

FIZYKA

Grawitacja

Ruch pod wpływem sił centralnych

$$\vec{F} = \pm f(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Siła zależna tylko od odległości

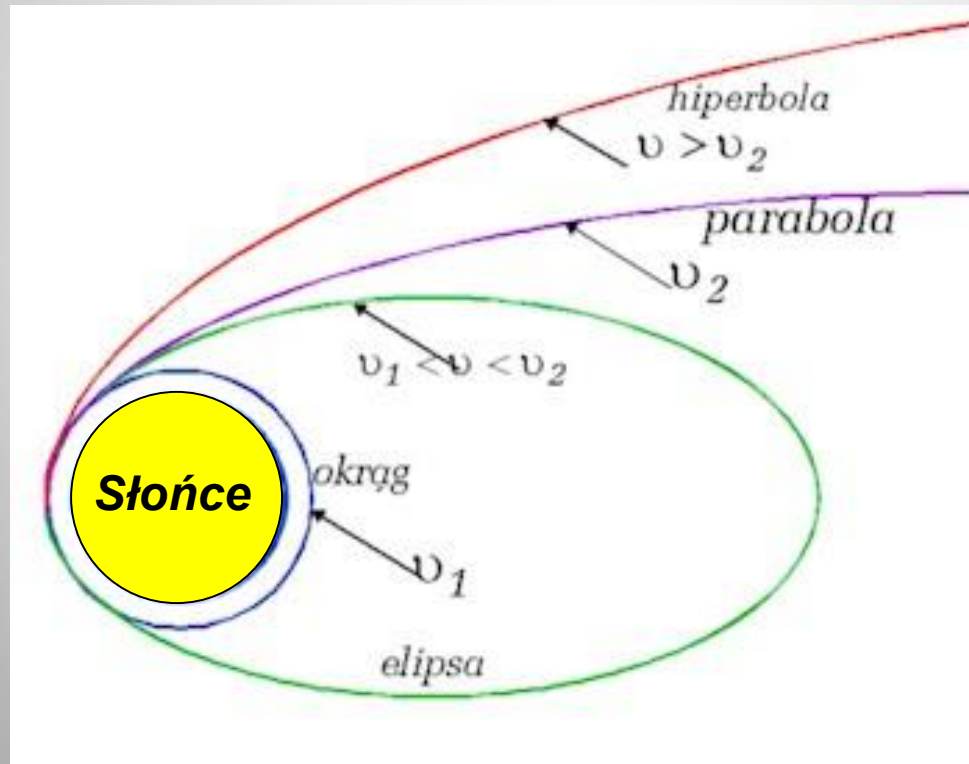
Moment siły centralnej równy zero: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \mathbf{0}$

Z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \mathbf{0}$

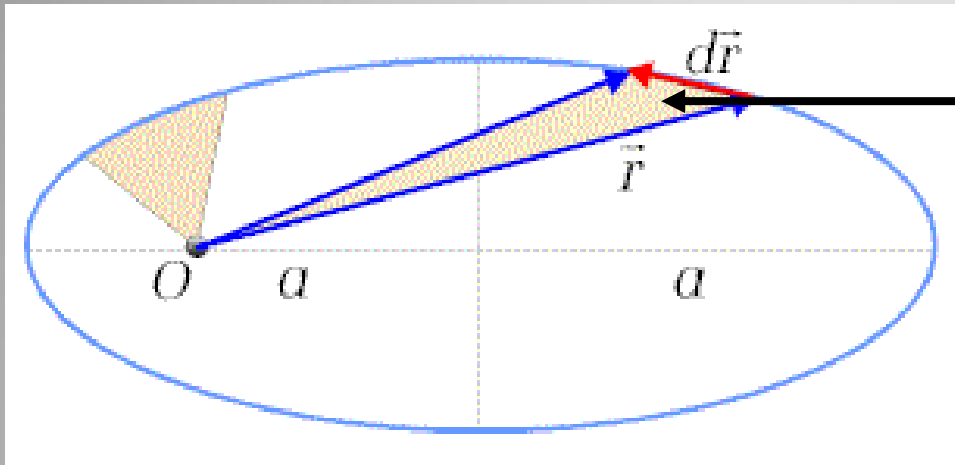
wynika, że moment pędu jest stały: $\vec{L} = \text{const}$

Ruch pod wpływem sił centralnych

Pod wpływem siły centralnej ciała poruszają się po tzw. krzywych stożkowych: elipsie, paraboli lub hiperboli.



Prawa Keplera



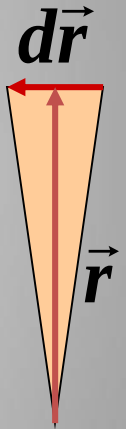
$d\vec{S}$ - pole trójkąta

$$d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$$

$$\vec{r} \times d\vec{r} = \vec{r} \times \vec{v} \cdot dt = 2 \cdot d\vec{S}$$

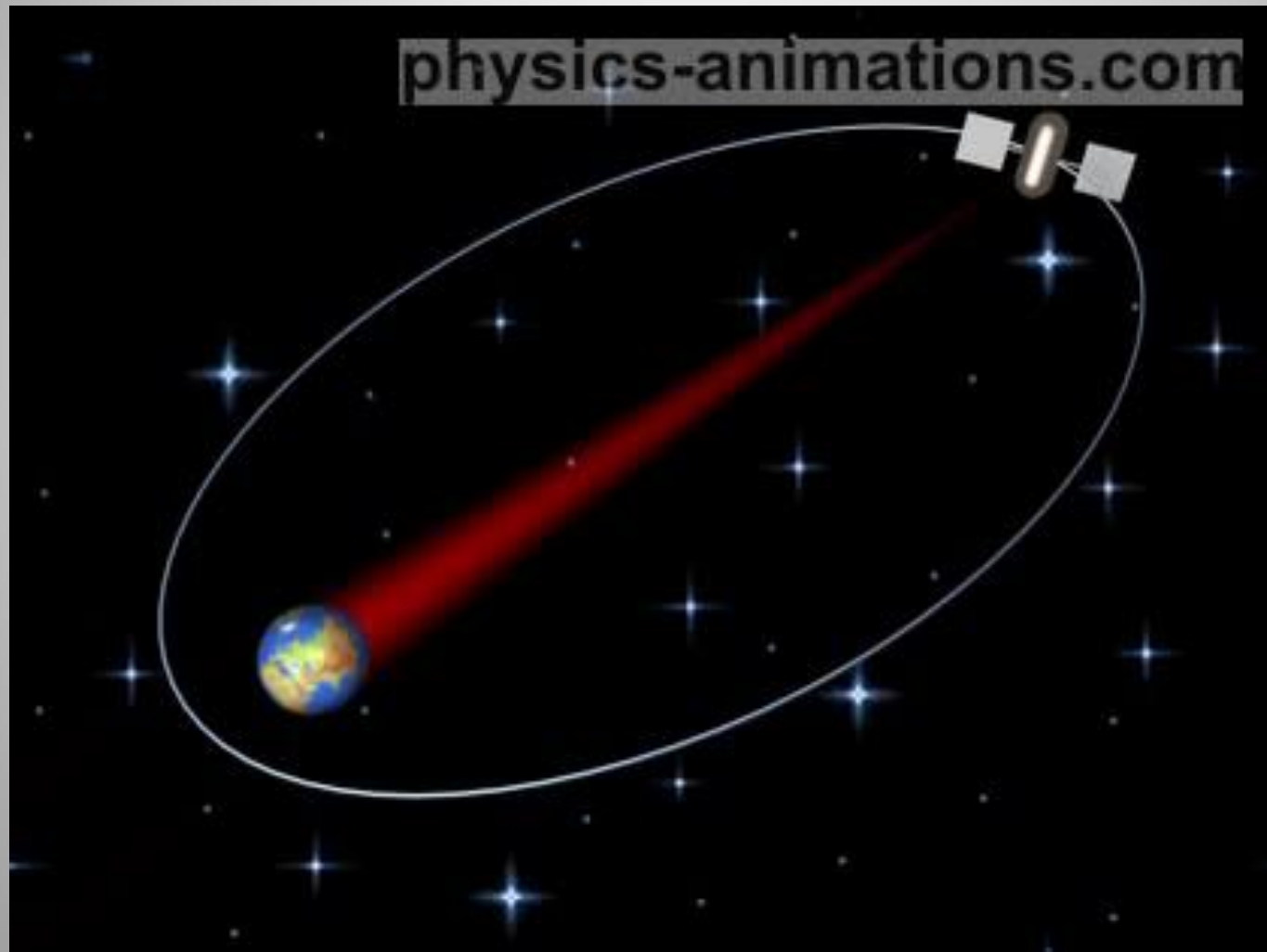
$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt}$$

- prędkość polowa



$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \vec{L}$$

Prawa Keplera

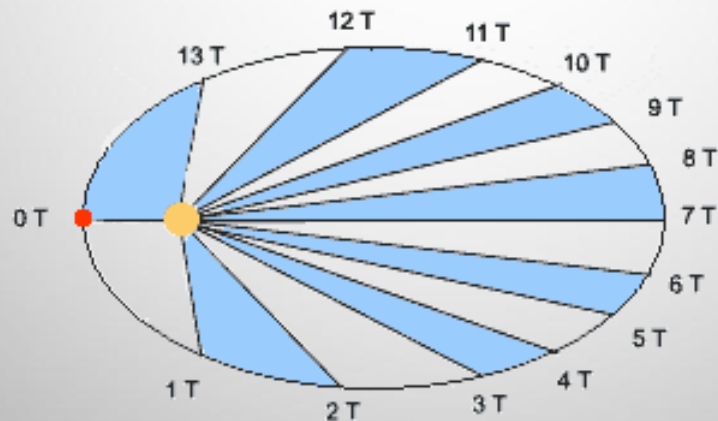


Prawa Keplera

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2m} \vec{L}$$

Stały moment pędu $\equiv$ **Stała prędkość polowa**

Stałe pola zakreślane w jednakowych odcinkach czasu przez promień wodzący poruszającego się punktu.



T = any unit of time (hour, day, week, etc.)

Prawa Keplera

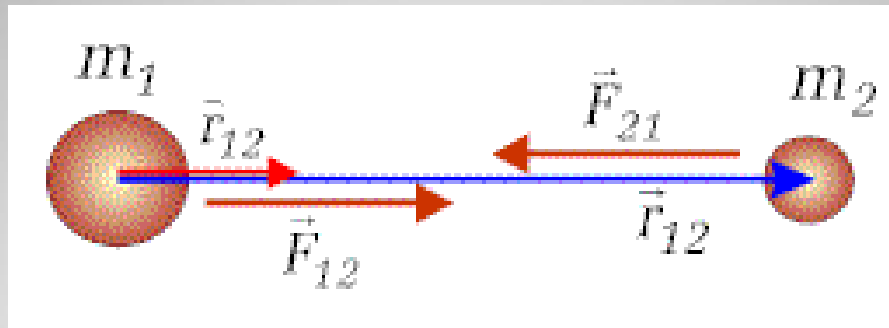
Dla dwóch planet:

$$\frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{T_2^2} \quad \text{lub} \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

3 prawa Keplera:

1. Planety poruszają się po torach eliptycznych. Słońce znajduje się w jednym z ognisk elipsy.
2. Promień wodzący planety zakreśla w tych samych przedziałach czasu te same pola.
3. Stosunek kwadratów czasów obiegu planet wokół Słońca równy jest stosunkowi trzecich potęg dużych półosi.

Prawo powszechnego ciążenia



Siła grawitacji między punktami materialnymi lub jednorodnymi kulami:

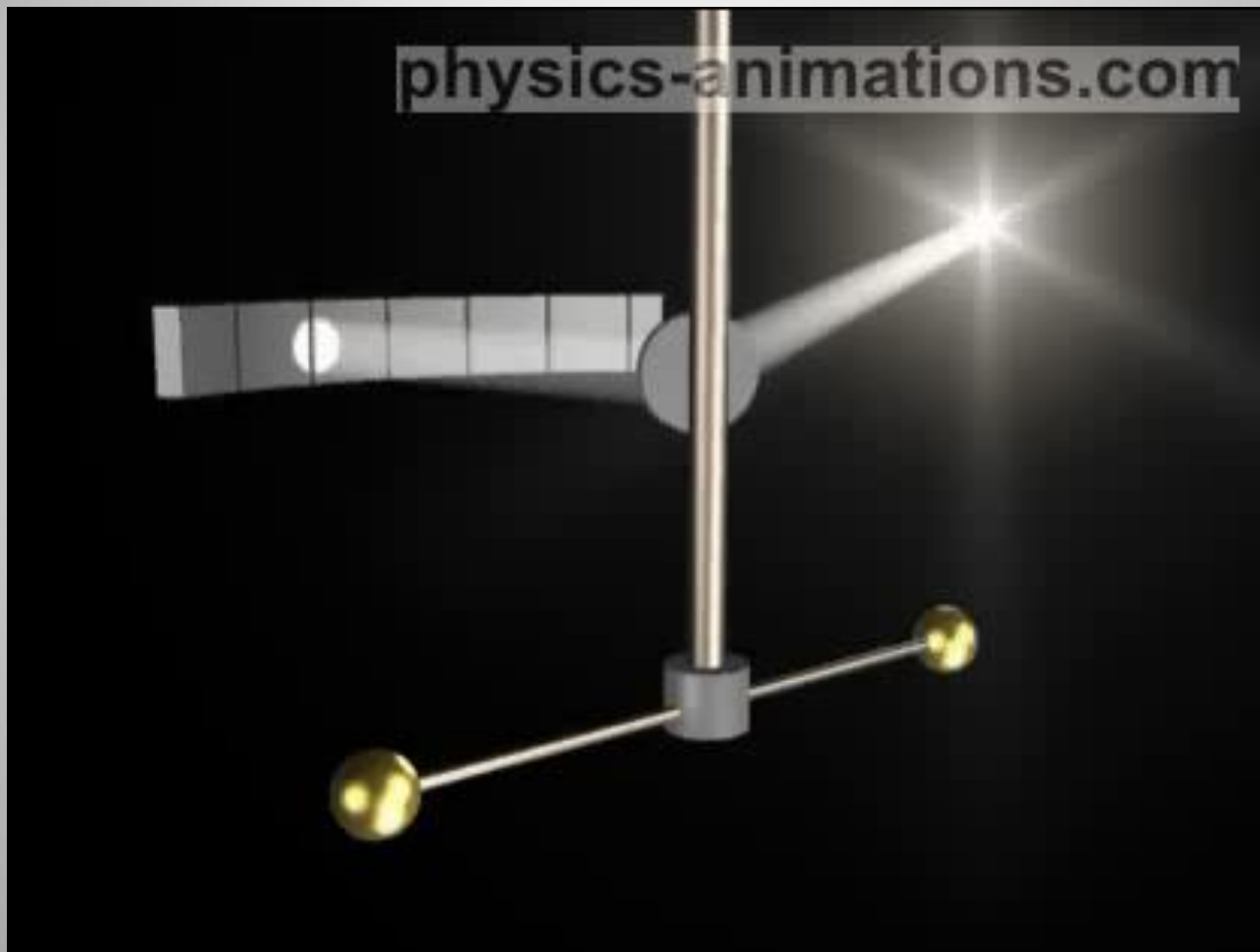
$$\vec{F}_{12} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

$$\hat{r}_{12} = \vec{r}_{12} / r_{12}$$

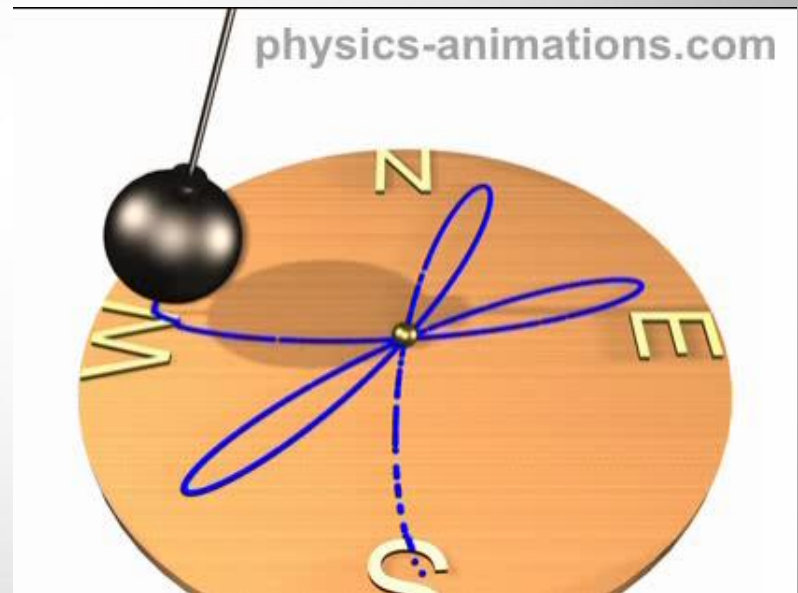
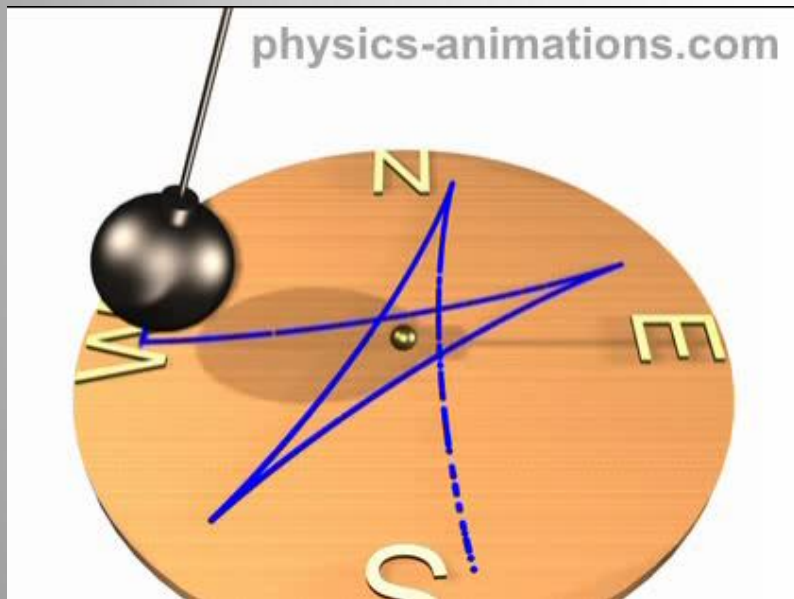
$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

$$G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

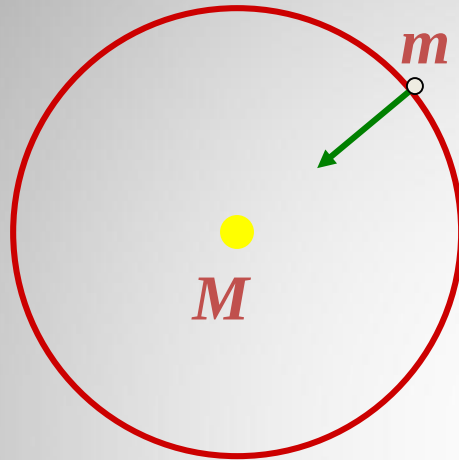
Doświadczenie Cavendisha



Dowód na ruch obrotowy Ziemi – wahadło Foucaulta



Prawa Keplera a prawo powszechnego ciążenia



Silą grawitacji jest siłą dośrodkową

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot \omega^2 \cdot r = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot m}{T^2} \quad \left| \cdot \frac{r^2}{4\pi^2 m} \right.$$

T – okres obiegu planety

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4 \cdot \pi^2} = \text{const}$$

Siła grawitacji wewnątrz jednorodnej kuli

Całą masę Ziemi dzielimy na 2 części:

1. Leżącą bliżej środka Ziemi niż ciało
2. Leżącą dalej od środka Ziemi

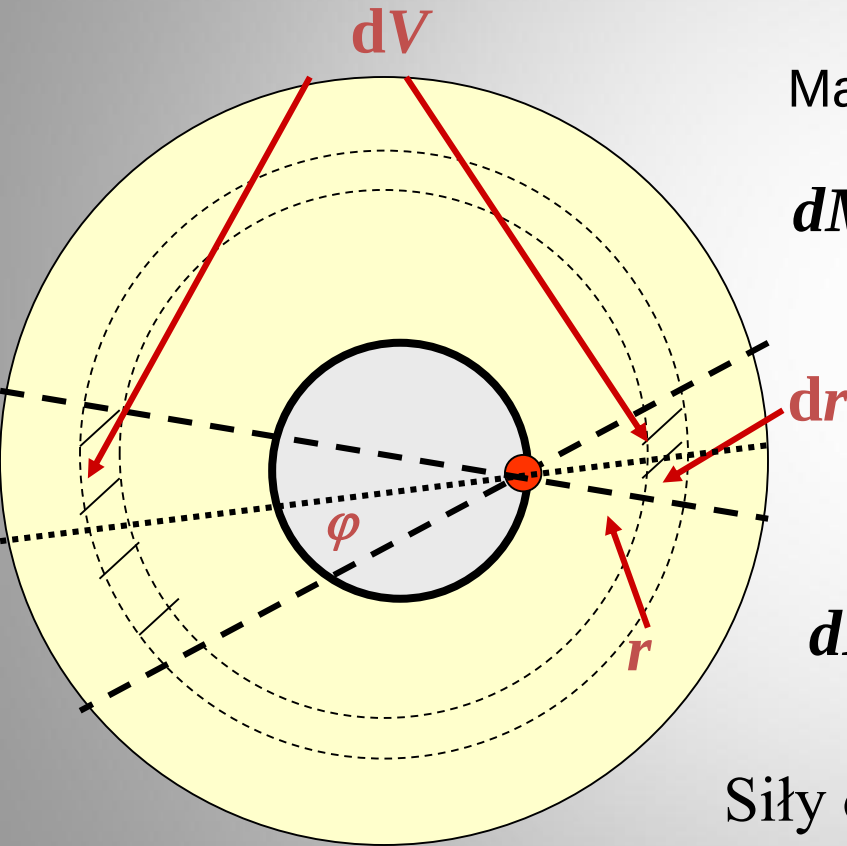
Masa Ziemi zawarta w elemencie dV :

$$dM = \rho \cdot dV = \rho \cdot \pi(\varphi \cdot r)^2 dr = \rho\pi\varphi^2 r^2 dr$$

Więc siła grawitacji od masy w elemencie dV działająca na ciało:

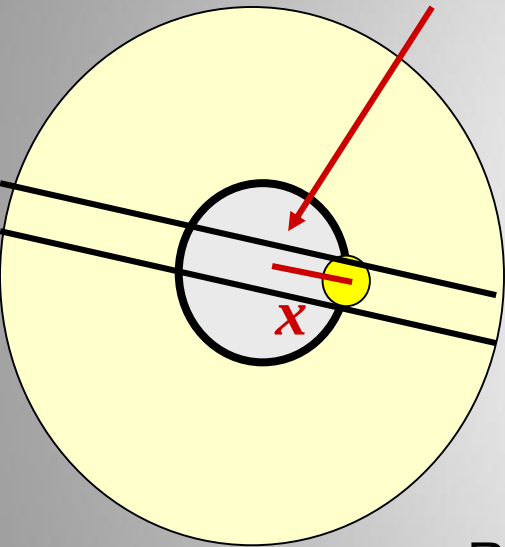
$$dF = \frac{G \cdot dM \cdot m}{r^2} \Rightarrow dF = \frac{Gm\rho\pi\varphi^2 \cancel{r^2} dr}{\cancel{r^2}}$$

Siły od przeciwległych elementów równoważą się.



Siła grawitacji wewnątrz jednorodnej kuli

Efektywna siła grawitacji pochodzi tylko od masy leżącej bliżej środka Ziemi niż ciało.



$$F = -\frac{G \cdot M(x) \cdot m}{x^2} = -\frac{G \cdot m}{\cancel{x^2}} \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot \cancel{x^3}}{3}$$

$$F = -\frac{4 \cdot \pi \cdot G \cdot m \cdot x}{3} = -k \cdot x$$

Ruch ciała wrzuconego do tunelu przechodzącego przez środek Ziemi – drgania harmoniczne.

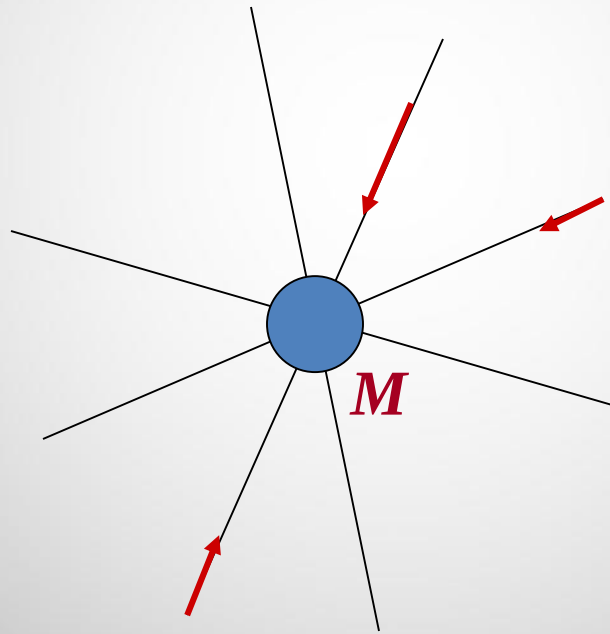
Natężenie pola grawitacyjnego

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{\gamma} = -G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F} = \vec{\gamma} \cdot m$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}$$



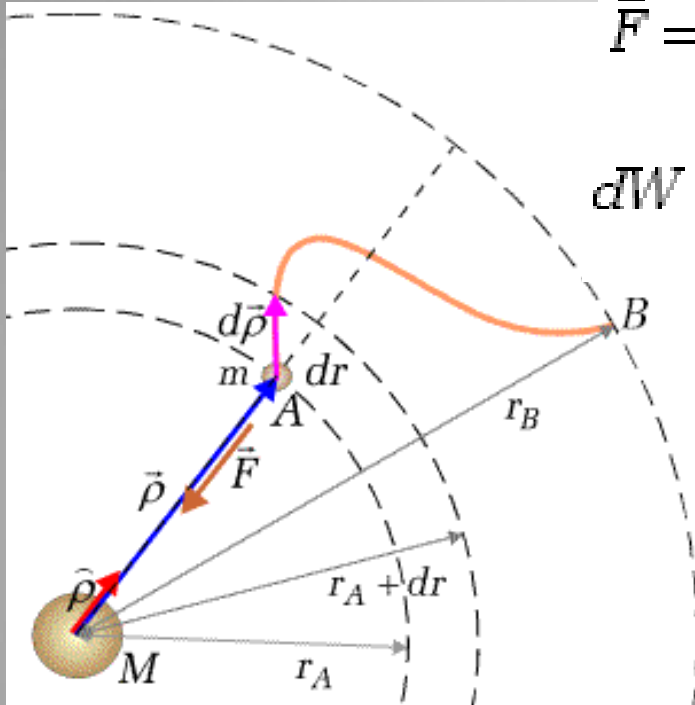
$$\vec{\gamma}(\vec{r}) = \vec{g}(\vec{r})$$

Praca sił grawitacyjnych

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \hat{\rho}$$

$$r = |\vec{\rho}|$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{\rho} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \hat{\rho} \cdot d\vec{\rho} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} dr$$



$$W = \int_{r_A}^{r_B} \left(-G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \right) dr = -G \cdot M \cdot m \cdot \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = G \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r} \Big|_{r_A}^{r_B} =$$

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r_B} - G \cdot \frac{M \cdot m}{r_A} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r_A} - \left(-G \cdot \frac{M \cdot m}{r_B} \right) = U_A - U_B$$

Energia potencjalna sił grawitacyjnych

$$W = \int_{r_A}^{r_B} \left(-G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \right) dr = -G \cdot M \cdot m \cdot \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = G \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r} \bigg|_{r_A}^{r_B} =$$
$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r_B} - G \cdot \frac{M \cdot m}{r_A} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r_A} - \left(-G \cdot \frac{M \cdot m}{r_B} \right) = U_A - U_B$$

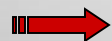
U_A

U_B

$$U = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r} + \text{const}$$

$$\boxed{U} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \boxed{\text{const}}$$

$\text{Const} = 0$

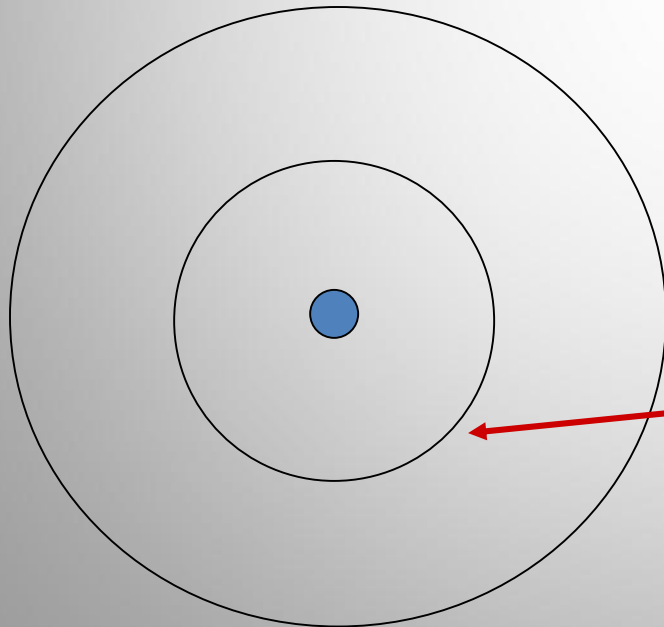


$$U = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

Potencjał pola grawitacyjnego

Potencjał - praca wykonana przez siły grawitacji przy przemieszczeniu punktu materialnego o jednostkowej masie z danego punktu pola do nieskończoności $\equiv$ energia potencjalna masy jednostkowej.

$$V = \frac{1}{m} \cdot \int_r^{\infty} dW = \frac{1}{m} \cdot \int_r^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -G \cdot M \cdot \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = -G \cdot M \cdot \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_r^{\infty} = -G \cdot \frac{M}{r} = V(r)$$

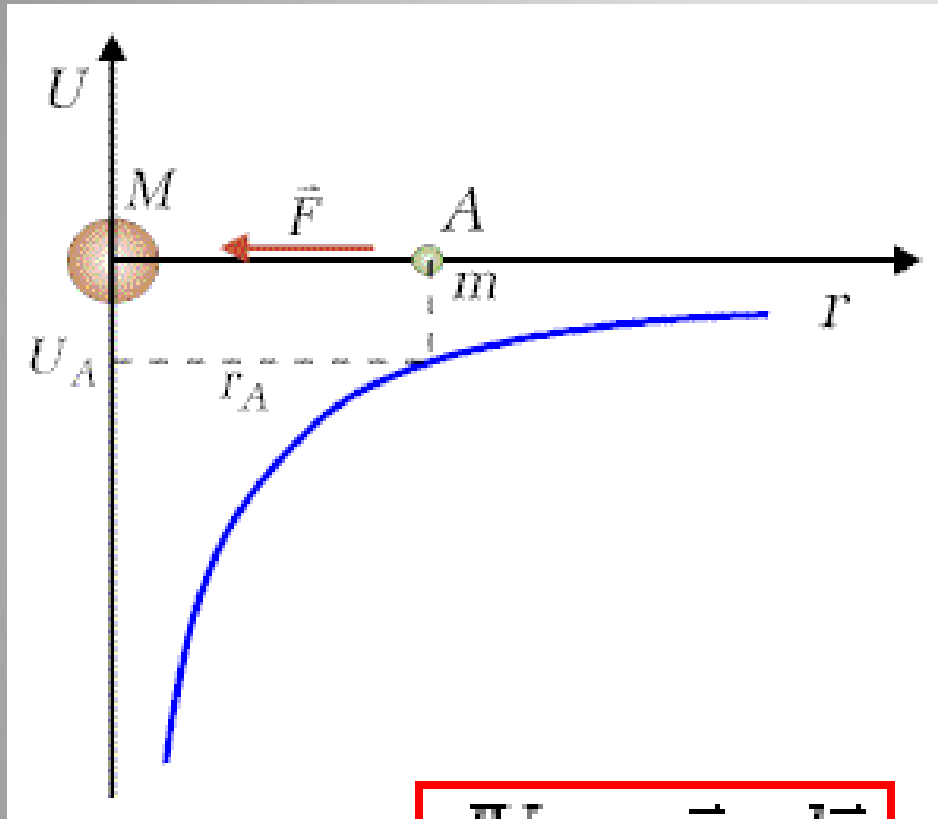


$$V(r) = -\frac{GM}{r}$$

Powierzchnie ekwipotencjalne

$$U = m \cdot V$$

Potencjał pola grawitacyjnego



$$V(r) = -\frac{GM}{r}$$

$$V(r) = \frac{1}{m} \cdot \int_r^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{\rho} = \int_r^{\infty} \vec{\gamma} \cdot d\vec{\rho}$$

$$\int_r^{\infty} dV = V(\infty) - V(r) = -V(r)$$

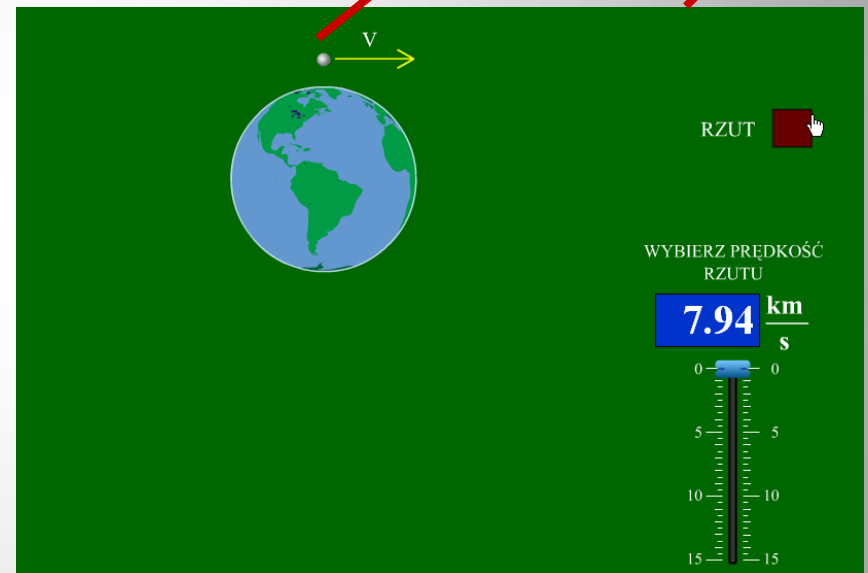
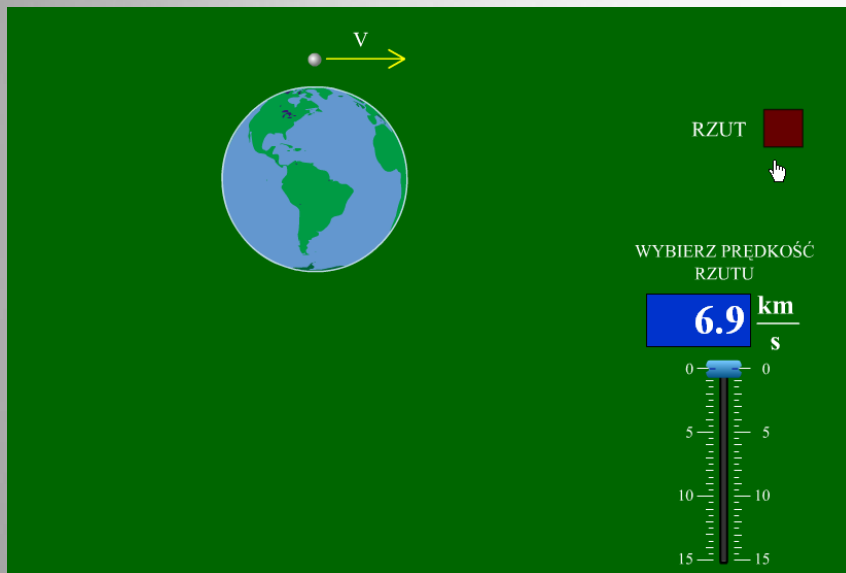
$$dV = -\vec{\gamma} \cdot d\vec{\rho}$$

Wektor natężenia pola grawitacyjnego jest prostopadły do powierzchni ekwipotencjalnej i jest skierowany od powierzchni o potencjale wyższym do powierzchni o potencjale niższym.

Pierwsza prędkość kosmiczna

Siła przyciągania grawitacyjnego jest równoważona przez siłę odśrodkową:

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$



$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

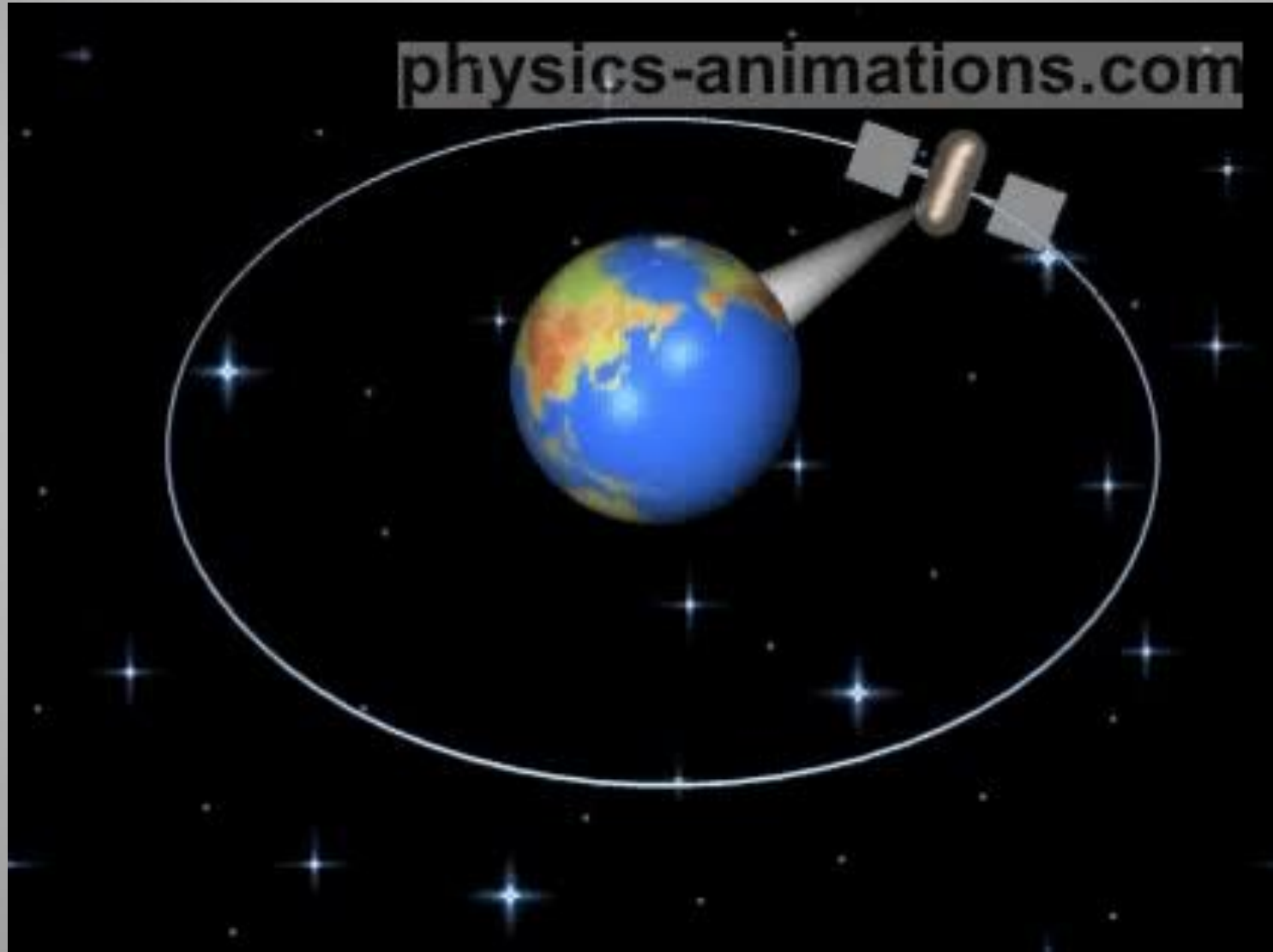
Pierwsza prędkość kosmiczna

Pierwszą prędkością kosmiczną nazywamy najmniejszą możliwą prędkość jaką musi mieć punkt materialny krążący wokół Ziemi na orbicie bliskiej promieniowi Ziemi.

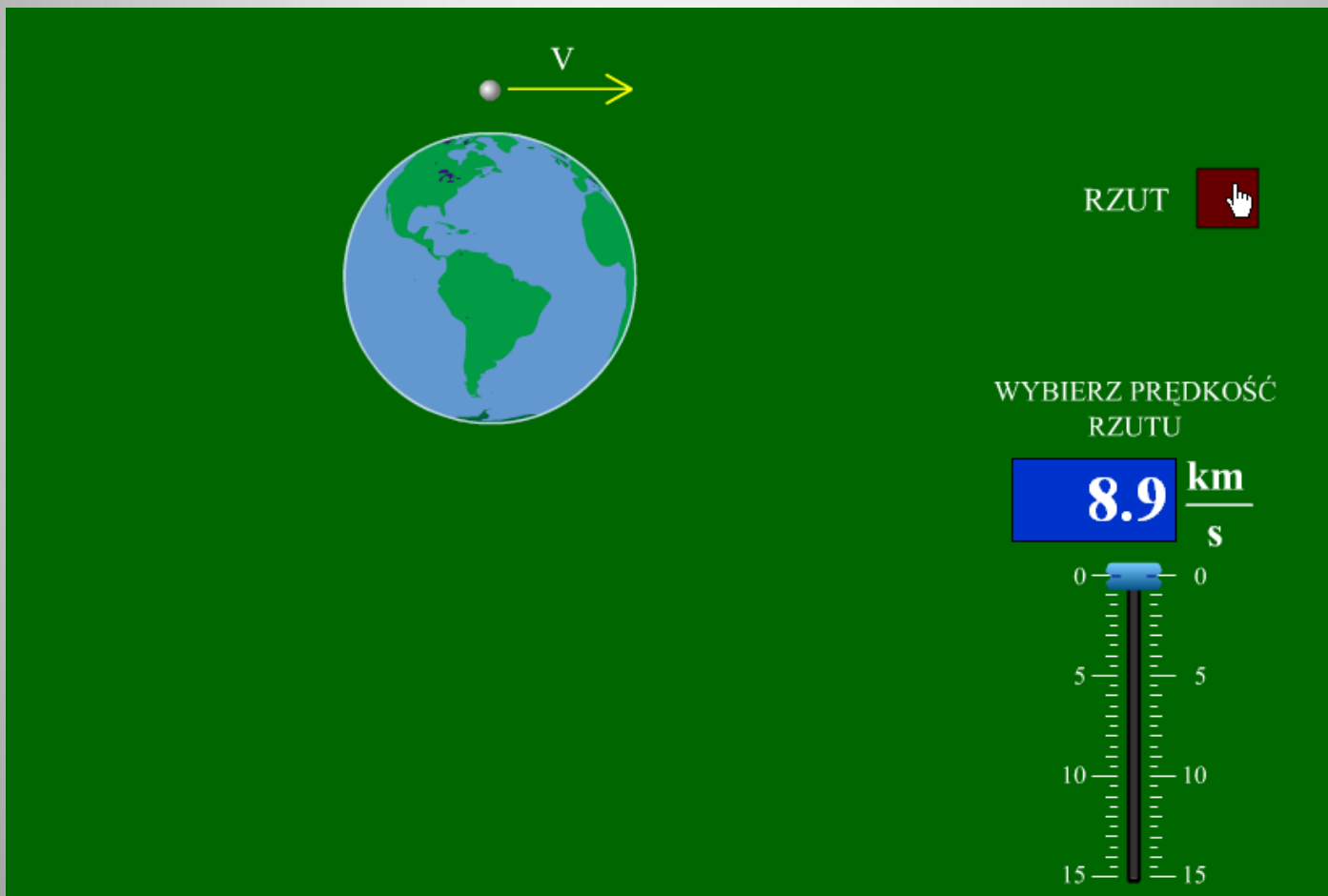
$$\frac{m \cdot v_1^2}{R} = m \cdot g$$

$$v_1 = \sqrt{R \cdot g} \approx 7.9 \text{ km/s}$$

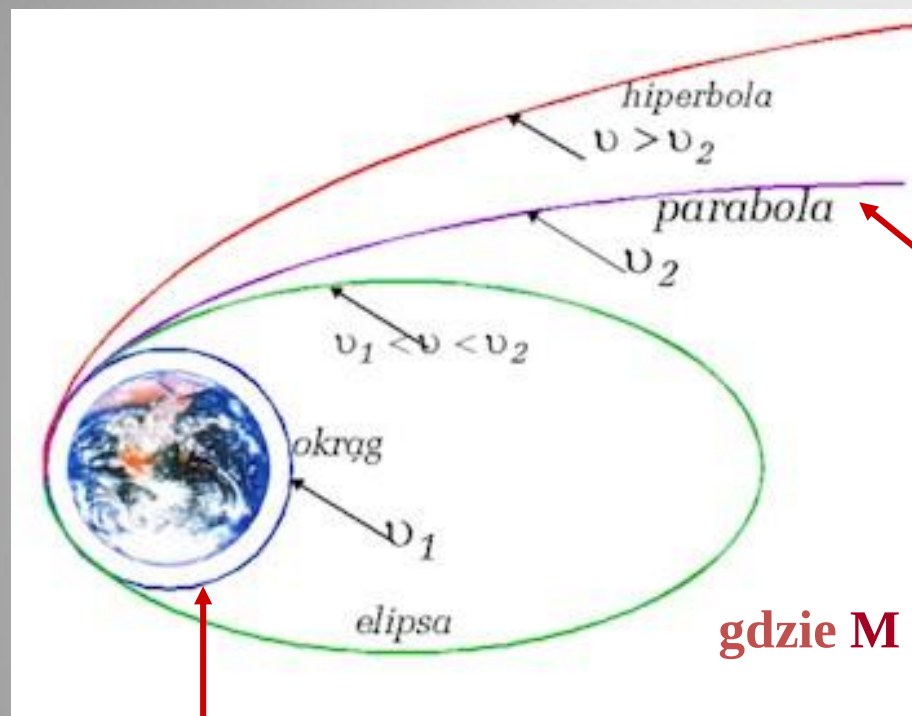
Sztuczne satelity Ziemi



Druga prędkość kosmiczna



Druga prędkość kosmiczna



$$\frac{m \cdot v_2^2}{2} = G \cdot \frac{m \cdot M}{R}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}}$$

gdzie **M** – masa Ziemi, **R** – odległość od Ziemi

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Druga prędkość kosmiczna - najmniejsza prędkość, która umożliwia punktowi materialnego pokonanie siły grawitacji ziemskiej i oddalenie się w przestrzeń kosmiczną.

Trzecia prędkość kosmiczna

Trzecia prędkość kosmiczna - najmniejszą prędkość, która umożliwia punktowi materialnego pokonanie siły grawitacji Słońca i opuszczenie układu słonecznego.

$$v_3 = \sqrt{\frac{2GM_s}{R}}$$

gdzie M_s – masa Słońca, R – odległość od Słońca

Zasada równoważności

Masa grawitacyjna Ziemi

Masa grawitacyjna ciała

$$F = G \cdot \frac{M_{zg} \cdot m_g}{R_Z^2}$$

$$a = \frac{F}{m_b}$$

Masa bezwładna ciała

$$a = G \cdot \frac{M_{zg}}{R_Z^2} \cdot \frac{m_g}{m_b}$$

Przyspieszenie ziemskie jednakowe dla każdego ciała. $\Rightarrow$

Stosunek $\frac{m_g}{m_b}$ stały

Zasada równoważności

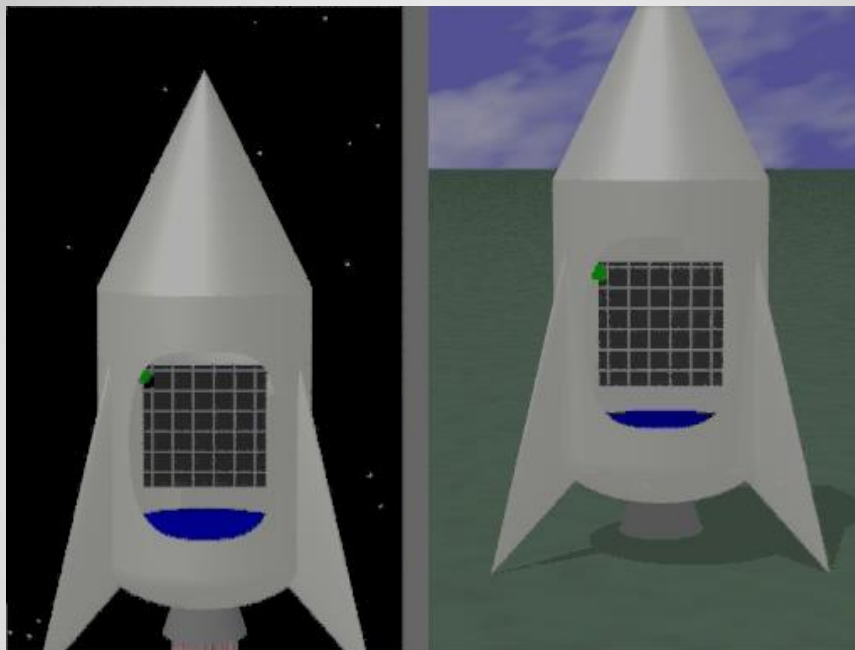
Można tak dobrać stałą grawitacji, aby:

$$m_b = m_g$$

Zjawisk wywołanych działaniem sił grawitacji nie można w skali lokalnej odróżnić od zjawisk wywołanych działaniem sił bezwładności

Ogólna teoria względności

Zasada równoważności

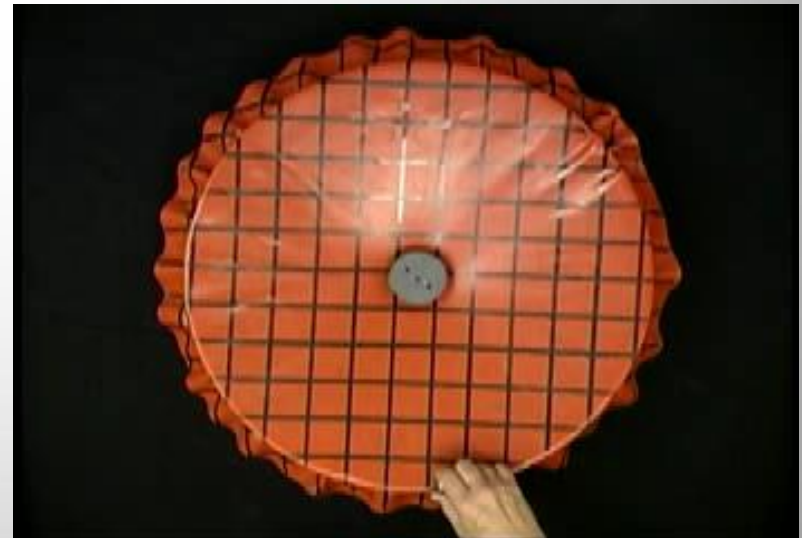
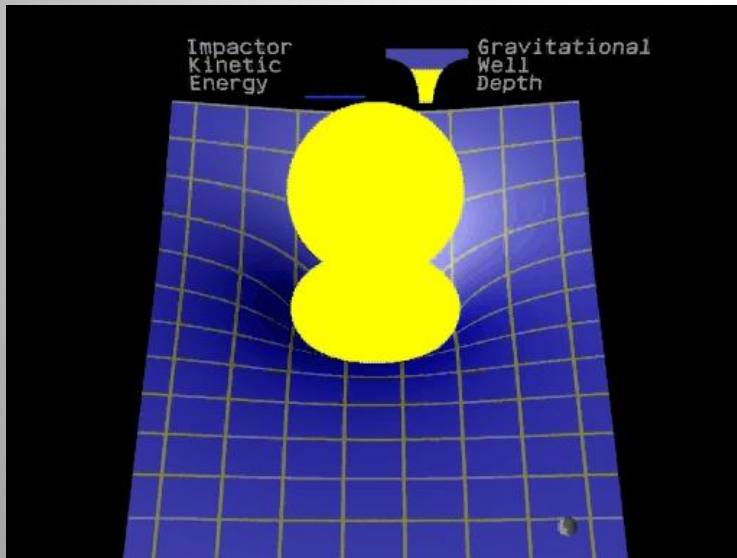


Nie można odróżnić czy rakieta porusza się w próżni z przyspieszeniem g czy stoi na Ziemi gdzie przyspieszenie ziemskie wynosi g

Ogólna Teoria Względności

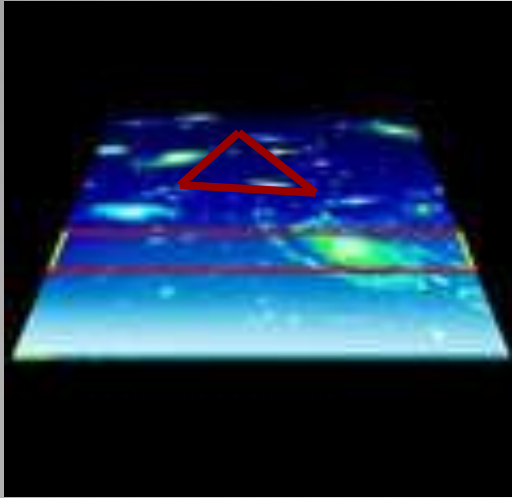
Równoważność siły grawitacji i siły bezwładności w układzie nieinercyjnym

- Pole grawitacyjne równoważne zakrzywieniu czasoprzestrzeni



Geometria Wszechświata

Geometria płaska

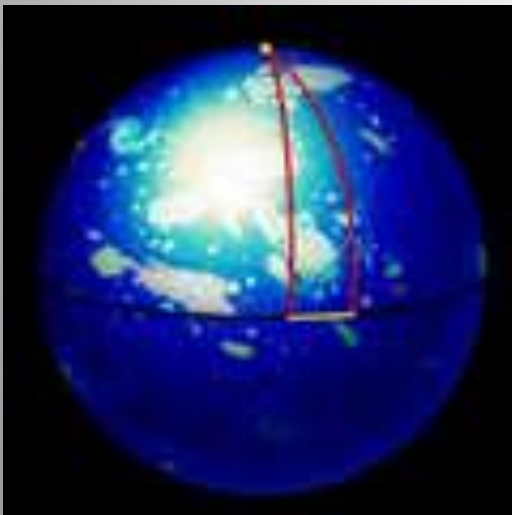


model: dwuwymiarowa płaszczyzna

Suma kątów w trójkącie równa jest 180^0

Linie równoległe nie przecinają się

Geometria sferyczna



model: powierzchnia kuli –
krzywizna dodatnia

Suma kątów w trójkącie równa jest większa niż 180^0

Linie równoległe przecinają się (przykład: południki)

Soczewki grawitacyjne

Zakrzywienie czasoprzestrzeni oznacza, że najkrótszą linią łączącą dwa punkty jest linia krzywa – światło w pobliżu dużej masy nie porusza się po prostej!

Doświadczalne potwierdzenie Ogólnej Teorii Względności:

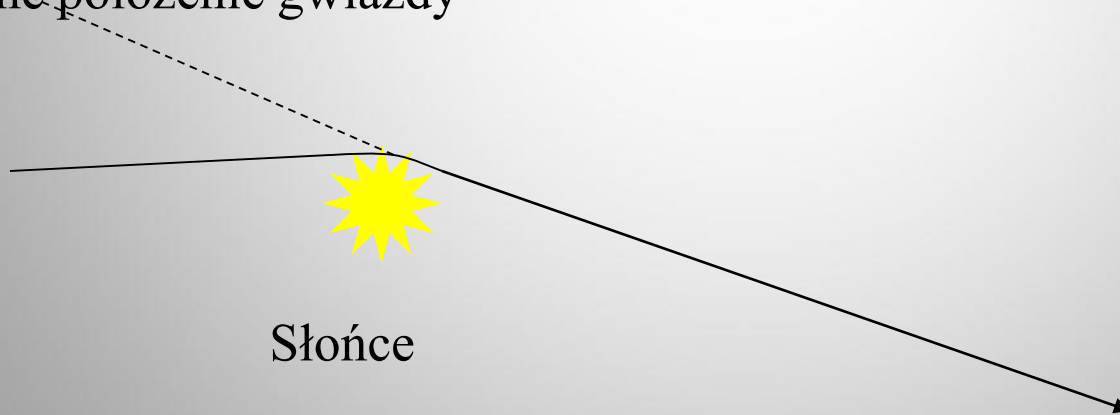
W 1919 r. zaobserwowano w czasie zaćmienia Słońca ugięcie promieni świetlnych biegnących od odległej gwiazdy.

Pozorne położenie gwiazdy

Gwiazda

Słońce

Obserwator



Soczewki grawitacyjne

