

# Fizyka

## Kinematyka

# Kinematyka punktu materialnego

**Ruch** jest najczęściej obserwowanym zjawiskiem fizycznym wokół nas. Poruszają się zwierzęta, światło, maszyny, samochody, Ziemia, Księżyc, satelity, elektrony w przewodniku, i wiele innych ciał.

Na ruch ciała mają wpływ inne ciała znajdujące się w otoczeniu. Ażeby dokładnie opisać ruch konieczne jest uwzględnienie oddziaływania ciał z otoczeniem.

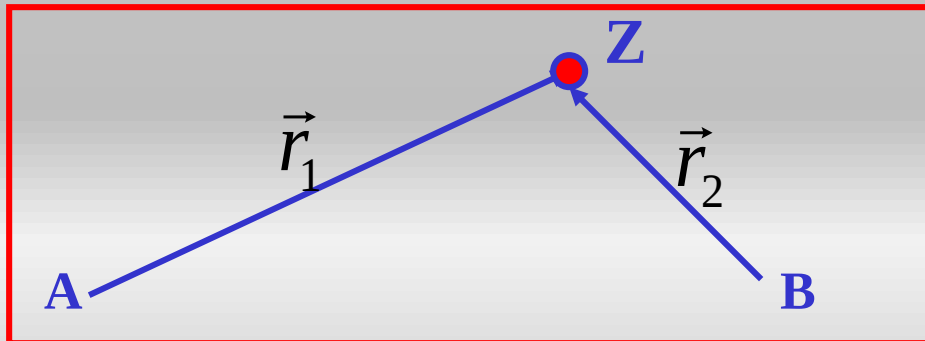
Istnieją pewne ogólne prawa i zasady stosujące się do wszelkich ruchów ciał materialnych, niezależnych od oddziaływania tego ciała z otoczeniem.

Dział mechaniki, który podaje opis przestrzenno-czasowych właściwości ruchu nazywamy **kinematyką**, przy czym zanedbujemy tutaj przyczyny powodujące ruch.

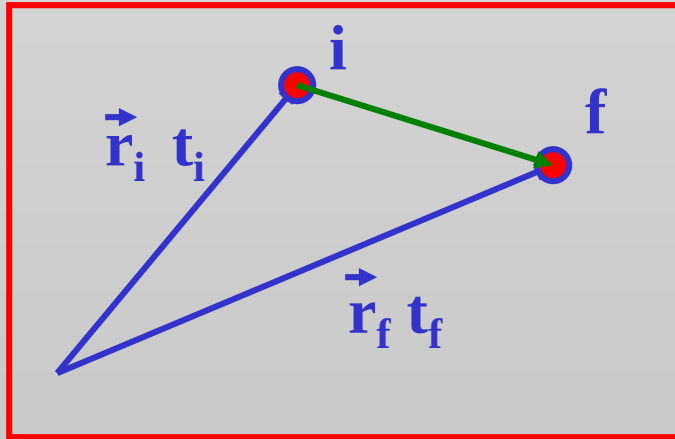
Badaniem ruchu z uwzględnieniem jego przyczyn, zajmuje się **dynamika**.

## 1.2 Układy odniesienia

Zdarzenie fizyczne w określonym miejscu definiujemy przez podanie dokładnej informacji o miejscu i czasie, w którym to nastąpiło.



Ażeby opisać dwa zdarzenia obserwator musi zarejestrować miejsce każdego z nich, oraz odpowiedni czas.



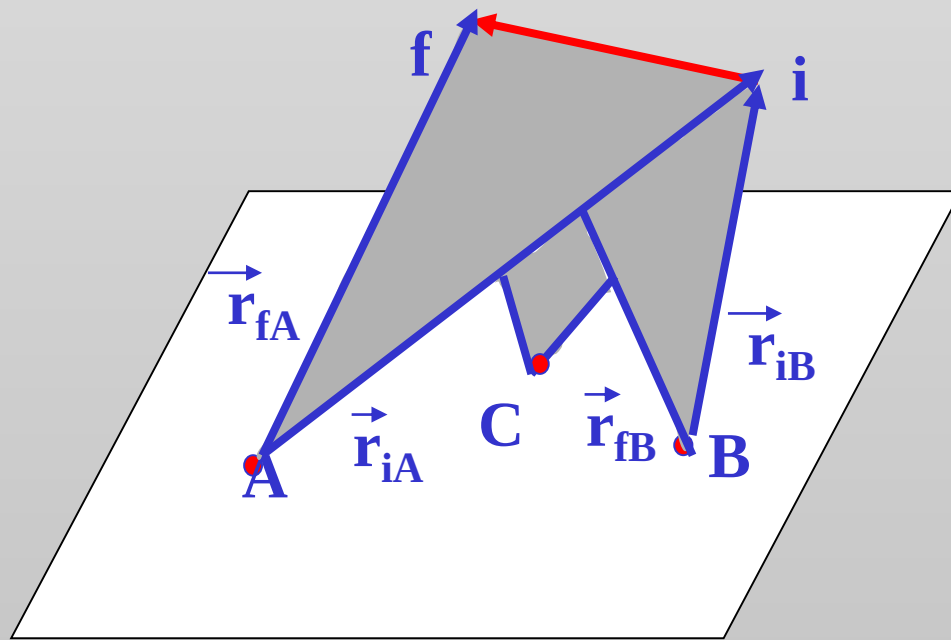
Jeśli obserwator zarejestruje miejsce zdarzeń  $i$  i  $f$ , oraz ich czasy  $t_i$  i  $t_f$ , to równania

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}_f - \vec{r}_i \\ \Delta t &= t_f - t_i\end{aligned}\quad (1.1)$$

określają wektor przesunięcia dla tych zdarzeń, oraz przedział czasowy pomiędzy nimi.

Wektor  $\Delta\vec{r}$  określa odległość między zdarzeniami  $i$  i  $f$ , oraz kierunek od  $i$  do  $f$ .

Okazuje się, że **wektor przesunięcia może być taki sam dla kilku różnych obserwatorów umiejscowionych w różnych miejscach**



Jeśli mamy trzech obserwatorów, których względna pozycja się nie zmienia, każdy z nich określi zdarzenie  $i$  i  $f$  przez inne wektory. Jednak przesunięcie od punktu  $i$  do  $f$  będzie dla wszystkich obserwatorów takie same. Również czas jaki upłynie od zdarzenia  $i$  do  $f$  będzie dla wszystkich obserwatorów taki sam.

Możemy stwierdzić ogólnie, że każdy inny obserwator D nie zmieniający swojej pozycji względem obserwatorów A, B i C zaobserwuje to samo przesunięcie się np. satelity  $\Delta r$  i ten sam przedział czasu pomiędzy i a f.

Ten zbiór obserwatorów określa pewien układ odniesienia.

**Możemy więc powiedzieć, że układem odniesienia nazywamy zbiór obserwatorów znajdujących się w stałych pozycjach względem siebie.**

Obserwatorzy, którzy znajdują się względem siebie w ruchu nie należą do tego samego układu odniesienia ( na przykład spadające jabłko widziane z zewnątrz i z jabłka).

$\rightarrow$  Rozważmy jeszcze obserwatora O, który ulega przemieszczeniu  $\vec{S}$  względem nieruchomego obserwatora C w pewnym układzie odniesienia między chwilami  $t_i$  i  $t_f$ , nie należy do tego układu odniesienia.

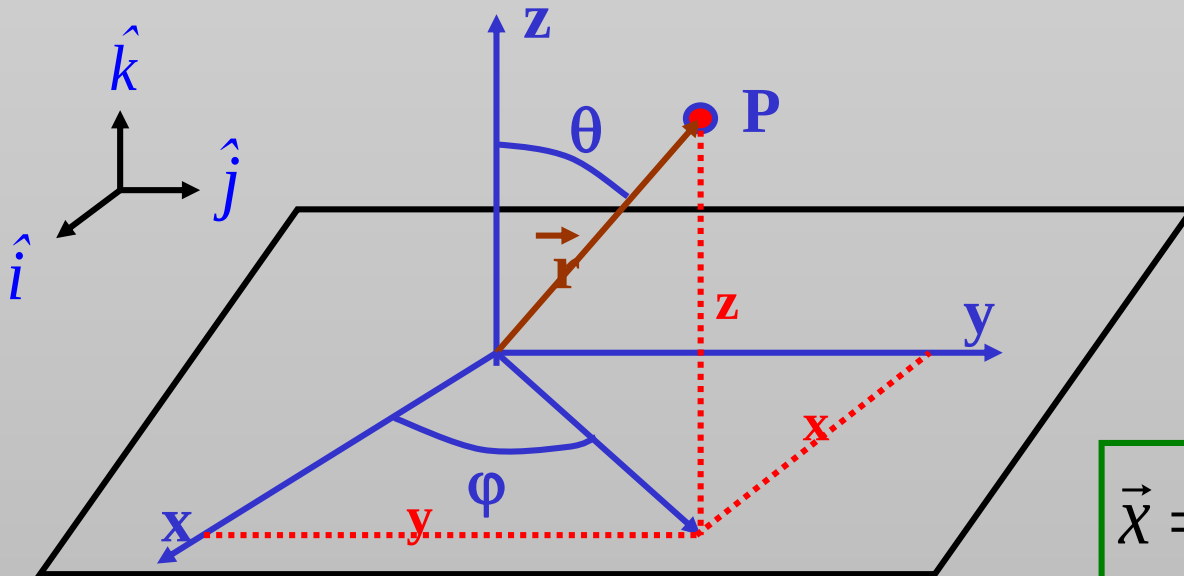
Układ odniesienia może być opisany przez odpowiedni układ współrzędnych, w którym obserwatora identyfikuje się przez współrzędne. Spośród wszystkich układów odniesienia wyróżniają się tzw. układy inercjalne.

**Układ odniesienia nazywamy inercjalnym, jeżeli każda cząstka znajdująca się w tym układzie w spoczynku pozostaje w spoczynku, a każda cząstka, która się w tym układzie porusza, nie zmienia ani prędkości ruchu, ani jego kierunku**

Przemieszczenie, oraz przedziały czasowe, są fundamentalnymi wielkościami nauki o ruchu, czyli kinematyki.

### 1.3 Położenie i tor

Jeżeli w odpowiednim układzie współrzędnych chcemy podać położenie punktu to możemy to uczynić definiując tzw. **wektor wodzący**, albo też **wektor położenia**.



$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  oznaczają wektory jednostkowe poszczególnych osi.

Promień wodzący  $\vec{r}$  możemy podać w różny sposób:

$$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$$

$$\vec{x} = x\hat{i}, \vec{y} = y\hat{j}, \vec{z} = z\hat{k}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Wersory możemy również zapisywać na różne sposoby. W trakcie tego wykładu używać będziemy wersji drugiej, czyli i z daszkiem.

$$\begin{aligned}\vec{x}_0 &= \hat{i}_x = \vec{i} = \hat{i} \\ \vec{y}_0 &= \hat{i}_y = \vec{j} = \hat{j} \\ \vec{z}_0 &= \hat{i}_z = \vec{k} = \hat{k}\end{aligned}$$

x, y i z są współrzędnymi kartezjańskimi. Współrzędne punktu P możemy również zapisać we współrzędnych sferycznych.

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

Gdy położenie obserwowanego obiektu się zmienia, promień wiodący  $\vec{r}$  staje się funkcją czasu:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\hat{i}_x + y(t)\hat{i}_y + z(t)\hat{i}_z \quad (1.1)$$

Równania współrzędnych zależnych od czasu są następujące:

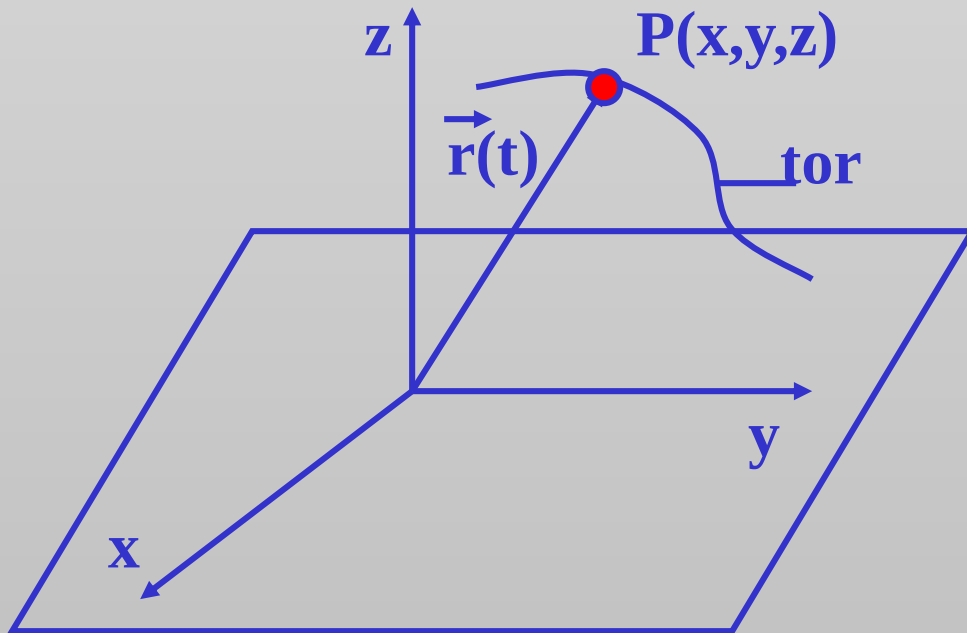
$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

Równania te są równocześnie **równaniami parametrycznymi** toru.

W zależności od tego, czy tor jest linią krzywą czy prostą, mówimy o **ruchu krzywoliniowym** lub **prostoliniowym**.

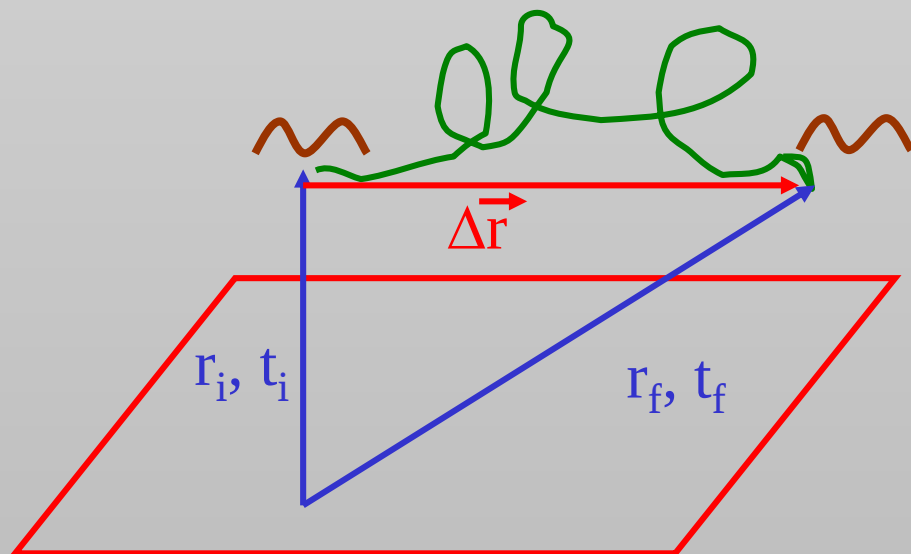


Eliminując czas z  
równań parametrycznych, znajdujemy  
kształt toru zakreślanego przez poruszający  
się punkt P

$$\begin{aligned} y &= F_1(x) \\ z &= F_2(x) \end{aligned}$$

## 1.4 Prędkość średnia

Rozważmy osobę obserwującą lot ptaka i znajdującą się w początku pewnego układu współrzędnych.



W czasie  $\Delta t = t_f - t_i$  ptak przemieścił się o

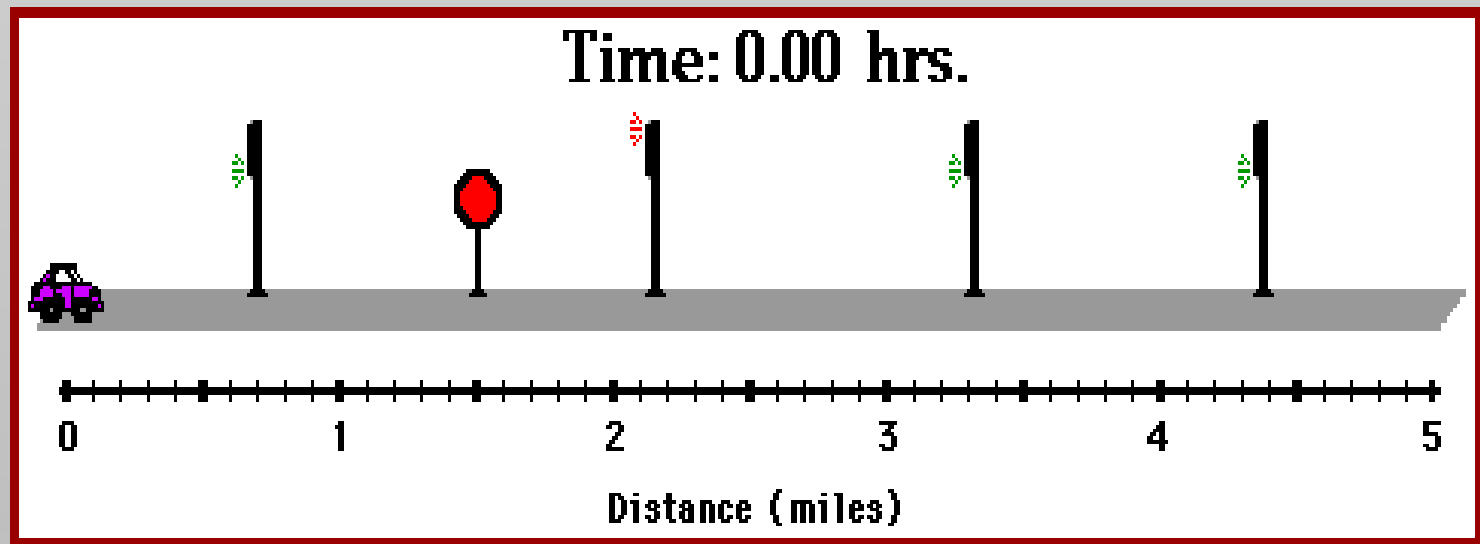
$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i.$$

Średnią prędkością nazywamy wektor zdefiniowany następująco:

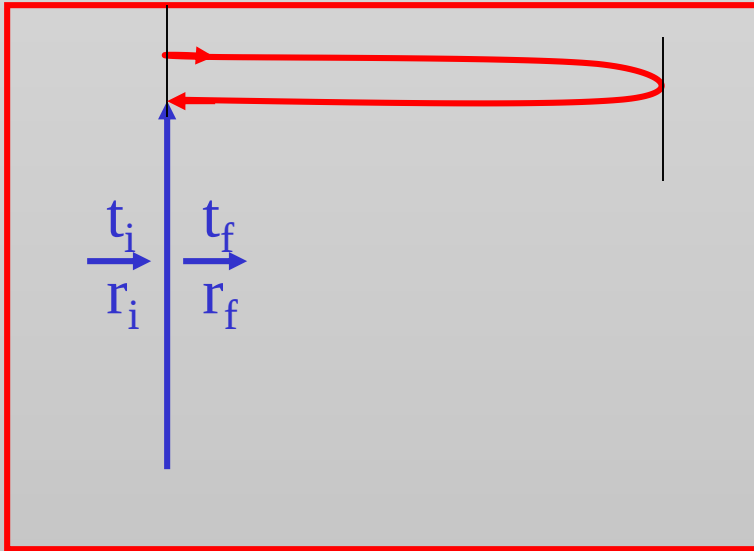
$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Kierunek tej prędkości jest zgodny z kierunkiem wektora  $\Delta \vec{r}$ . 

Przykładem ruchu dla którego celowe jest określenie prędkości średniej jest ruch samochodu w mieście. Nie zawsze „zielona fala” umożliwia ruch samochodu ze stałą prędkością. Powyższa animacja pokazuje taką sytuację.



Rozważmy również jaka będzie prędkość pływaka, który skacze do wody i płynie tam i z powrotem.



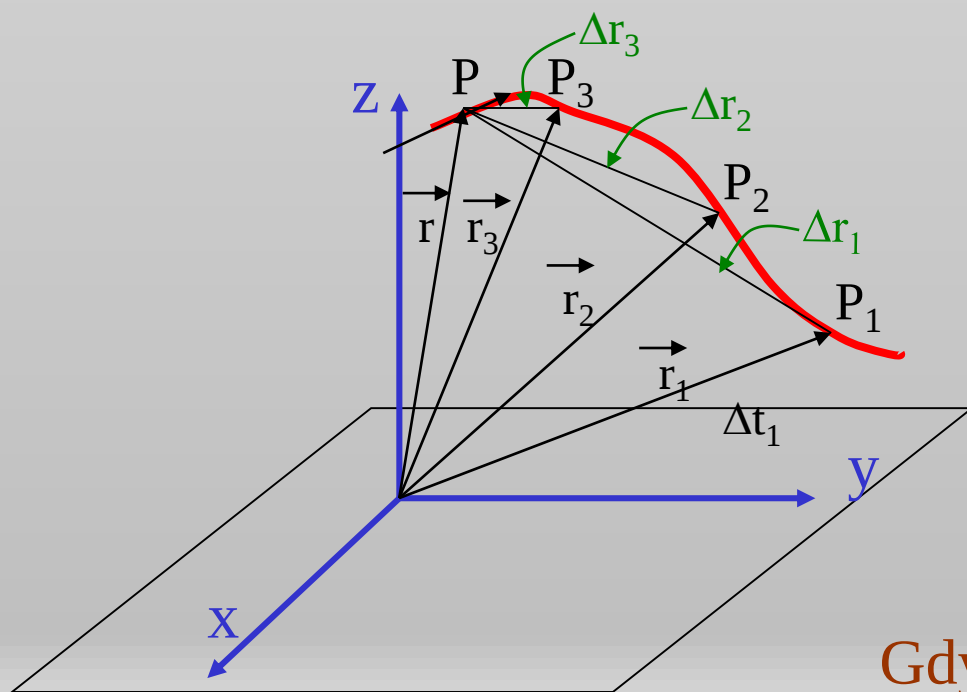
Średnia prędkość dla pływaka jest równa zero, wynika to z wektorowego charakteru prędkości średniej.

W takich przypadkach podaje się jako prędkość średnią wartość skalarną.

$$v_{sr} = \frac{\text{odległość}}{\text{czas}}$$

# Prędkość i przyspieszenie

Bardzo często interesuje nas prędkość jakiegoś ciała w konkretnym punkcie P. W jaki sposób możemy ją obliczyć?



Zacznijmy skracać odstępy czasu w których określamy położenie ciała. Każdorazowo konstruujemy wektor prędkości średniej

$$\vec{v}_n = \frac{\Delta \vec{r}_n}{\Delta t_n}$$

Gdy skracamy nieograniczenie odstęp czasu  $\Delta t \rightarrow 0$ , wartość bezwzględna wektora  $\Delta \vec{r} / \Delta t$  dąży do pewnej wartości granicznej.

Kierunek tego wektora dąży do kierunku stycznej do toru w punkcie P.

Wektor, do którego dąży wektor prędkości średniej gdy  $\Delta t_n \rightarrow 0$  nazywamy prędkością  $\vec{v}$  ciała w punkcie P.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.3)$$

Możemy więc napisać

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \hat{i}_x + \frac{dy(t)}{dt} \hat{i}_y + \frac{dz(t)}{dt} \hat{i}_z \quad (1.4)$$

Wektor prędkości możemy również rozłożyć na składowe:

$$\vec{v} = v_x \hat{i}_x + v_y \hat{i}_y + v_z \hat{i}_z \quad (1.5)$$

Przy czym

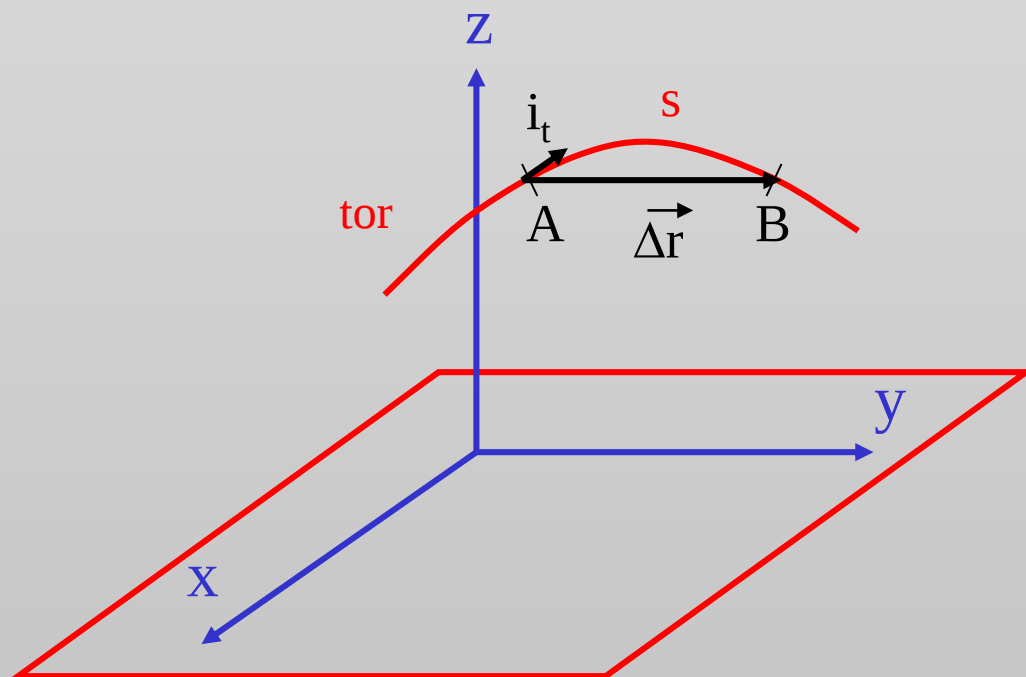
$$v_x = \frac{dx(t)}{dt}, \quad v_y = \frac{dy(t)}{dt}, \quad v_z = \frac{dz(t)}{dt}$$

Składowe wektora prędkości są pochodnymi współrzędnych poruszającego się ciała względem czasu.

Bezwzględną wartość prędkości określamy w oparciu o definicję długości wektora.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2} \quad (1.6)$$

Możemy jeszcze znaleźć zależność pomiędzy prędkością a drogą przebytą przez ciało.



W układzie kartezjańskim:

Wiemy, że droga od punktu A do B jest częścią odcinka toru przebytego przez poruszające się ciało.

$$s = \widehat{AB}$$

$$s = \int_A^B ds = \int_A^B |d\vec{r}|$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \cdot \frac{dt}{dt}$$

$$s = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \cdot \frac{dt}{dt} = \int_A^B \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \cdot dt \quad .$$

Otrzymujemy więc na drogę przebytą przez ciało wyrażenie:

$$s = \int_A^B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{t} \quad (1.7)$$

Z drugiej strony ze wzoru (1.3) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \\ &= \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right) \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) \end{aligned}$$

$$|\Delta \vec{r}| \rightarrow \Delta s$$

$$\dot{\mathbf{r}}_t$$

$$ds/dt$$

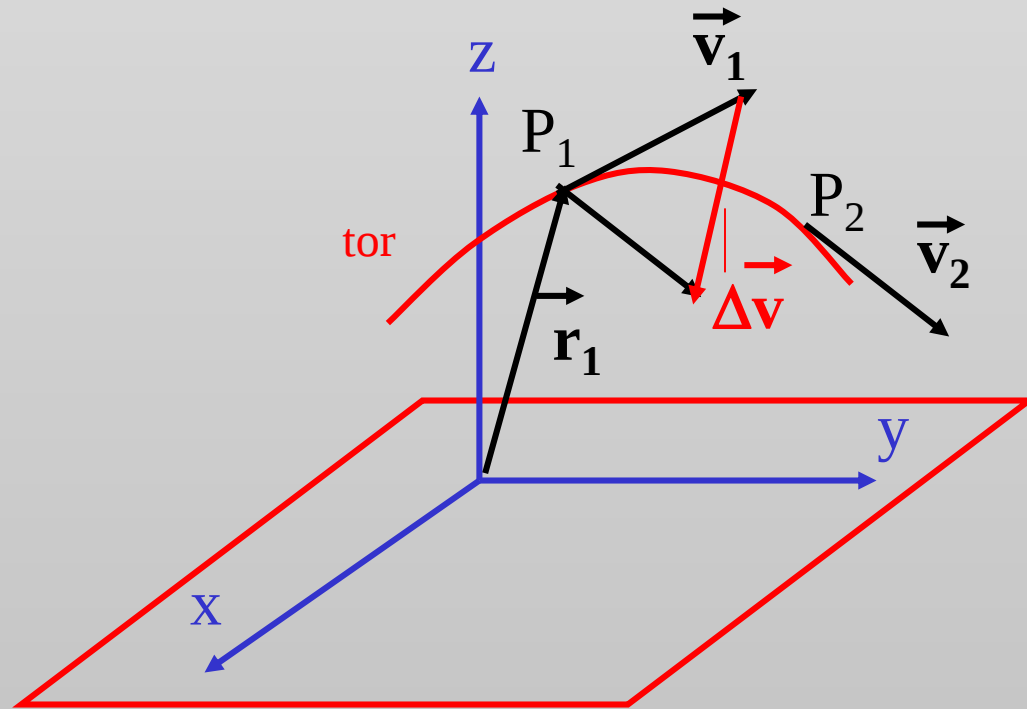
Czyli otrzymujemy:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \hat{i}_t \frac{ds}{dt} \quad (1.8)$$

Ponieważ prędkość ciała może się zmieniać, istnieje pewna wielkość informująca nas o wielkości tej zmiany zarówno co do wartości jak i kierunku.

Wielkość tą nazywamy **przyśpieszeniem**.

Rozważmy ciało poruszające się po dowolnym torze z jakąś prędkością.



Z rysunku widzimy, że w stosunku do punktu  $P_1$  w punkcie  $P_2$  nastąpił pewien przyrost prędkości  $\Delta v$  w czasie  $\Delta t$ . Średnie przyśpieszenie definiujemy jako:

$$\vec{a}_{\text{śr}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (1.9)$$

Skracając czas obserwacji zbliżamy punkt  $P_2$  do  $P_1$ . Wektor  $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$  dąży do pewnego wektora  $\vec{a}$ , który nazywamy **przyśpieszeniem ciała**.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (1.10)$$

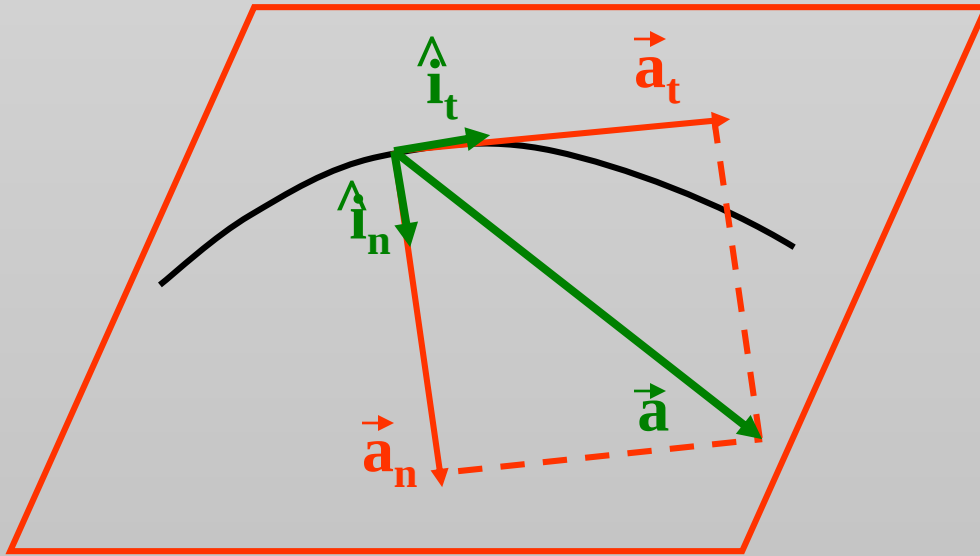
W układzie współrzędnych kartezjańskim możemy wektor przyśpieszenia napisać jako sumę składowych.

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x \hat{i}_x + a_y \hat{i}_y + a_z \hat{i}_z \quad (1.11)$$

Wiadomo również, że:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \text{ itp dla } y, z$$

Przyśpieszenie możemy rozłożyć na dwie składowe, styczną i normalną do toru.



Mamy więc:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

Składowa normalna odpowiada za to, że tor ciała nie jest prostoliniowy

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \hat{i}_t$$
$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \cdot \hat{i}_n$$

## 2. Przykłady ruchu

Kinematyka jest działem mechaniki zajmującym się opisem ruchu.

Głównym zadaniem kinematyki jest znalezienie przyszłej pozycji ciała i jego prędkości w oparciu o bieżące wartości pozycji, prędkości i przyśpieszenia.

Znamy już odpowiednie równania, które pozwalają na określić dla określonego czasu  $t$  chwilowe wartości prędkości i przyśpieszenia.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad (2.1)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \quad (2.2)$$

Bardzo często mamy do wykonania zadanie odwrotne. Znając przyśpieszenie ciała musimy znaleźć prędkość, położenie ciała, oraz równanie toru. W oparciu o równanie (2.2) **przez operację całkowania znajdujemy prędkość.**

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \int \vec{a}(t) dt + C \quad (2.3)$$

Z kolei  $d\vec{r} = \vec{v}(t) dt$  czyli,

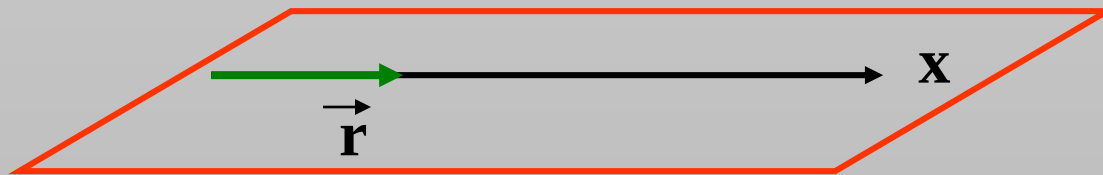
$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) dt + C' = \iint [\vec{a}(t) dt + C] dt + C' \quad (2.3a)$$

Każde z powyższych równań wektorowych jest równoważne trzem równaniami skalarnym dla poszczególnych składowych wektorów prędkości, przyśpieszenia i położenia.

Sprowadza się to do całkowania równań skalarnych. Stałe całkowania  $C$  i  $C'$  wyznacza się z tzw. warunków brzegowych, określających prędkość i położenie w chwili  $t_0$ .

## 2.2 Ruch prostoliniowy

Jeżeli tor ruchu ciała jest linią prostą, to zawsze możemy tak dobrać układ współrzędnych, aby jedna z jego osi pokrywała się z torem. Zwykle wybiera się oś  $x$ .



$$\vec{r}(t) = \vec{x}(t) = x(t) \cdot \hat{i}_x$$

Prędkość ciała i jego przyśpieszenie wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{dx(t)}{dt} \hat{i}_x \\ \vec{a}(t) &= \frac{d^2x(t)}{dt^2} \hat{i}_x = \frac{dv(t)}{dt} \hat{i}_x\end{aligned}$$

Jeśli wektory przyśpieszenia i prędkości mają zwroty zgodne, mówimy o ruchu przyśpieszonym, a jeśli przeciwny mówimy o ruchu opóźnionym.

Skalarna wartość prędkości (**szybkość**) jest równa

$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v dt$$

Równanie z prawej strony strzałki możemy scałkować.

$$\int dx = \int v \cdot dt \quad (2.4)$$

Jeśli zaczynamy badać ruch ciała w chwili  $t_0$  i jeżeli zajmuje ono wtedy pozycję  $x_0$ , to możemy obliczyć całkę oznaczoną:

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v \cdot dt$$

$$x - x_0 = \int_{t_0}^t v \cdot dt \quad (2.5)$$

← Znak prędkości zależy od tego, czy ciało porusza się w kierunku  $x$ , czy przeciwnie.

Analogicznie mamy:

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a dt \quad .$$

Wartość prędkości otrzymujemy z całkowania;

$$\int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a dt$$

$$v - v_0 = \int_{t_0}^t a dt$$
(2.6)

Równocześnie z zależności

$$dx = v dt$$

$$dv = a dt$$

otrzymujemy  
zależność;

$$a dx = v dv$$

•

Po scałkowaniu otrzymujemy:

$$\int_{x_0}^x a dx = \int_{v_0}^v v dv = \frac{1}{2} (v^2 - v_0^2)$$
(2.7)

### 2.2.1 Ruch jednostajny

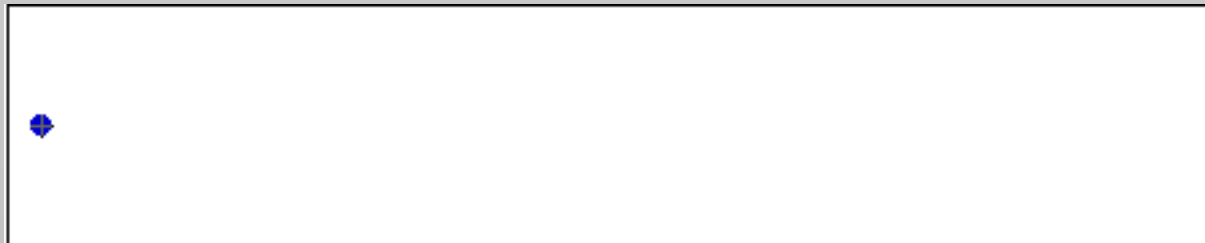
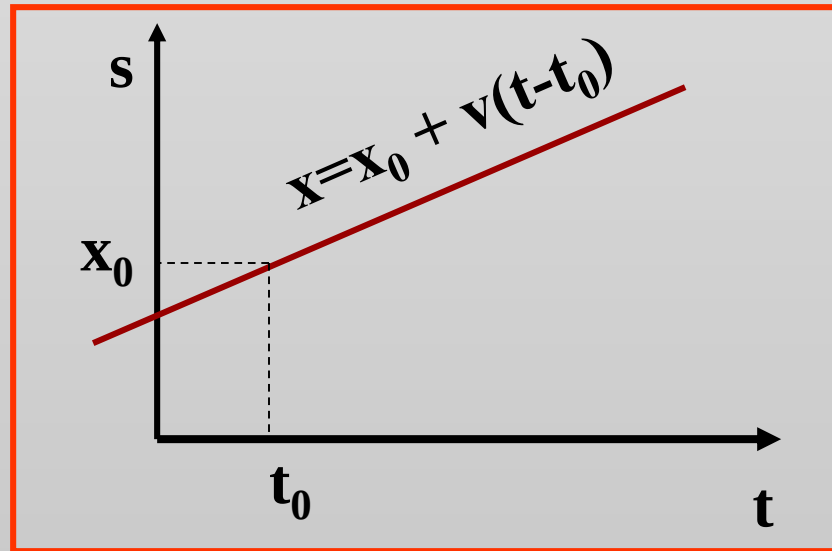
Ruch jednostajny, jest to taki ruch, w którym prędkość jest stała,  $v = \text{const}$ .

Ze wzoru (2.5) otrzymujemy;

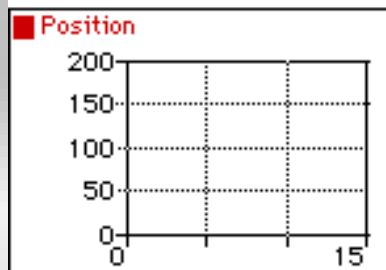
$$\begin{aligned} x - x_0 &= \int_{t_0}^t v dt = v \int_{t_0}^t dt = v(t - t_0) \\ x &= x_0 + v(t - t_0) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$x$  jest przebytą przez ciało drogą, którą zwykle oznaczaliśmy przez  $s$ .

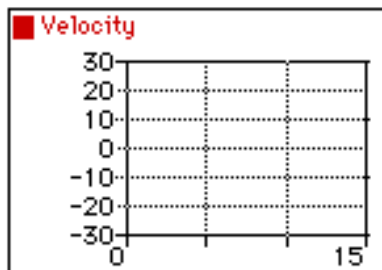
Wykres drogi od czasu ma więc postać:



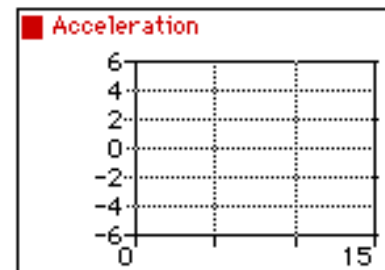
Position-Time Graph

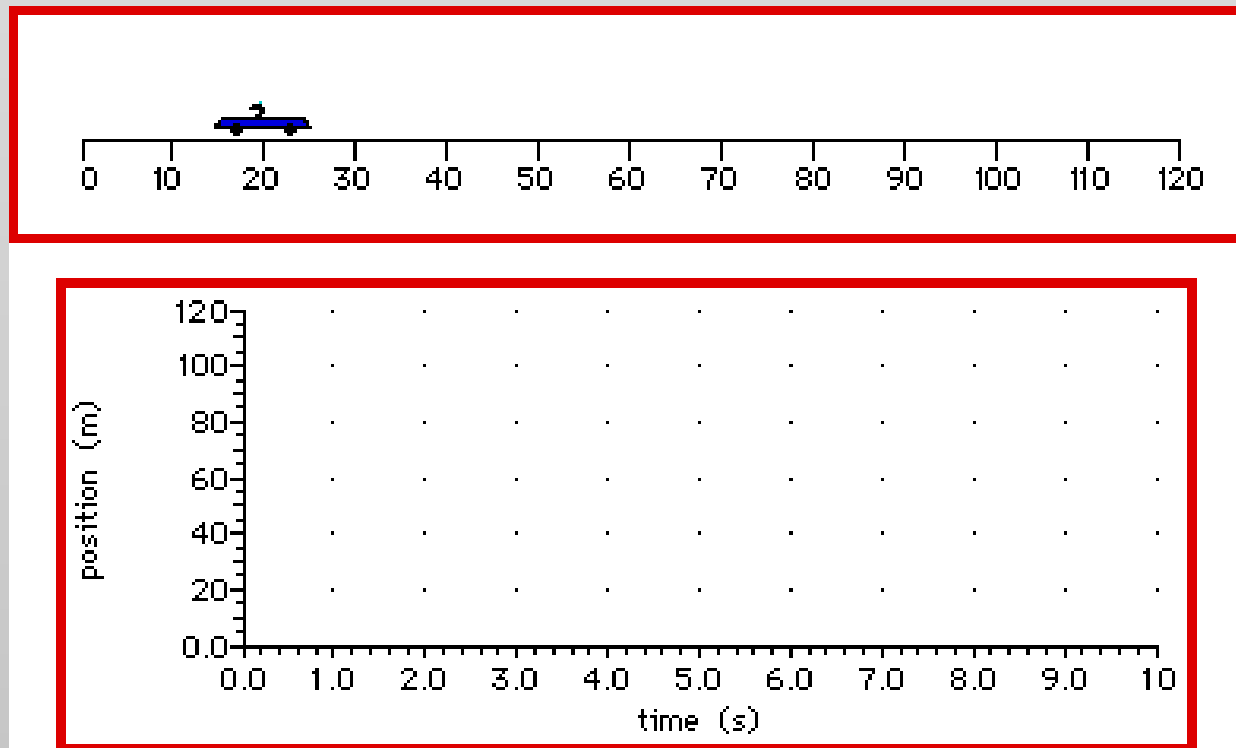


Velocity-Time Graph



Acceleration-Time Graph

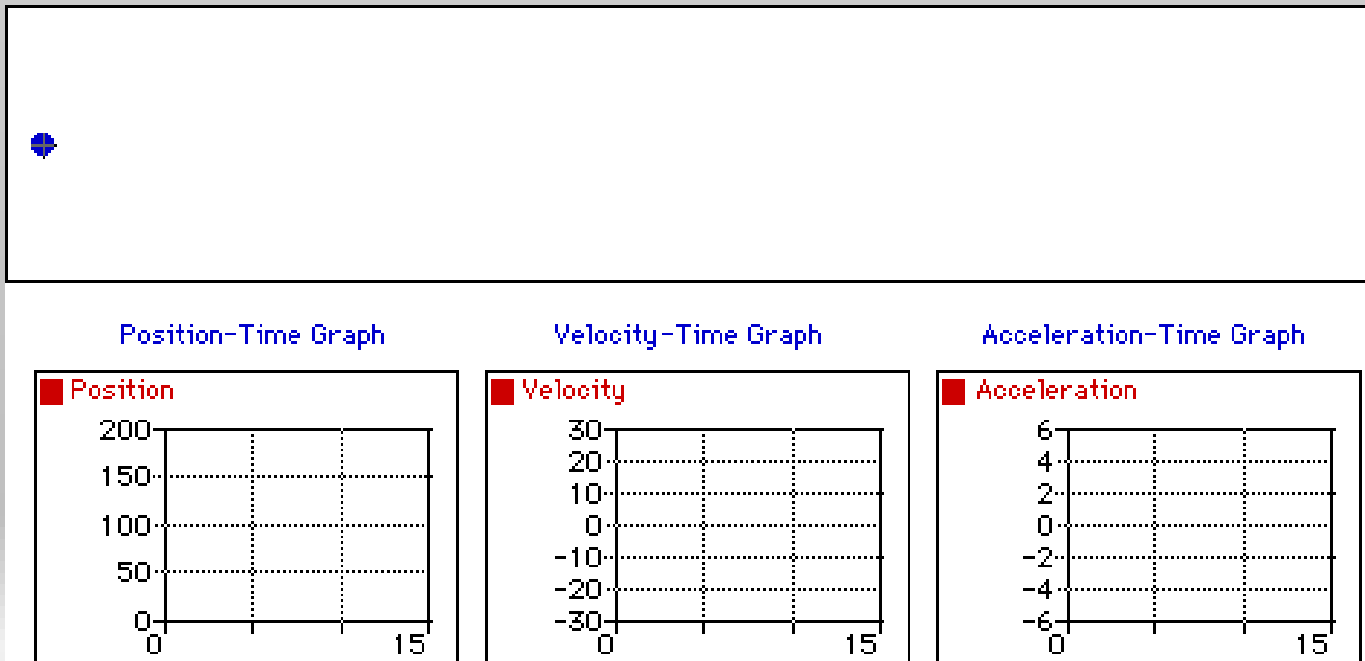




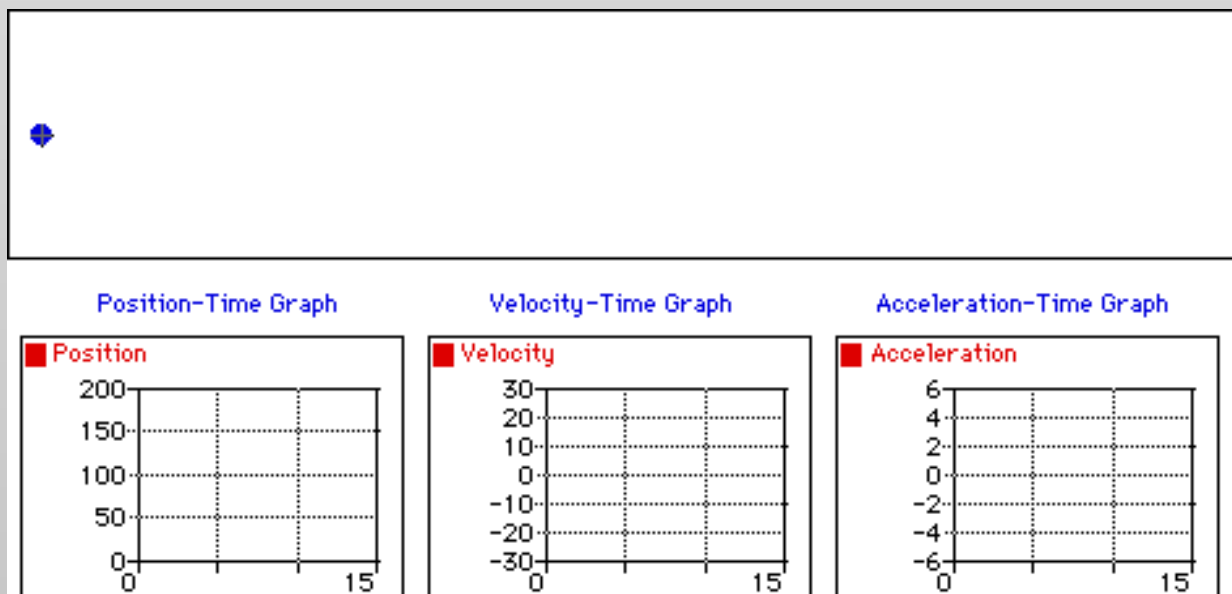
Im większa prędkość tym większe nachylenie prostej na wykresie zależności drogi od czasu

## 2.2.2 Ruch jednostajnie zmienny

Ruch **jednostajnie** zmienny jest to ruch ze stałym przyśpieszeniem  $a = \text{const}$ . Gdy  $a > 0$  ruch nazywamy **przyśpieszonym**, a gdy  $a < 0$  ruch jest **opóźniony**.



Ruch jednostajnie opóźniony



## Ruche jednostajnie przyspieszony

W celu wyliczenia prędkości z jaką porusza się ciało musimy rozwiązać równanie:

$$dv = a \cdot dt$$

(2.9)

$$\int_{v_0}^v dv = a \int_{t_0}^t dt \rightarrow v = v_0 + a(t - t_0)$$

Uzyskana w chwili  $t$  prędkość ciała poruszającego się ze stałym przyśpieszeniem jest liniową funkcją czasu.

Jeśli chcemy policzyć drogę przebytą przez takie ciało, wstawiamy ostatnie wyrażenie do wzoru (2.8) . Otrzymamy wynik:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)] dt$$
$$x = x_0 + \int_{t_0}^t v_0 dt + a \int_{t_0}^t (t - t_0) dt$$

•

Wyliczając całki w ostatnim równaniu otrzymujemy:

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + a \left[ \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) - t_0(t - t_0) \right]$$

Po krótkich przekształceniach otrzymujemy:

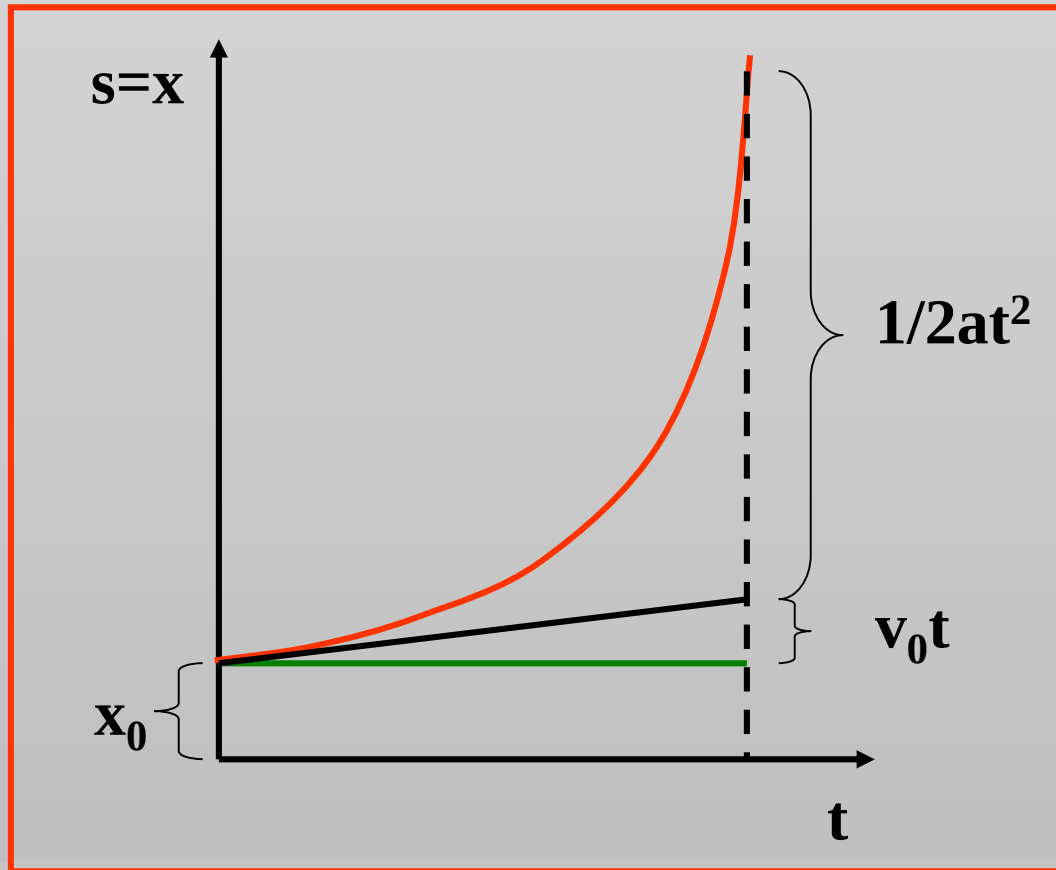
$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2 \quad (2.9a)$$

Lub jeśli wybierzemy taki układ odniesienia, że początek ruchu jest w punkcie zero i stoper włączamy w chwili czasu 0

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Droga w ruchu jednostajnie np. przyspieszonym jest kwadratową funkcją czasu.

Narysujmy drogę którą ciało przebywa w czasie  $t$  przy założeniu, że  $t_0 = 0$ .



Wykres przedstawiający drogę którą ciało przebywa w czasie  $t$  przy założeniu, że  $t_0 = 0$ .

## 2.3 Ruch ze stałym przyśpieszeniem

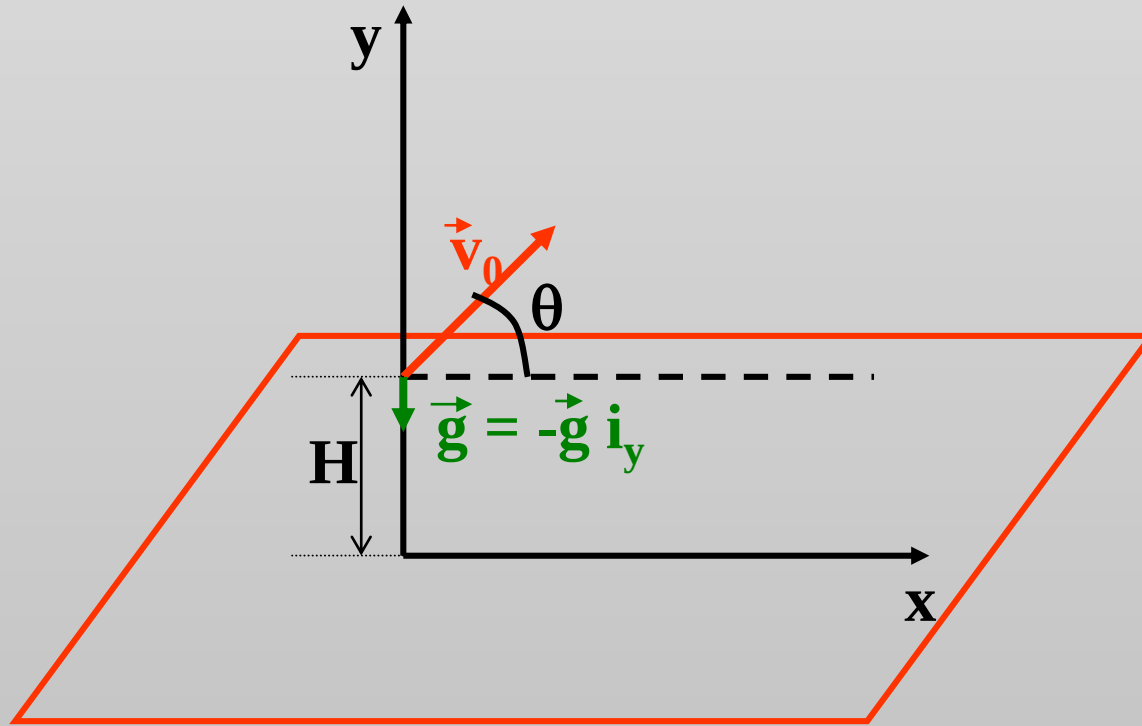
Całkując wzory definiujące prędkość i przyspieszenie otrzymujemy wyrażenia:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0) \quad (2.10)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + 1/2 \vec{a}(t - t_0)^2 \quad (2.11)$$

Jednym z najczęstszych obserwowanych ruchów jest ruch w pobliżu powierzchni Ziemi z przyśpieszeniem  $g = \text{const.}$

Rozważmy następujący przypadek.



W polu ciężkości na wysokości  $H$  wyrzucamy pod kątem  $\theta$  do poziomu z prędkością  $\vec{v}_0$  jakieś ciało.

Możemy tu rozróżnić następujące przypadki:

# Tabela 1

|    |            |                |              |                 |
|----|------------|----------------|--------------|-----------------|
| 1. | $H=0$      | $\theta=90^0$  | $v_0 \neq 0$ | rzut pionowy    |
| 2. | $H \neq 0$ | $\theta=0^0$   | $v_0 \neq 0$ | rzut poziomy    |
| 3. | $H \neq 0$ | $\theta=-90^0$ |              | spadek swobodny |
| 4. | $H=0$      | $\theta > 0$   | $v_0 \neq 0$ | rzut            |
|    | $H \neq 0$ | $\theta < 0$   | $v_0 \neq 0$ | ukośny          |

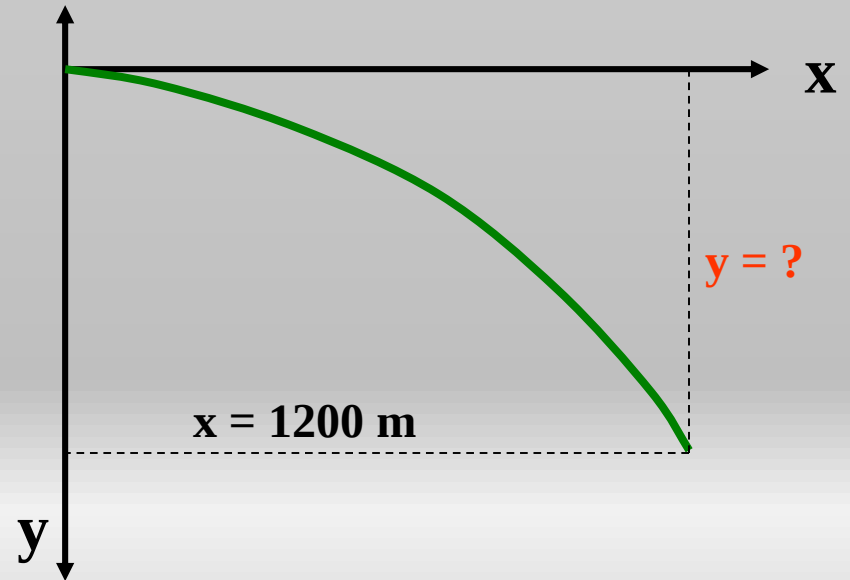
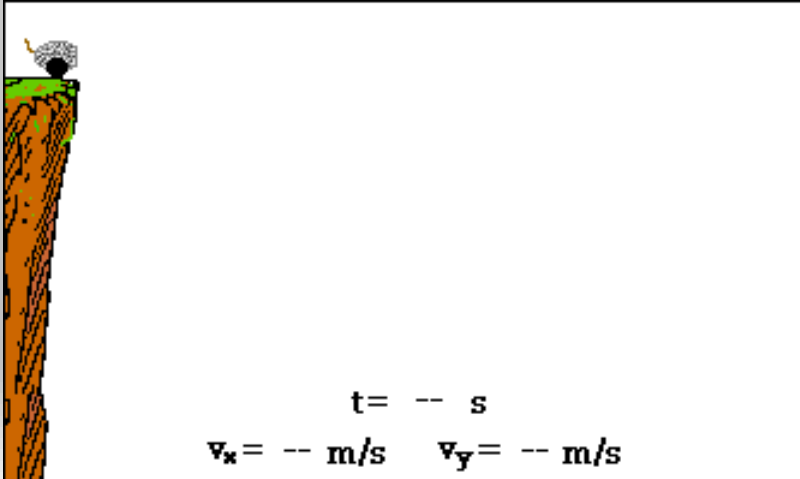
# Spadek swobodny



### 2.3.1 Rzut poziomy

Rzut ten jest przypadkiem 2 w Tabeli 1.

Kula armatnia została wystrzelona poziomo ze stałą prędkością  $v_{0x}=100$  m/s. Kula spadła na ziemię w odległości 1200 m od miejsca wystrzelenia. Pytamy się o długość drogi pionowej jaką przebyła kula przy zaniedbaniu oporu powietrza.





Ponieważ ruch poziomy jest ruchem jednostajnym, odległość jaką pocisk przebył znajdujemy z wzoru (2.8). Zakładając, że  $x_0 = 0$ , oraz  $t_0 = 0$ , mamy:  
 $x = v_{0x} t$ , czyli  $t = x/v_{0x} = 1200\text{m}/100\text{m/s} = 12\text{ s}$ .

Zauważmy, że rozważaliśmy ruch **poziomy** niezależnie od ruchu **pionowego** aby wyznaczyć czas lotu kamienia.

Ruch pionowy jest spadkiem swobodnym, dla którego mamy:

$v_{0y} = 0$  oraz  $a_y = -g = -9.81\text{ m/s}^2$ .

Z równania (2.9a) dla ruchu w kierunku osi y mamy

$$y = -1/2 g t^2 = -1/2 \cdot 9.81\text{ m/s} \cdot (12\text{m})^2 = 706.32\text{ m}$$

Zauważmy, że rozważaliśmy ruch **pionowy** niezależnie od ruchu **poziomego** aby wyznaczyć wysokość spadku kamienia.

Niezależność tych dwóch ruchów implikuje, że pocisk przy  $v_{0x} = 0$  w czasie  $12\text{ s}$  spadnie o  $706.32\text{ m}$ .

Policzmy jeszcze trajektorię ruchu. Skorzystamy z równania (2.9a) , oraz wyliczonego czasu ruchu  $t=x/v_{0x}$  . Dla ruchu wzdłuż osi y z podanym czasem ruchu i warunkiem  $t_0 = 0$  , otrzymujemy:

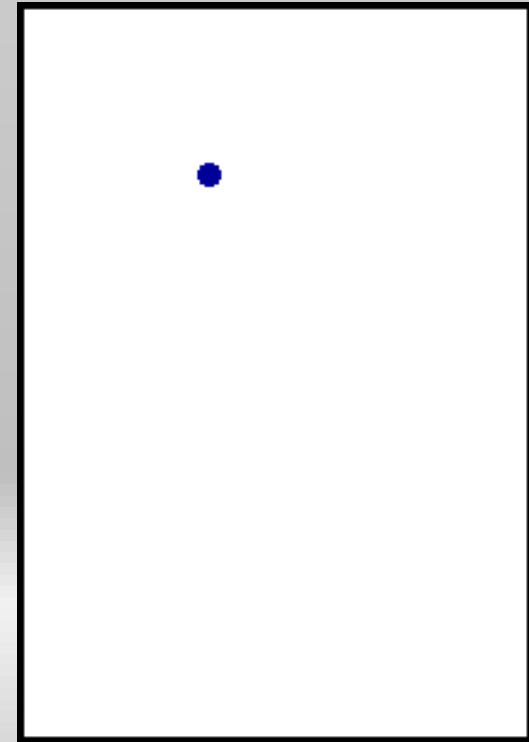
$$y = \left( \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \right) x + \frac{1}{2} \left( \frac{-g}{v_{0x}^2} \right) x^2 . \quad (2.12)$$

Jest to równanie  
paraboli.



Ogólnie można powiedzieć, że paraboliczna trajektoria jest charakterystyczna dla ruchów ze stałym przyspieszeniem.

Składowe ruchu możemy traktować niezależnie zgodnie z **zasadą niezależności ruchu**.





Ta sama prędkość  
początkowa z różnych  
wysokości



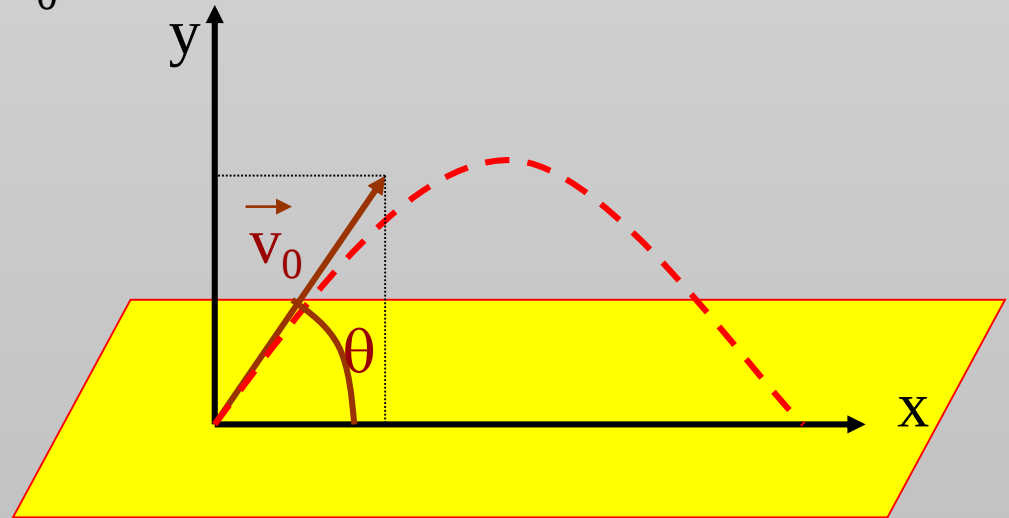
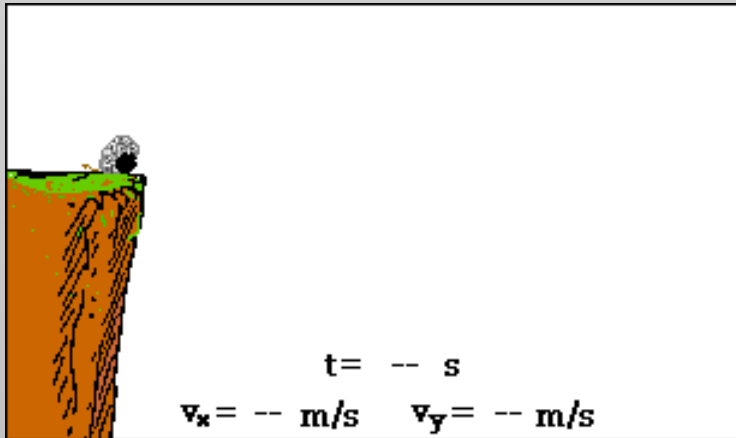
Ta sama wysokość,  
różne prędkości  
początkowe



### 2.3.2 Rzut ukośny

Jest to przypadek, dla którego zgodnie z Tabelą 1 ,

$H = 0$  lub  $H \neq 0, 0 < \theta < 90^\circ, v_0 \neq 0$ .



Składowe prędkości  
początkowej wynoszą:

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta$$



Wstawiając te wartości do wzoru (2.12) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} y &= x \left( \frac{v_0 \sin \theta}{v_0 \cos \theta} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{a_y}{v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2 \\ y &= x \operatorname{tg} \theta + \left( \frac{a_y}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Wiemy przy tym, że  $a_y = -g$ . Mamy więc równanie typu:

$$y = Ax + Bx^2$$

Ciało w rzucie ukośnym porusza się więc po paraboli.

Wiemy, że w rzucie ukośnym **parametryczne równania** ruchu są zapisane następująco:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{0x} \cdot t \\ y(t) &= v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

**Rzut ukośny charakteryzują następujące wielkości:**

1. Zasięg rzutu,
2. Maksymalna wysokość

**Zasięg rzutu otrzymamy licząc odległość poziomą  $x$  dla  $y=0$ .**

$$x \cdot \operatorname{tg} \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 = 0$$

**Równanie to ma dwa rozwiązania:**

$$x_1 = 0$$

$$x_{\max} = x_2 = \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta \cdot \operatorname{tg} \theta}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$$

**Maksymalną wysokość rzutu otrzymamy licząc maksimum funkcji przedstawiającej równanie toru, czyli dla  $dy/dx=0$ .**

$$tg\theta - \frac{2g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x = 0$$

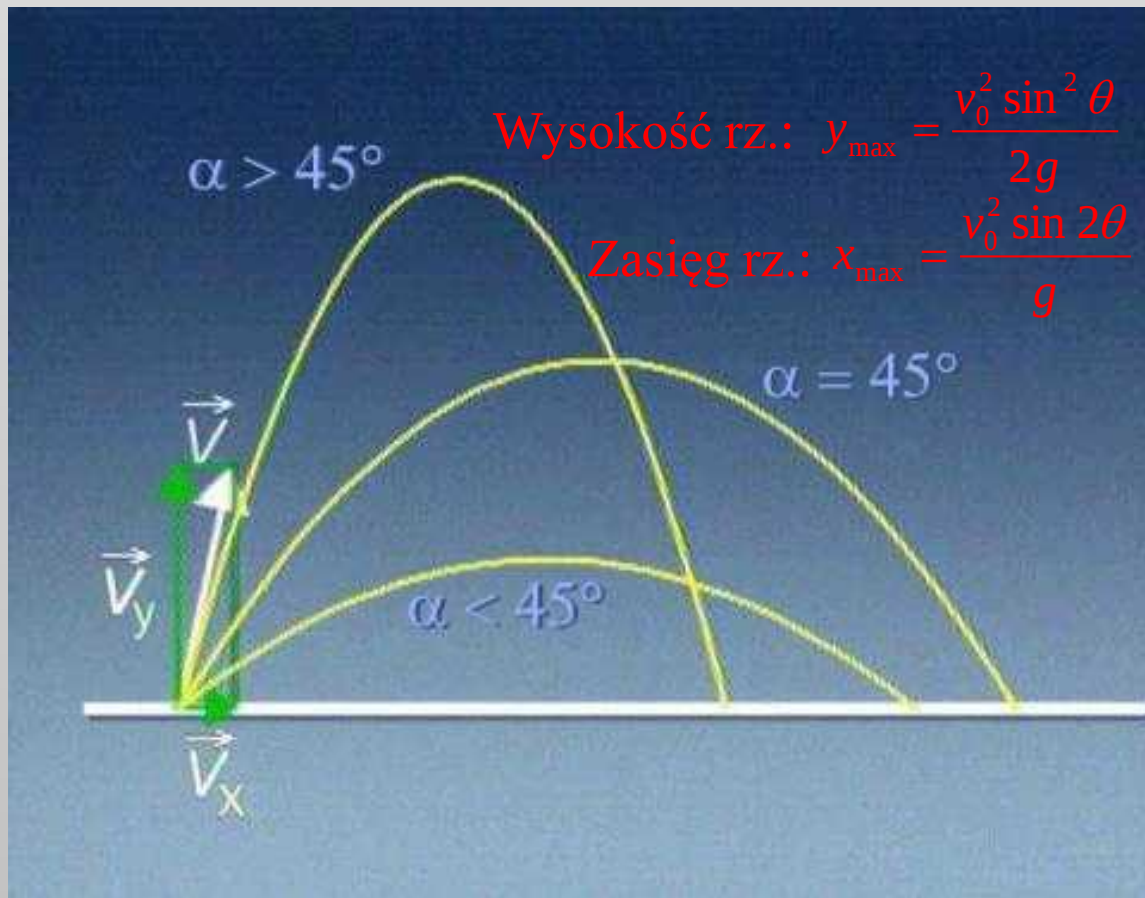
**Otrzymujemy  
więc:**

$$x = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\theta = \frac{1}{2} x_{\max} .$$

**Podstawiając wyrażenie na x do równania (2.13),  
otrzymujemy na maksymalną wysokość poruszającego się  
rzutem ukośnym wartość:**

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \theta .$$

**Widzimy z podanych wzorów, że zarówno maksymalny  
zasięg rzutu jak i maksymalna wysokość rzutu zależą od  
wartości i kierunku prędkości początkowej.**

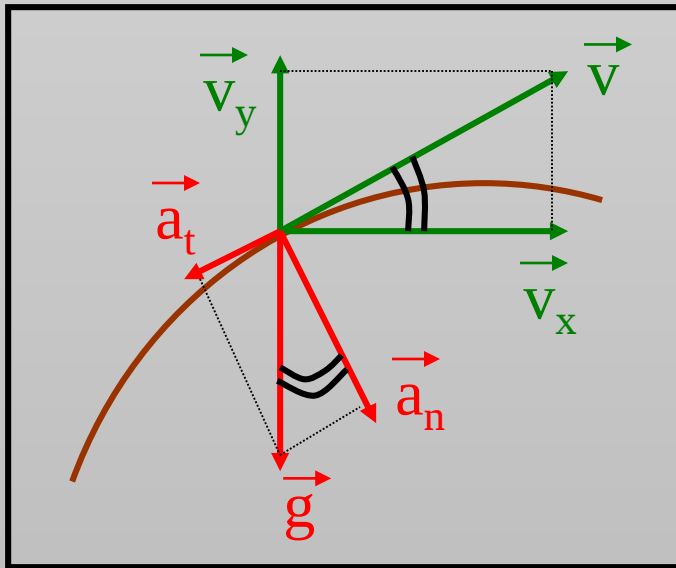


Tor ruchu przedstawia przesuniętą parabolę o współrzędnych wierzchołka:

$$(x_0; y_0) = \left( \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}; \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \right)$$

Zarówno w rzucie poziomym jak i ukośnym wyrzucaliśmy ciało ze stałą prędkością początkową. Wiedząc, że w kierunku pionowym działa przyspieszenie ziemskie  $g$ , możemy rozważyć jakie są składowe tego przyspieszenia.

Rysując część toru ciała w rzucie ukośnym mamy:



Zauważmy, że w każdym punkcie toru zachodzi:

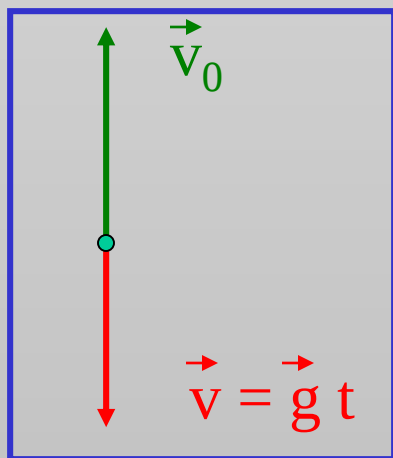
$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{a_t}{a_n} = \frac{v_{0y} - gt}{v_{0x}} \quad .$$

Przy czym:

$$\sqrt{a_n^2 + a_t^2} = g = \text{const} \quad .$$

W najwyższym punkcie toru  $a_t = 0$ , a  $a_n = g$ .

Należy jeszcze wspomnieć o szczególnym przypadku rzutu ukośnego, a mianowicie rzutu pod kątem  $\theta = 90^\circ$  z prędkością początkową  $v_0$ . Taki przypadek nazywamy rzutem pionowym.



Przebywana w czasie  $t$  droga wynosi:

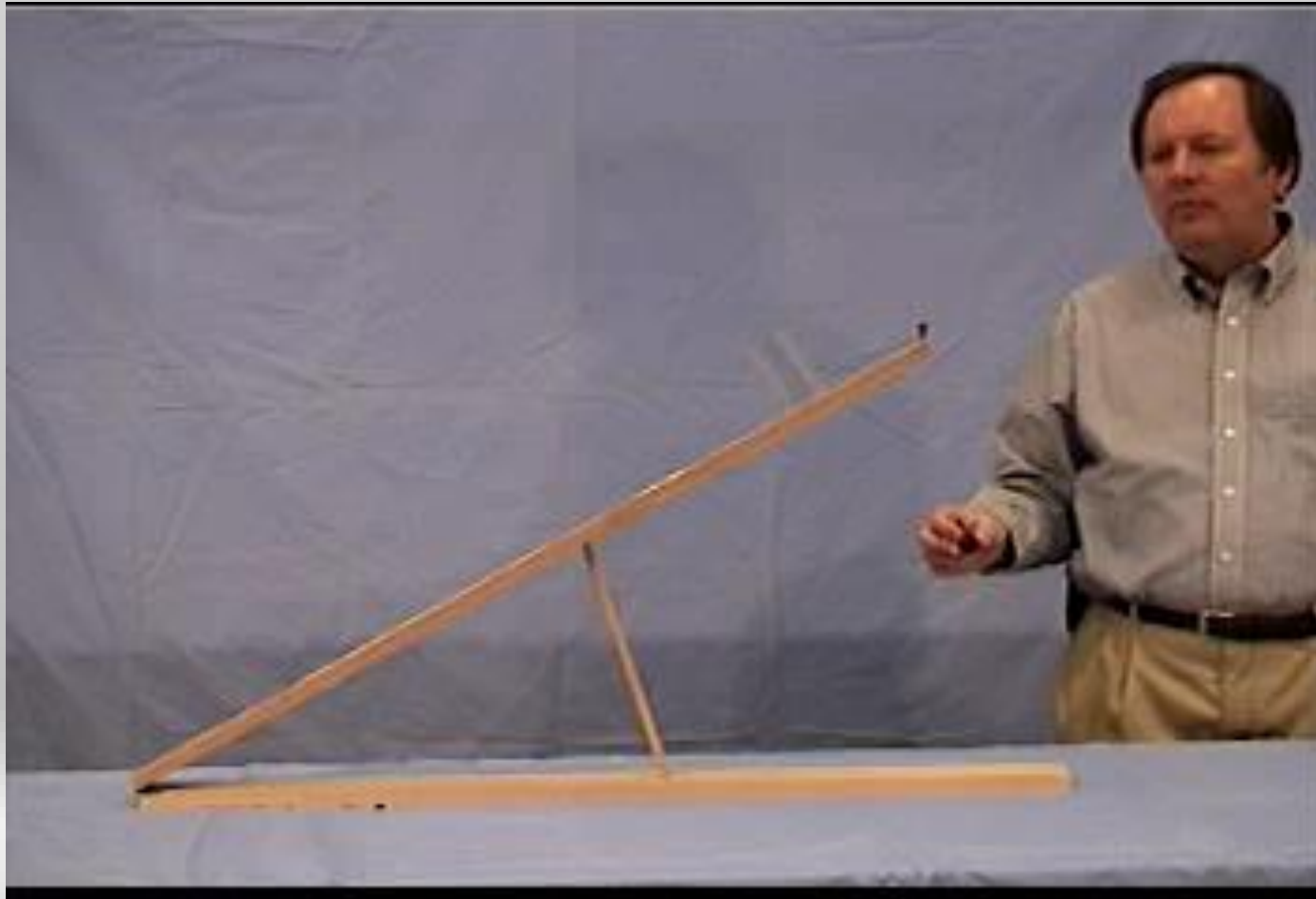
$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Maksymalną wysokość uzyskamy z warunku

$$\frac{ds}{dt} = v_0 - g t = 0$$

Czas ruchu ciała do maksymalnej wysokości  $h$  wynosi więc:  
 $t = \frac{v_0}{g}$ , a uzyskana maksymalna wysokość  $h = \frac{v_0^2}{2g}$ .

# zagadka



# Spadek swobodny demonstracje

