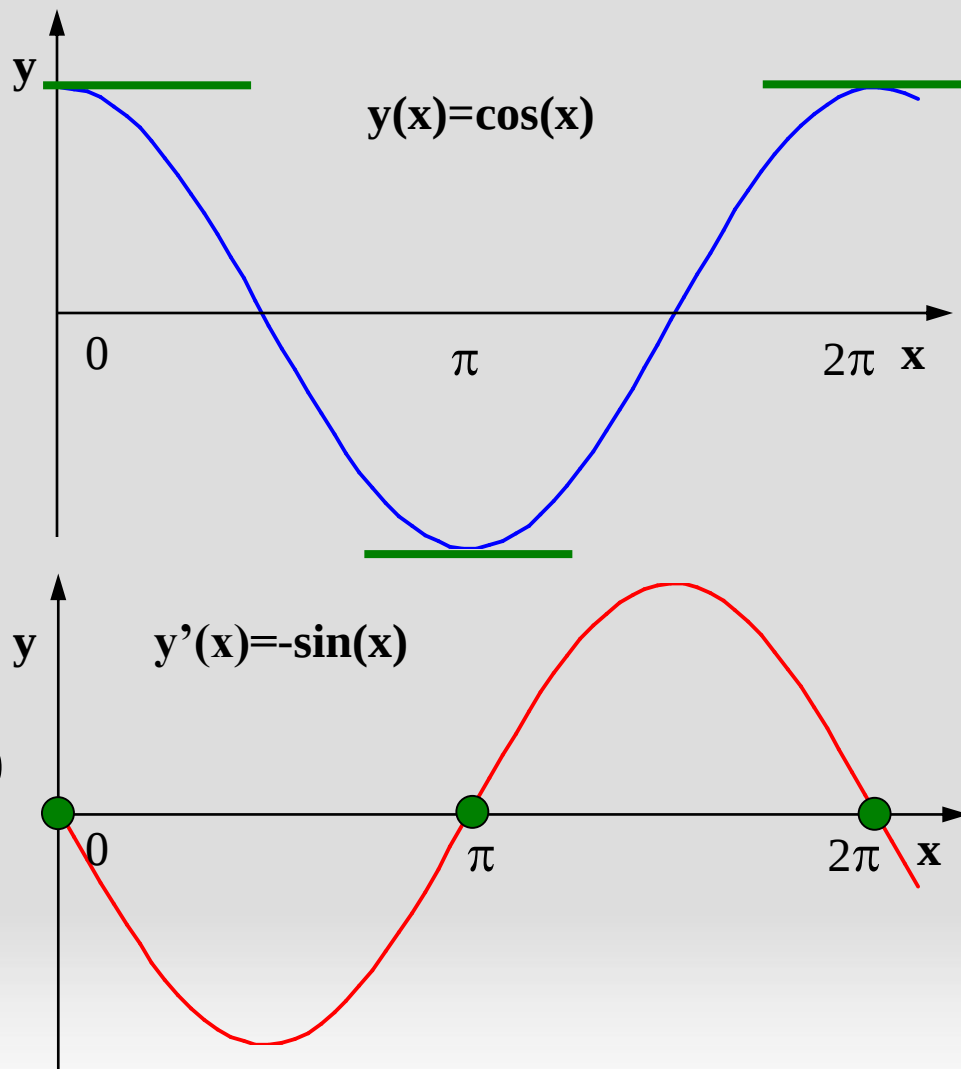
Pochodna funkcji cosinus

Funkcja $y(x) = \cos(x)$

Iloraz różnicowy wynosi:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos(x)}{\Delta x} = \\ &= \frac{-2 \sin(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin(\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \\ &= \frac{-2 \sin(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\sin(x + \frac{\Delta x}{2})\end{aligned}$$

Pochodną funkcji cosinus
jest -sinus



Pochodna funkcji wykładniczej

Funkcja $y(x) = a^x$

Licznik ilorazu różnicowego:

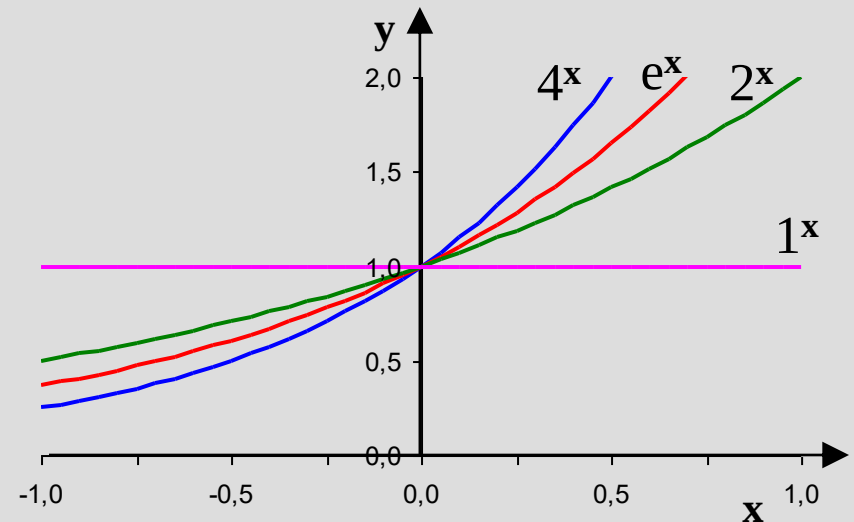
$$\begin{aligned}\Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = a^{x+\Delta x} - a^x = \\ &= a^x a^{\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1)\end{aligned}$$

Iloraz różnicowy ma postać:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = a^x \left(\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right)$$

Można więc napisać:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C(a) \cdot a^x, \quad \text{gdzie} \quad C(a) = \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$



Pochodna a^x jest więc do samej funkcji proporcjonalna.

Ułamek od x nie zależy, nie zależy więc od x i jego granica dla $\Delta x \rightarrow 0$.

Pochodna funkcji wykładniczej

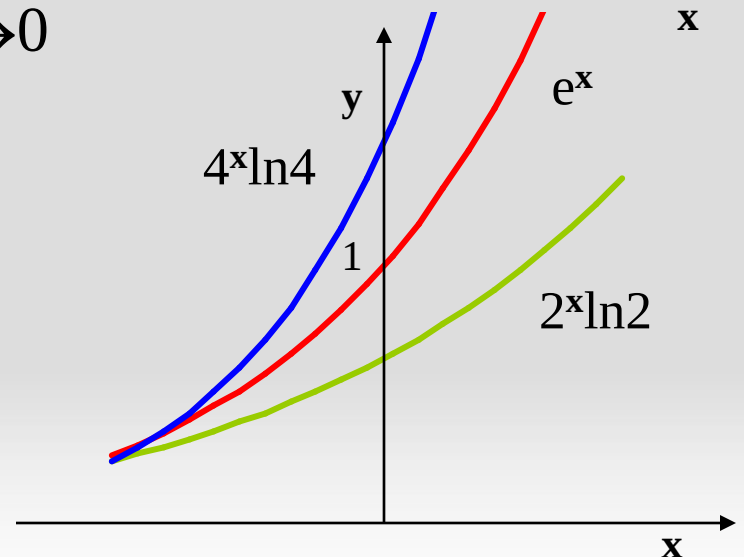
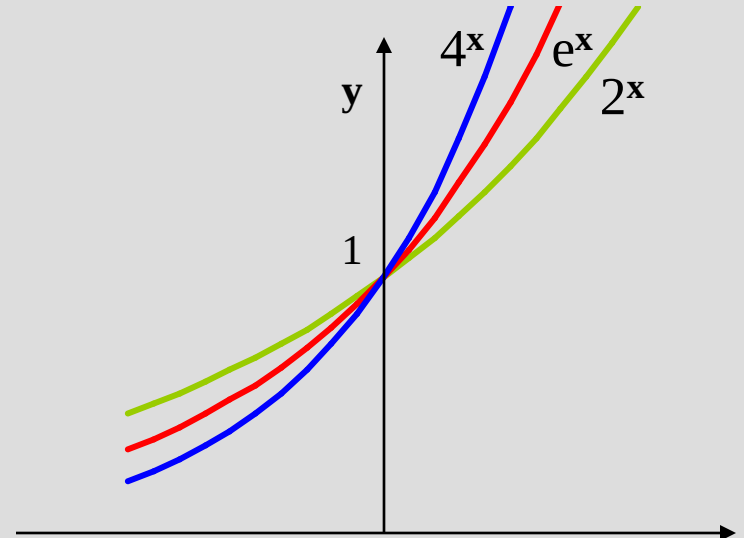
Funkcja $y(x) = a^x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C(a) \cdot a^x, \quad \text{gdzie} \quad C(a) = \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} C(a)$$

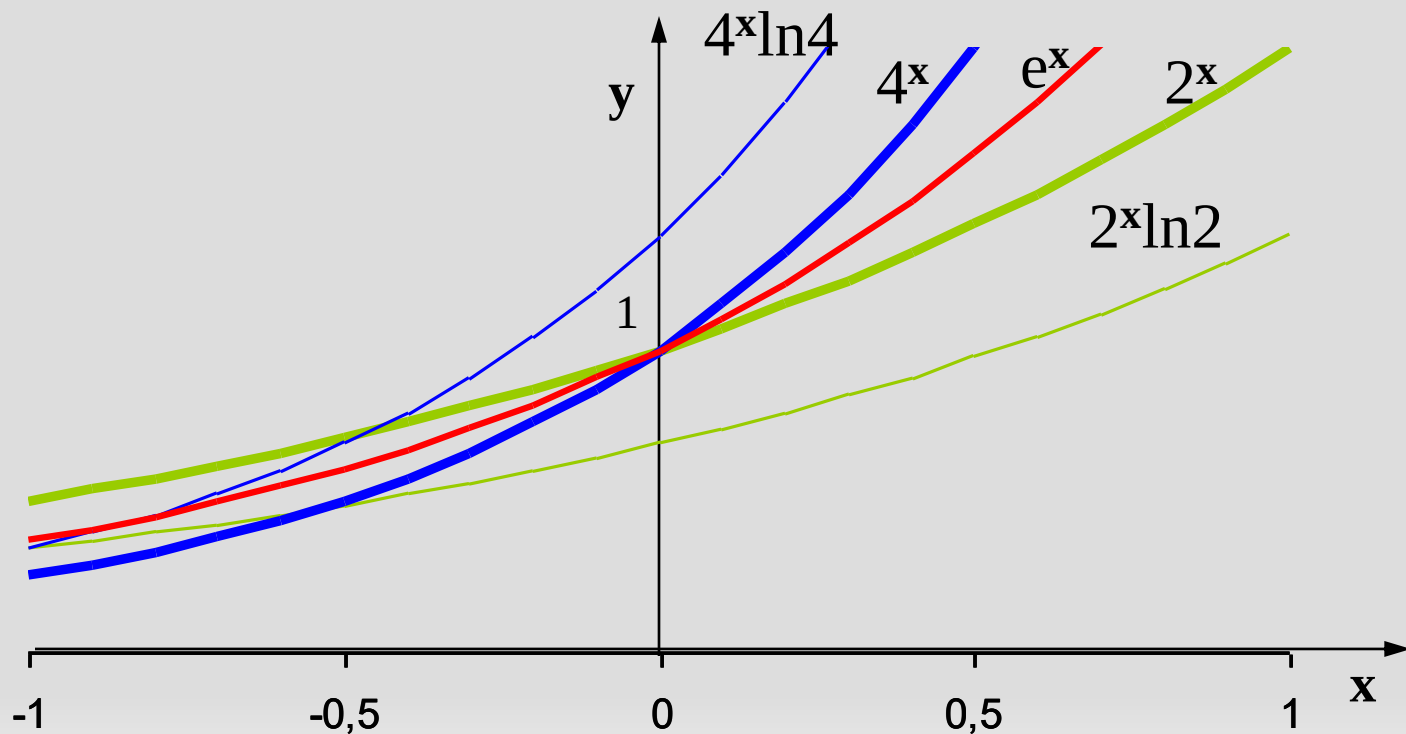
Po obliczeniu granicy ułamka dla $\Delta x \rightarrow 0$ otrzymamy wzór pochodnej:

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$



Pochodna funkcji wykładniczej

Pochodna funkcji wykładniczej jest proporcjonalna do samej funkcji.



Pochodna funkcji $y(x)=a \cdot f(x)$

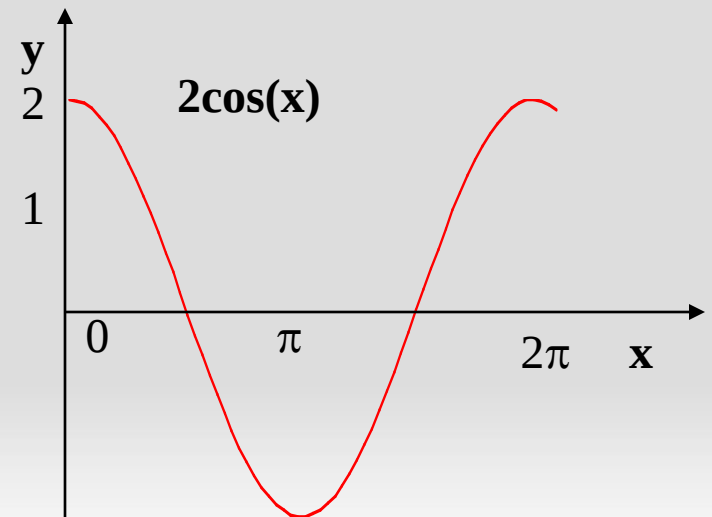
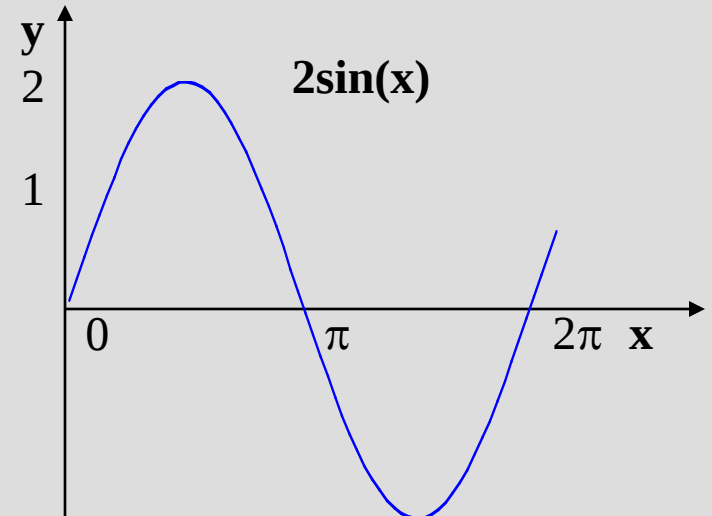
Pochodna funkcji pomnożonej przez stałą $y(x) = a \cdot f(x)$

Iloraz różnicowy ma postać:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \\ &= \frac{a \cdot f(x + \Delta x) - a \cdot f(x)}{\Delta x} = \\ &= \frac{a \cdot [f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} =\end{aligned}$$

Jeśli obliczymy granicę tego ilorazu, otrzymamy wzór:

$$y'(x) = a \cdot f'(x)$$



Pochodna sumy funkcji

Pochodna sumy funkcji $y(x) = f(x) + g(x)$

Licznik ilorazu różnicowego jest równy:

$$\begin{aligned}\Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = \\ &= (f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)) - (f(x) + g(x)) = \\ &= (f(x + \Delta x) - f(x)) + (g(x + \Delta x) - g(x))\end{aligned}$$



Cały iloraz różnicowy ma więc postać sumy dwóch ilorazów różnicowych:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

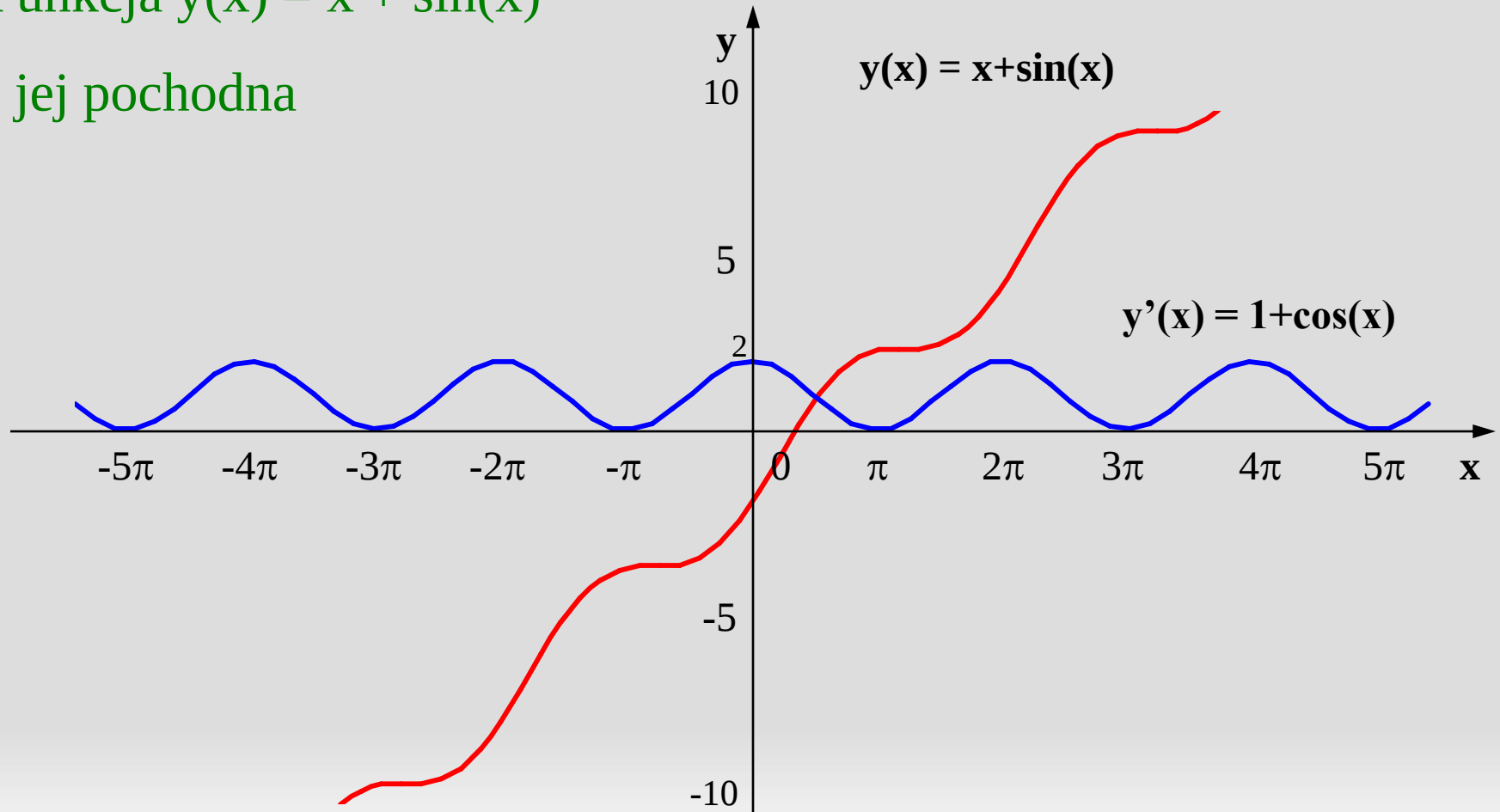
Pochodna sumy funkcji jest równa sumie ich pochodnych:

$$y'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Pochodna sumy funkcji

Funkcja $y(x) = x + \sin(x)$

i jej pochodna



Pochodna iloczynu funkcji

Pochodna iloczynu funkcji $y(x) = f(x) \cdot g(x)$



Licznik ilorazu różnicowego jest równy:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x) = \\ &= (f(x+\Delta x) - f(x)) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot (g(x+\Delta x) - g(x))\end{aligned}$$

Iloraz różnicowy ma postać:

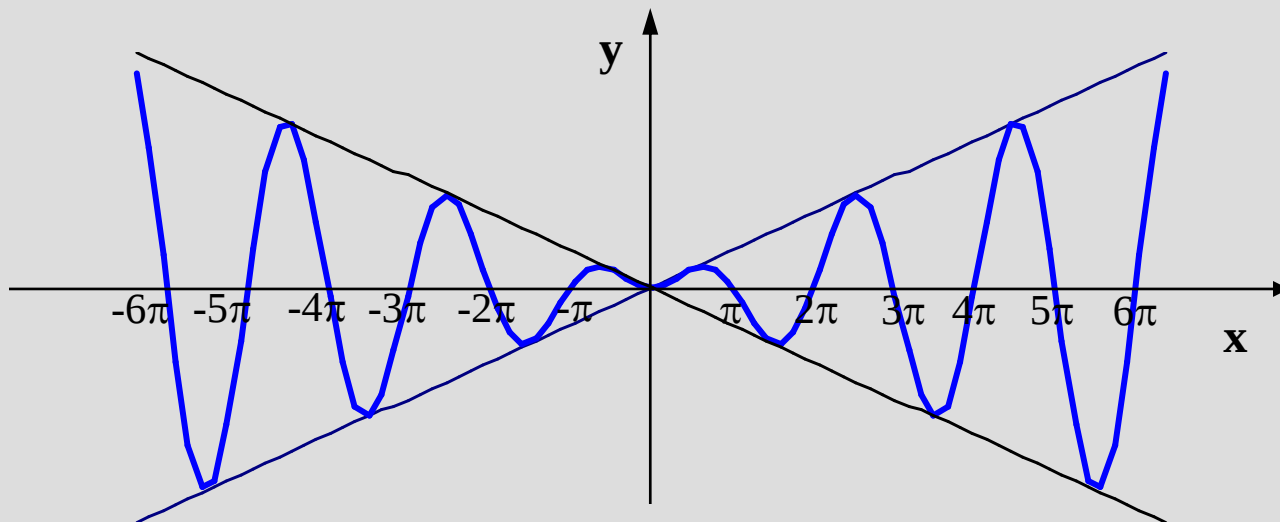
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x+\Delta x) - f(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

Dla $\Delta x \rightarrow 0$ otrzymujemy:

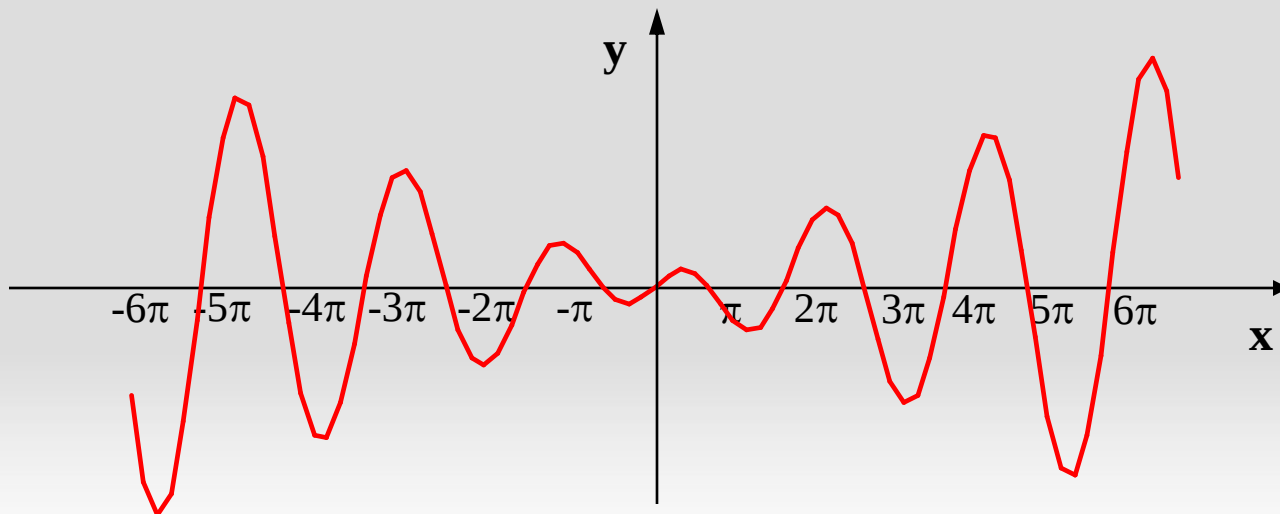
$$y'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Pochodna iloczynu funkcji-Przykład

$$y = x \cdot \sin(x)$$



$$y' = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$$



Pochodna ilorazu funkcji

Pochodna ilorazu funkcji $y(x) = f(x)/g(x)$

Iloraz różnicowy można zapisać następująco:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[(f(x + \Delta x) - f(x)) \cdot g(x) - f(x)(g(x + \Delta x) - g(x))]}{g(x + \Delta x) \cdot g(x) \cdot \Delta x}$$

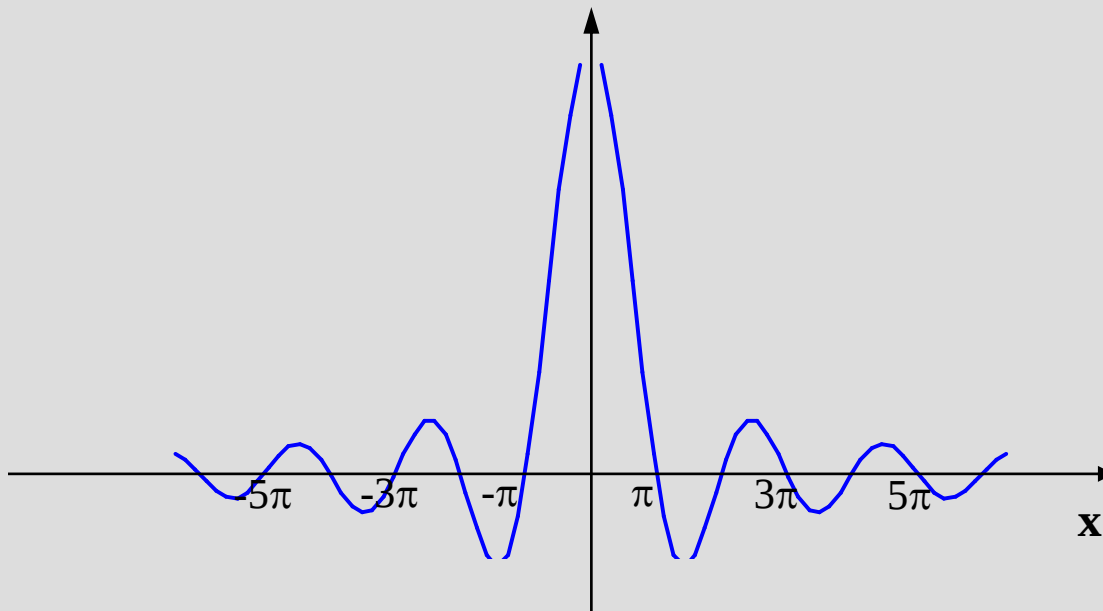
Dla $\Delta x \rightarrow 0$ mamy:

$$y'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

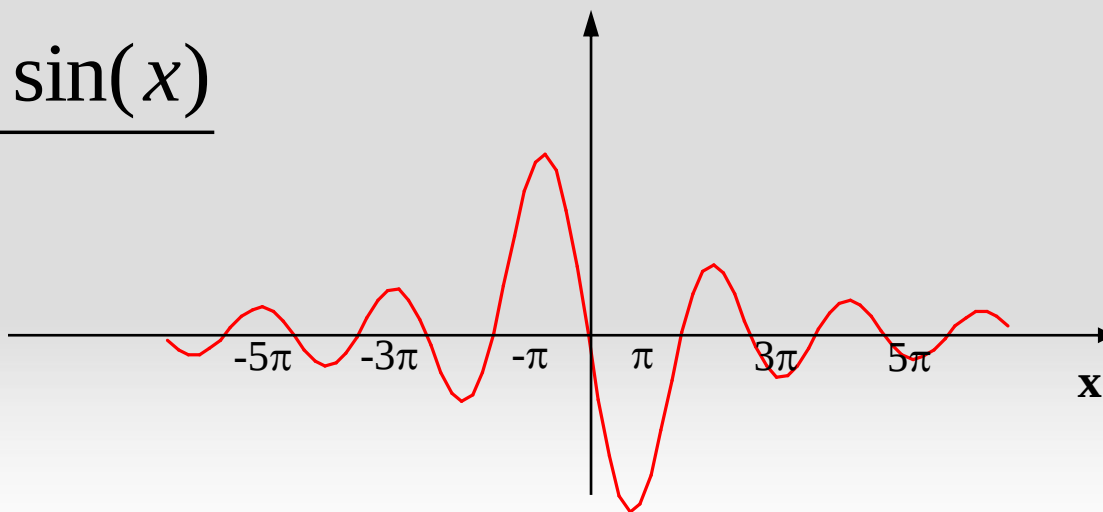
Pochodna ilorazu funkcji $f(x)$ przez $g(x)$ jest równa stosunkowi iloczynu pochodnej pierwszej funkcji przez drugą, pomniejszonemu o iloczyn pierwszej funkcji przez pochodną drugiej, do kwadratu drugiej funkcji.

Pochodna ilorazu funkcji przykład

$$y = \frac{\sin(x)}{x}$$



$$y' = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

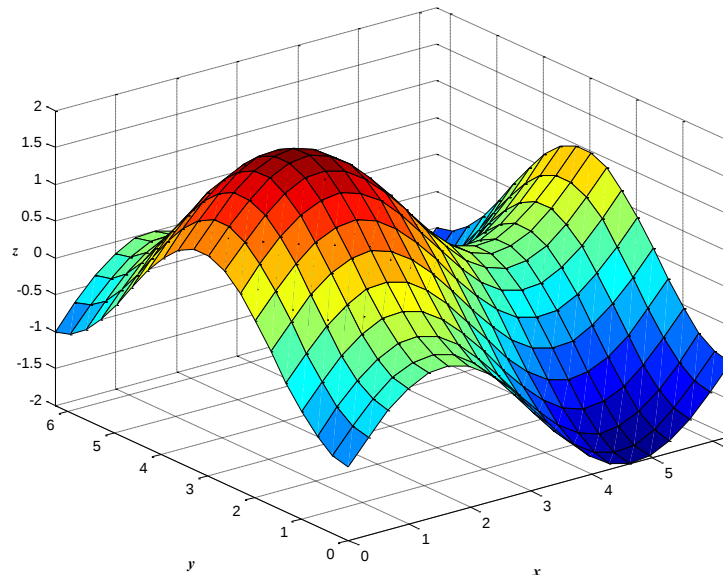


Funkcja wielu zmiennych

Zmienna zależna $z = \sin(x) - \cos(y)$ Zmienna niezależna

Zmienna niezależna

- Wykres – powierzchnia w 3D



Pochodna cząstkowa

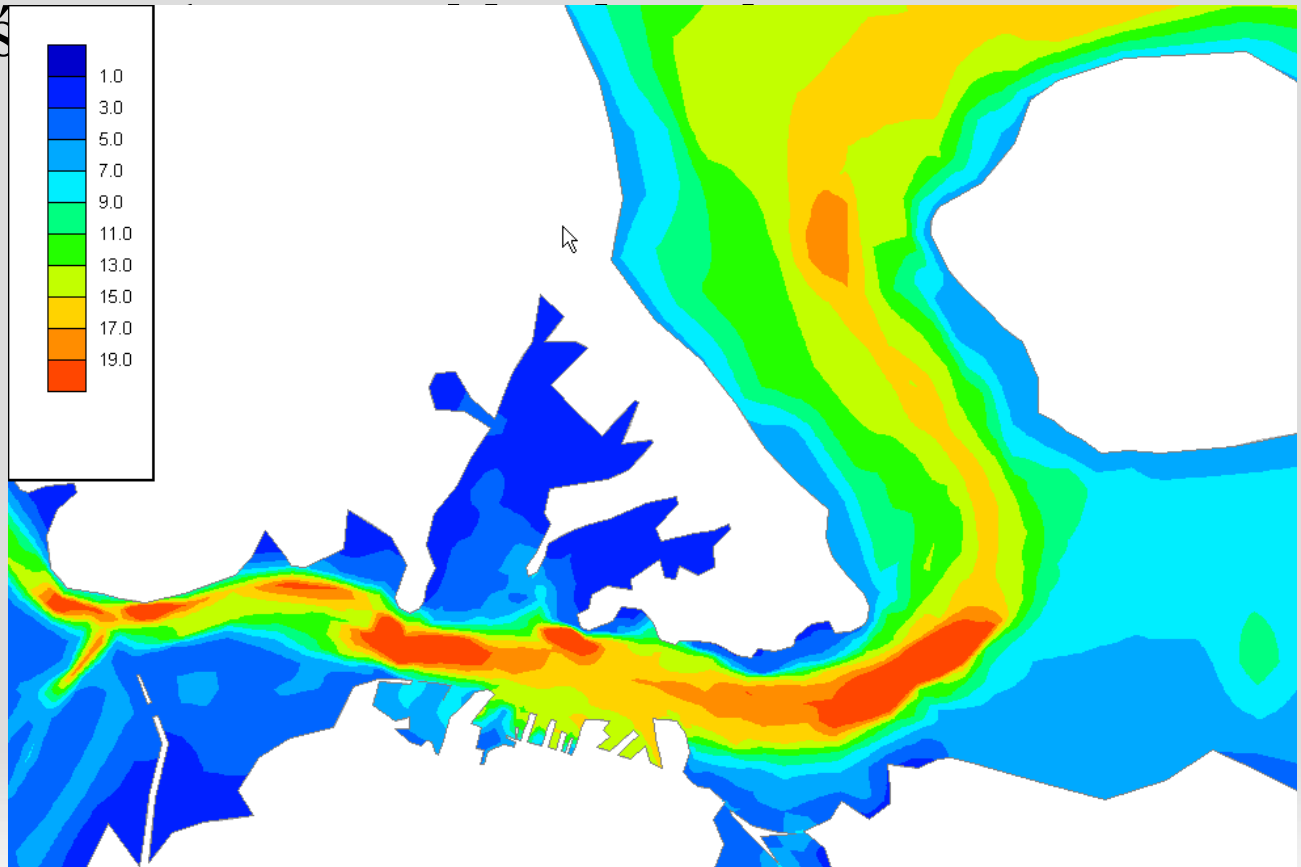
- Pochodna cząstkowa funkcji wielu zmiennych **to** *pochodna tej funkcji względem jednej ze zmiennych niezależnych*;
- Inne zmienne niezależne traktujemy jako stałe;

Pole skalarne i wektorowe

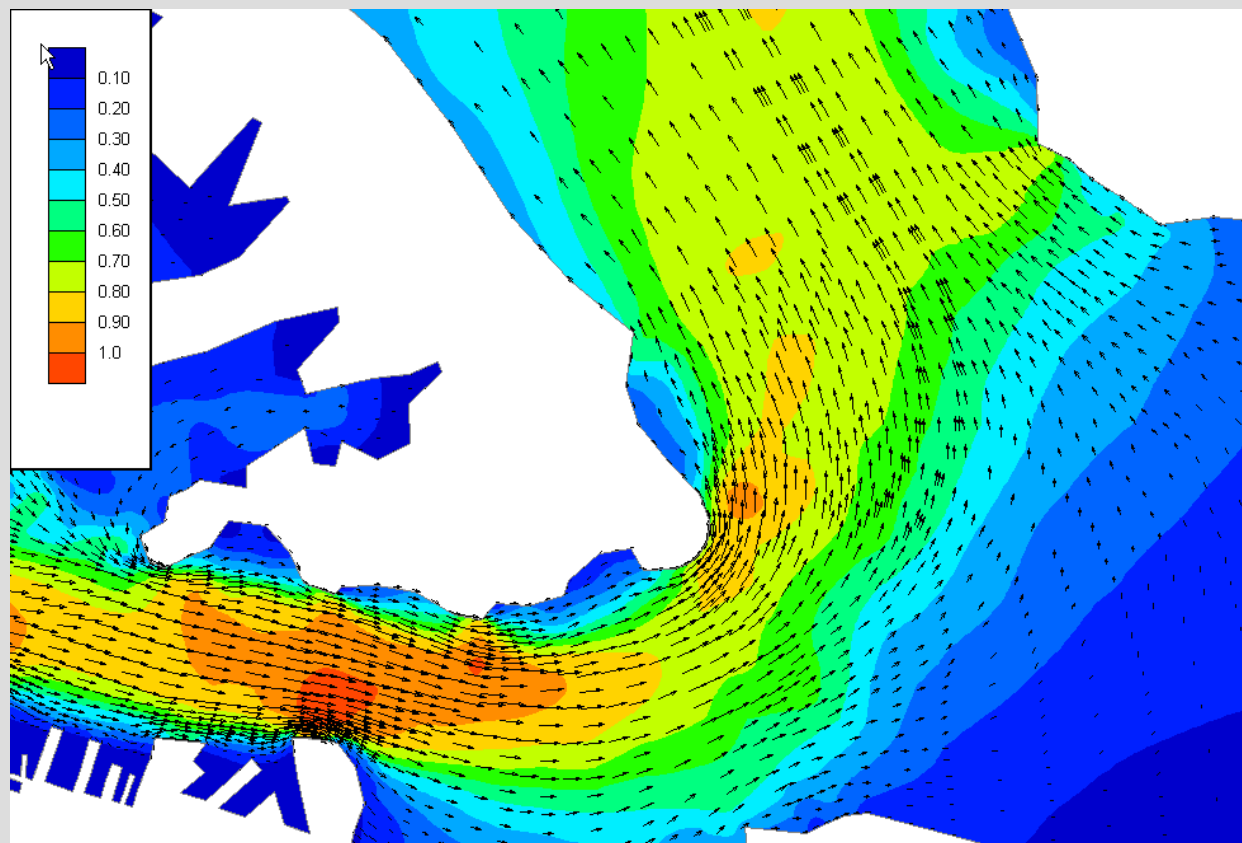
- Pole skalarne opisuje funkcja skalarna wielu zmiennych (np. ciśnienie, temperatura)
- Pole wektorowe – funkcja wektorowa wielu zmiennych (np.prąd powietrza, ciepła, pole magnetyczne).

Pole skalarne

- Głębokość



Pole wektorowe

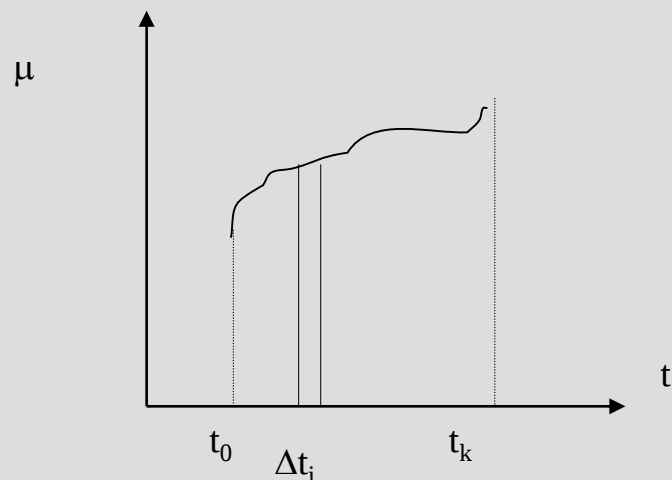


Prądy wodne w Waitemata Harbour

Całkowanie

Jeżeli znam **szybkość** zmian pewnej wielkości fizycznej, to jak znaleźć tę wielkość w dowolnej chwili czasu?

Przykład: woda wypływająca ze zbiornika z szybkością μ [kg/s]



Dzielimy przedział $t_k - t_0$ na n wąskich przedziałów Δt_i

μ_i – jest wartością funkcji np. na początku tego i -tego przedziału.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(t_i) \cdot \Delta t_i \stackrel{\uparrow}{=} \int_{t_0}^{t_k} \mu(t) \cdot dt$$

Tak oznaczamy!!!

Całkowanie

Formalnie całkowanie jest czynnością odwrotną do obliczania pochodnych czyli różniczkowania. **Wzory na całki są odwróceniem wzorów na pochodne.** Należy jednak pamiętać, że ponieważ pochodna ze stałej wynosi 0, każda całka nieoznaczona jest wyznaczona niejednoznacznie