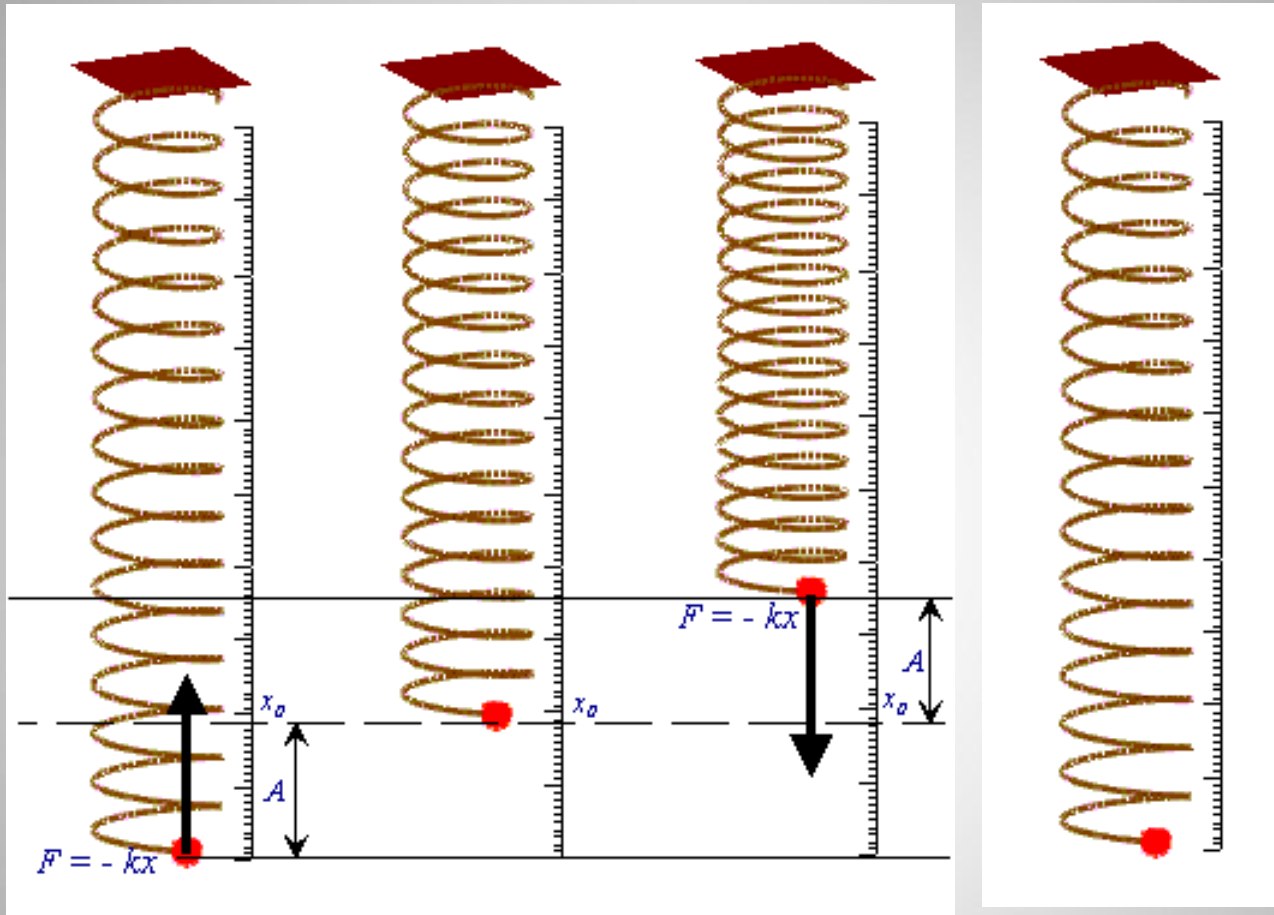


FIZYKA

Drgania

Równanie ruchu harmonicznego



$$F = -kx$$

Równanie ruchu harmonicznego

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$$

Szukamy funkcji $x(t)$, która spełni to równanie

Równanie ruchu harmonicznego

$$x(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$$

$$\frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$-\omega^2 A \sin(\omega \cdot t + \varphi) = -\frac{k}{m} A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

Wielkości opisujące ruch harmoniczny

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

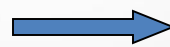
ω - częstość ruchu harmonicznego

$$x(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

amplituda

faza początkowa

Okresem funkcji sin jest 2π



$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha$$

$$\omega \cdot T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

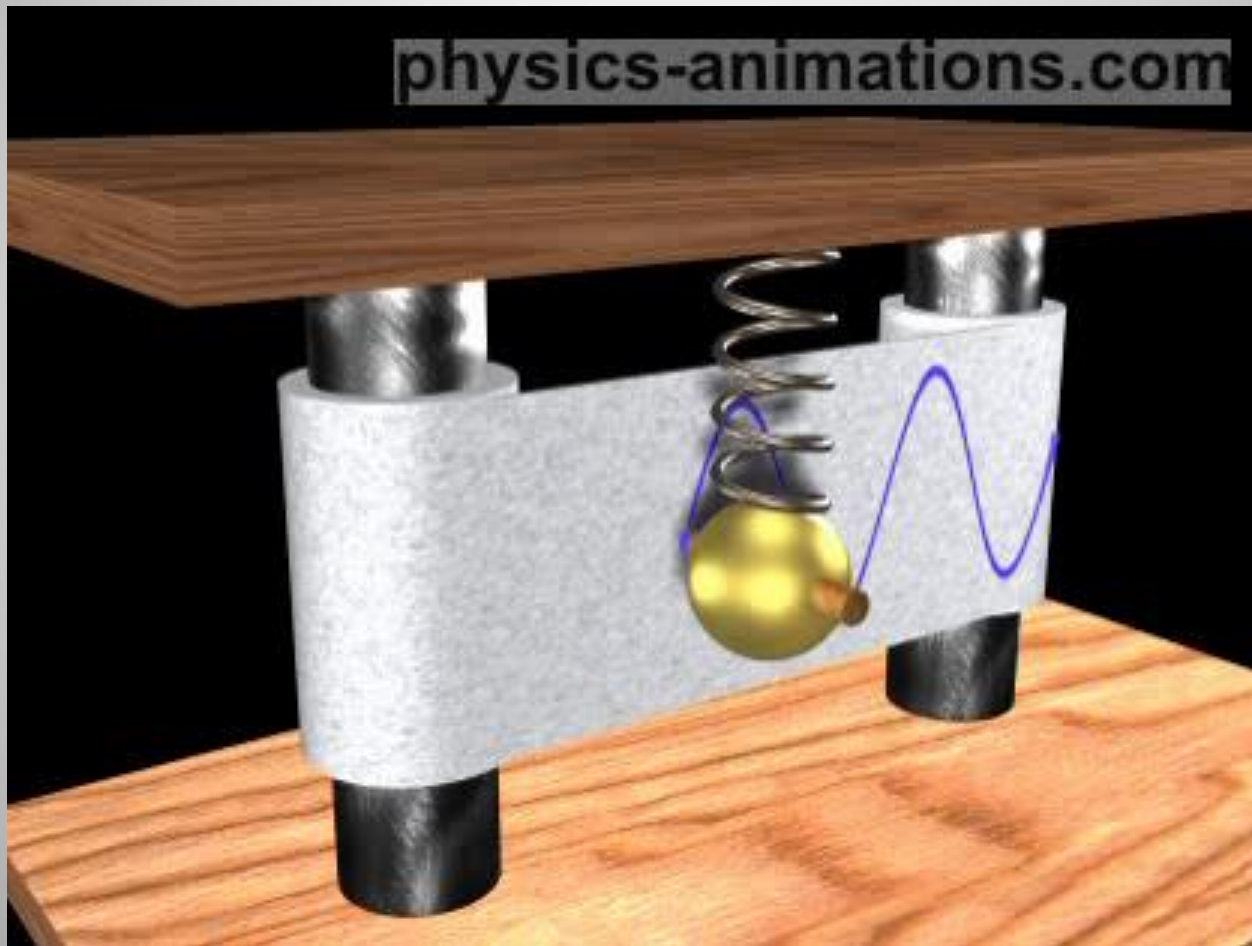
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

f - częstotliwość ruchu
Jednostka: Hz [s^{-1}]

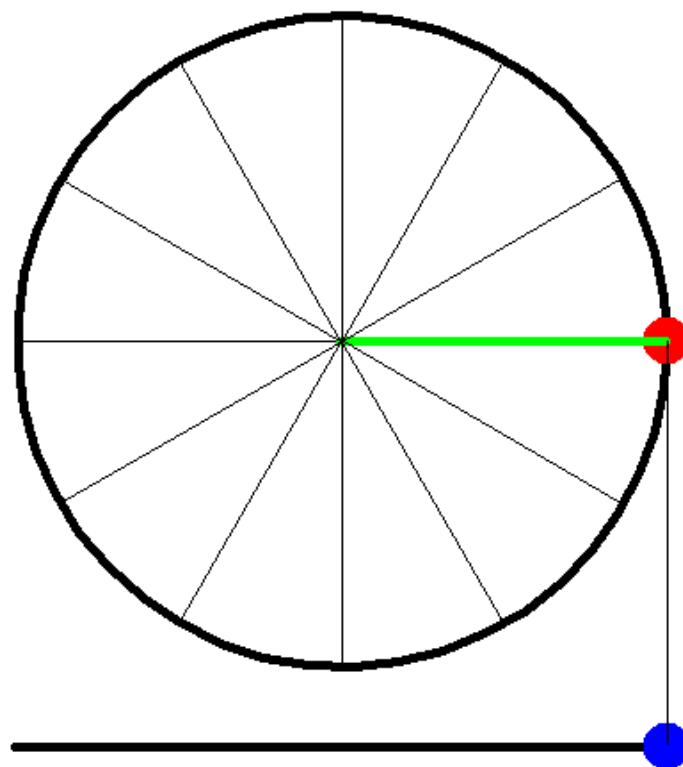
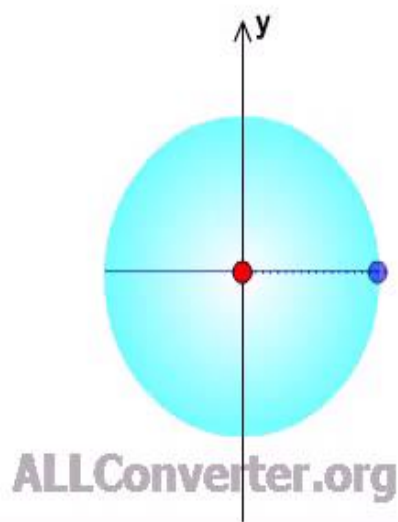
$$\omega = 2\pi f$$

Przykłady ruchu harmonicznego

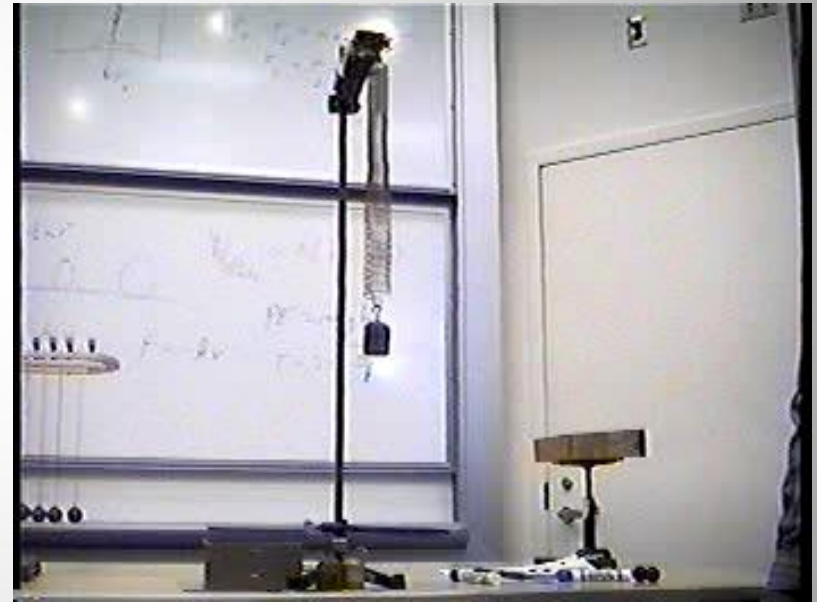


Ruch harmoniczny a ruch po okręgu

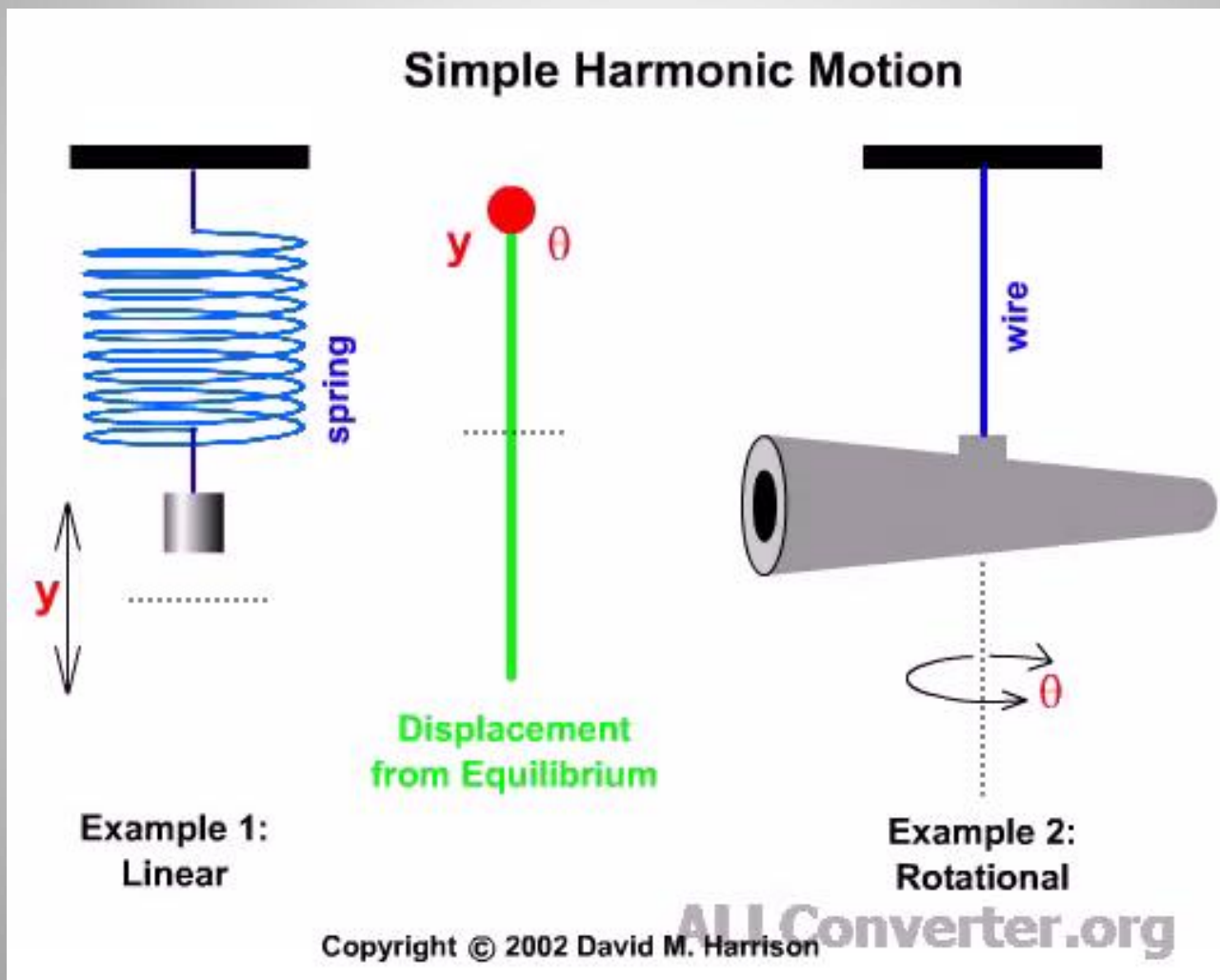
One Component of Uniform Circular Motion ...



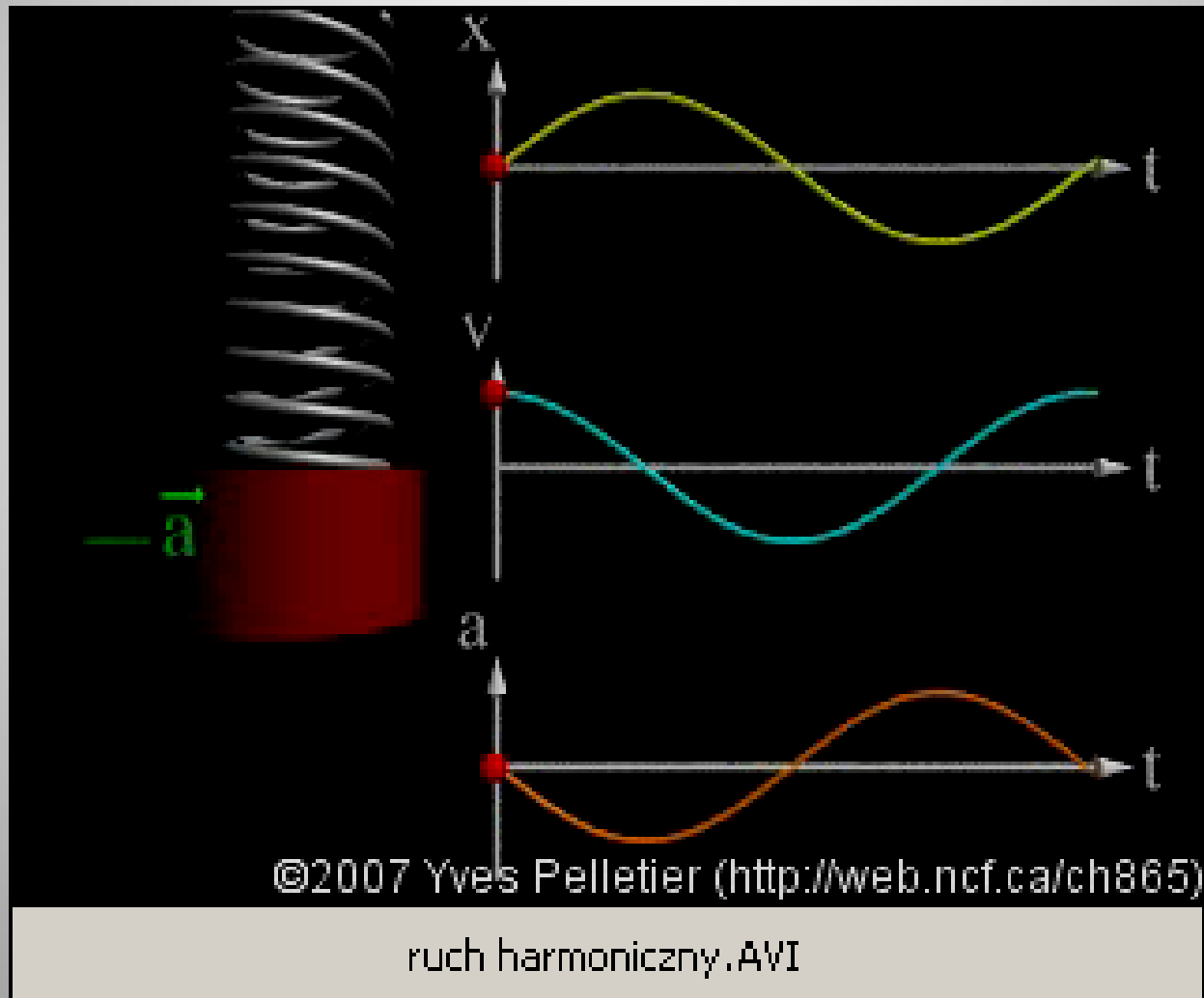
Przykłady ruchu harmonicznego



Przykłady ruchu harmonicznego



Różnica faz między położeniem, prędkością i przyspieszeniem

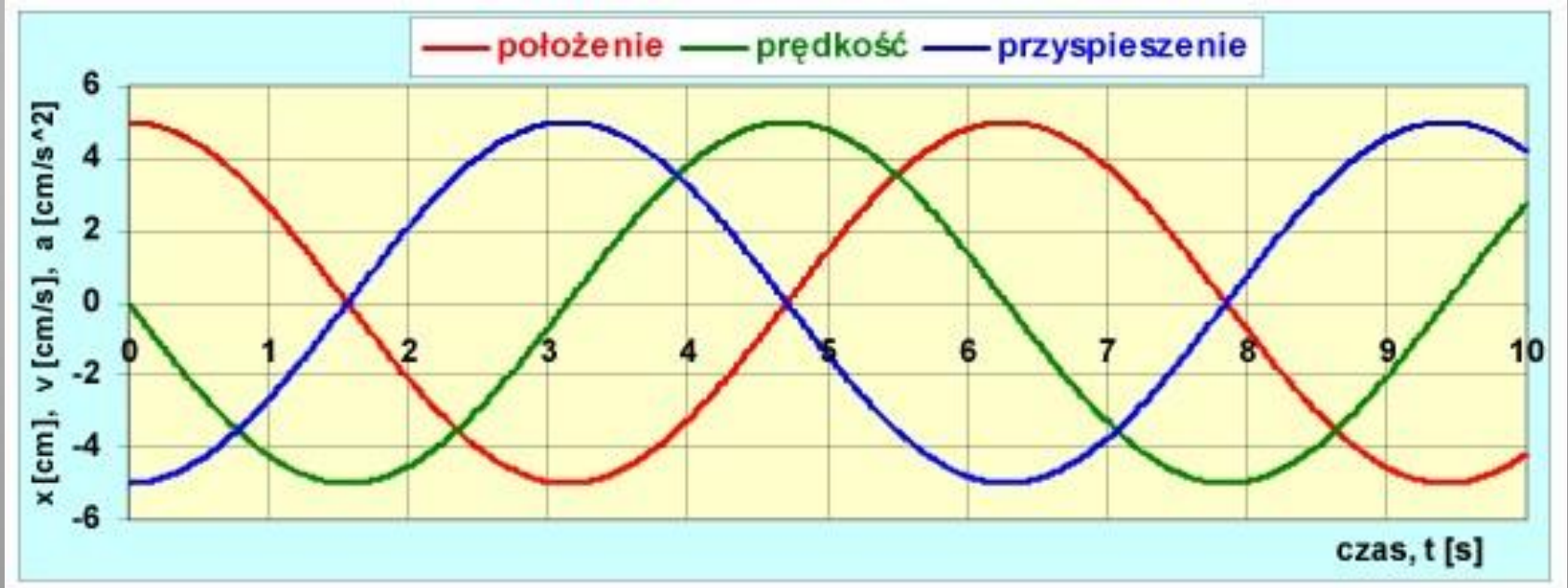


Różnica faz między położeniem, prędkością i przyspieszeniem

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$x(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$



Energia potencjalna w ruchu harmonicznym

$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}$$

$$dE_p(x) = -F(x) \cdot dx$$


$$F = -kx$$

$$E_p(x) = -\int_0^x (-k \cdot x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi)}{2}$$

Energia kinetyczna w ruchu harmonicznym

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}{2}$$

Note: A red box highlights the term $m\omega^2$ in the numerator of the second fraction, with a red arrow pointing to it from the text $= k$ above.

$$E_k = \frac{kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}{2}$$

Energia całkowita w ruchu harmonicznym

$$E = E_p + E_k = \frac{kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi)}{2} + \frac{kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}{2}$$

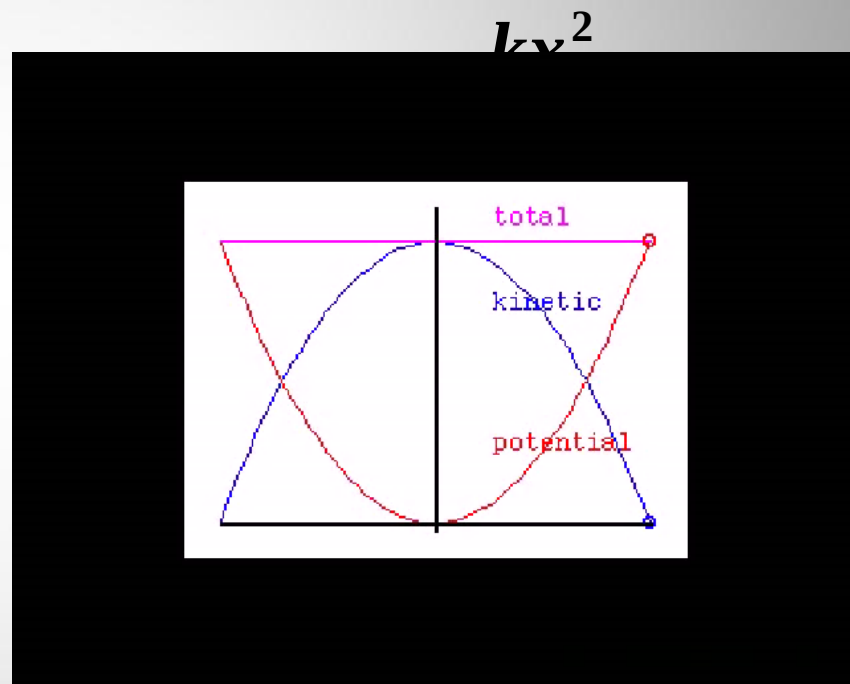
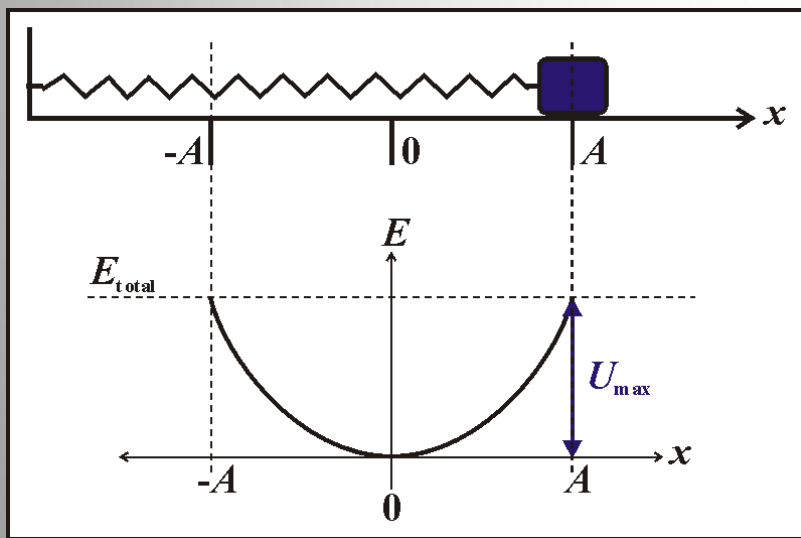
$$E = \frac{kA^2}{2} [\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)] = \frac{kA^2}{2}$$

$$E = \frac{kA^2}{2}$$

Zmiany energii

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{m}{2} \cdot A^2 \omega^2 [1 - \sin^2(\omega t + \varphi)]$$

$$E_k = \frac{m\omega^2 A^2}{2} - \frac{m\omega^2}{2} \cdot x^2$$



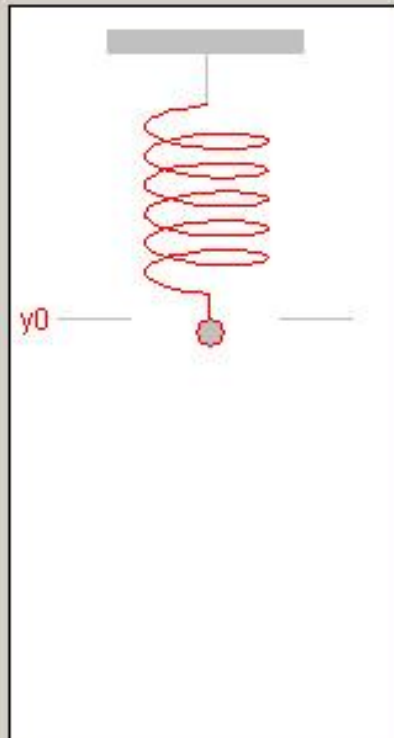
Zmiany energii

Start Pauza Kontynuacja Koniec Pomoc

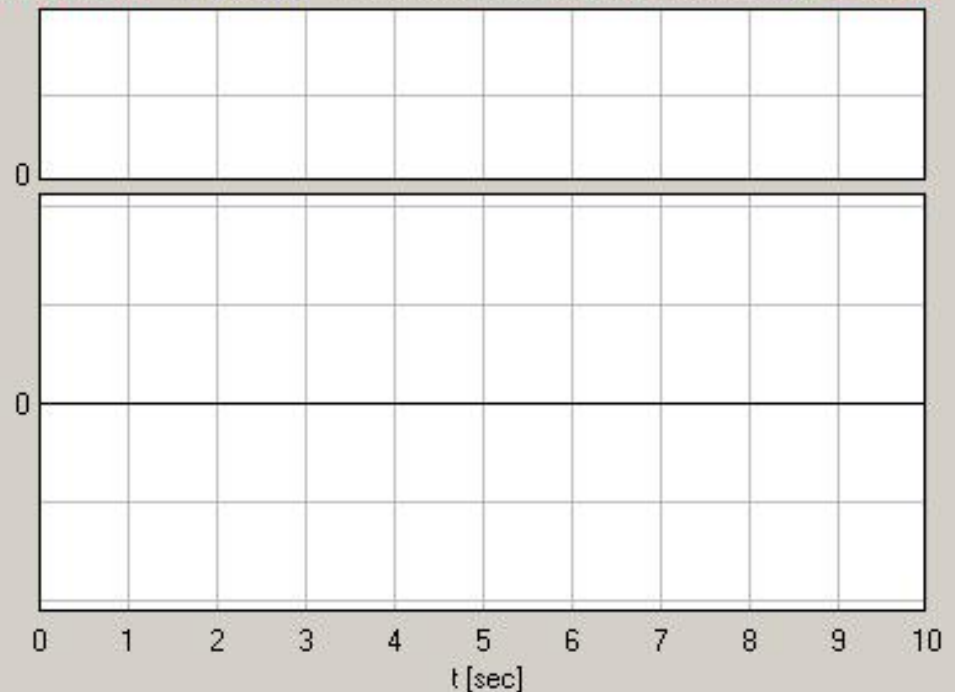
Masa = 0.010 [kg]
◀ ▶

$k = 0.10$ [N/m]
◀ ▶

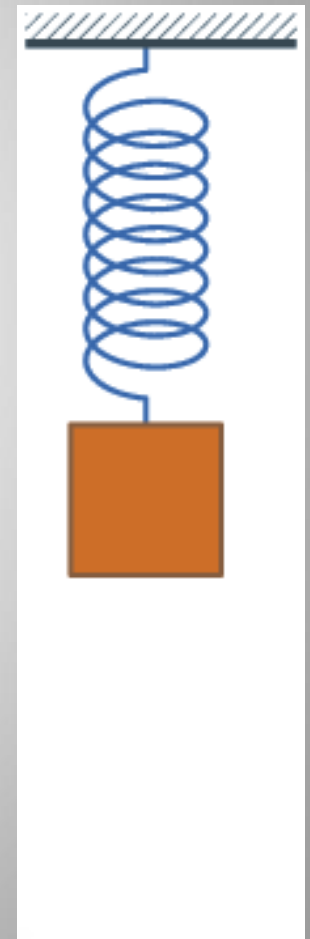
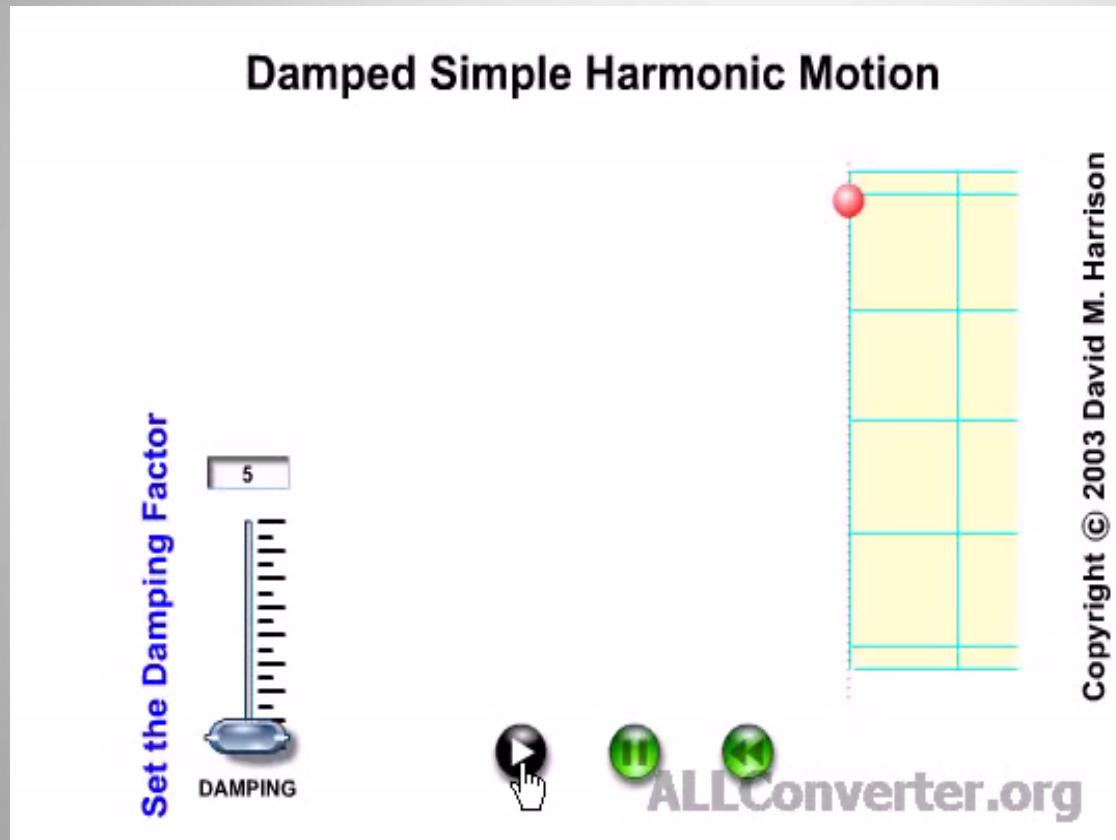
Amplituda = 0 %
0 ▶ Max



Wychylenie Prędkość Energia: kinetyczna, potencjalna, całkowita



Ogania harmoniczne tłumione



Drgania harmoniczne tłumione

$$F = -kx - b \frac{dx}{dt} \quad \leftarrow \text{Siła tłumiąca}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$x(t) = Ae^{-\beta \cdot t} \sin(\omega' t + \varphi) = A' \sin(\omega' t + \varphi)$$

$$\beta = \frac{b}{2m}$$

β - współczynnik tłumienia

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$$

Częstość mniejsza
od częstości własnej.

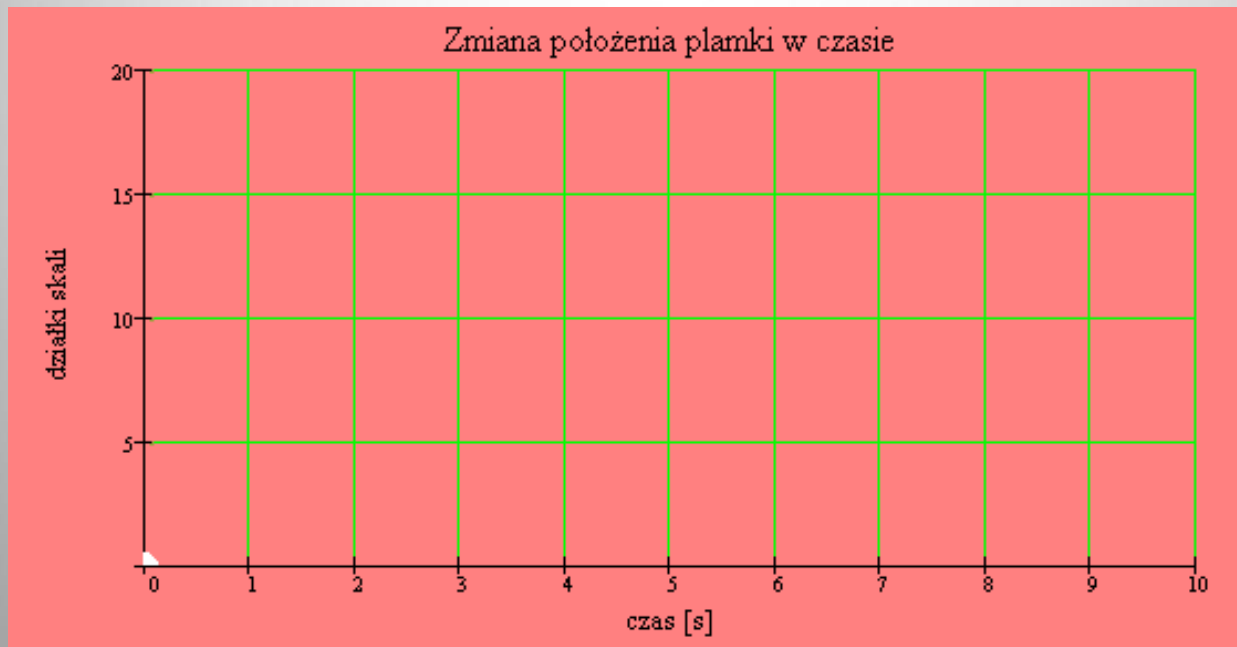
Drgania harmoniczne tłumione

Tłumienie zwiększa okres:

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}$$

Amplituda zmniejsza się w czasie wykładniczo:

$$A' = A \cdot e^{-\beta \cdot t}$$



Logarytmiczny dekrement tłumienia

$$A' = A \cdot e^{-\beta \cdot t}$$

Amplitudy dla kolejnych okresów drgań:

$$A_0 = A \quad A_1 = A \cdot e^{-\beta \cdot T} \quad A_2 = A \cdot e^{-2 \cdot \beta \cdot T}$$

$$A_n = A \cdot e^{-n \cdot \beta \cdot T} \quad A_{n+1} = A \cdot e^{-(n+1) \cdot \beta \cdot T} = A \cdot e^{-n \cdot \beta \cdot T} \cdot e^{-\beta \cdot T}$$

Logarytmiczny dekrement tłumienia:

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A e^{-n \beta T}}{A e^{-n \beta T} \cdot e^{-\beta T}} = e^{\beta T}$$

$$\delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \beta \cdot T$$

$$A' = A \cdot e^{-\frac{\delta}{T} \cdot t}$$

Drgania harmoniczne tłumione

$$T' = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}$$

$$\omega^2 - \beta^2 > 0$$

Zachodzą drgania, których charakter zależy od wartości współczynnika tłumienia.

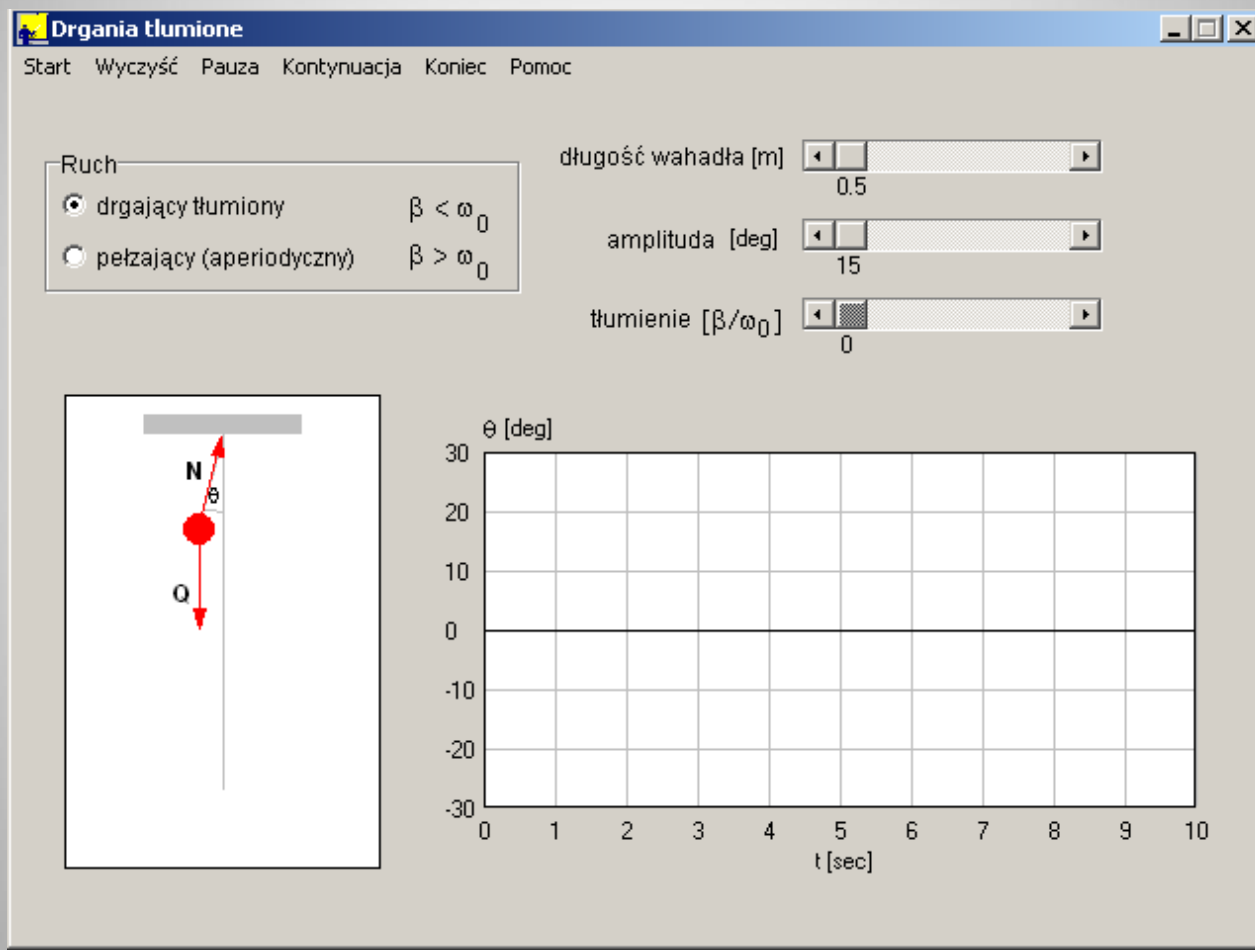
$$\omega^2 - \beta^2 < 0$$

Układ nie wykonuje drgań, ale wraca do stanu równowagi w sposób aperiodyczny.

$$\omega^2 - \beta^2 = 0$$

Układ nie wykonuje drgań (tłumienie krytyczne) następuje jedno przejście przez położenie równowagi

Drgania harmoniczne tłumione



Drgania harmoniczne wymuszone

Siła wymuszająca:

$$F_w = F_0 \cos(\omega_w \cdot t)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\omega_w \cdot t)$$

Rozwiązanie:

$$x = A_0 \sin(\omega_w \cdot t - \varphi)$$

gdzie:

$$A_0 = \frac{F_0}{\sqrt{m^2 (\omega_w^2 - \omega^2)^2 + b^2 \omega_w^2}}$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega_w \frac{b}{m}}{\omega_w^2 - \omega^2}$$

Amplituda zależy od tej różnicy



Rezonans

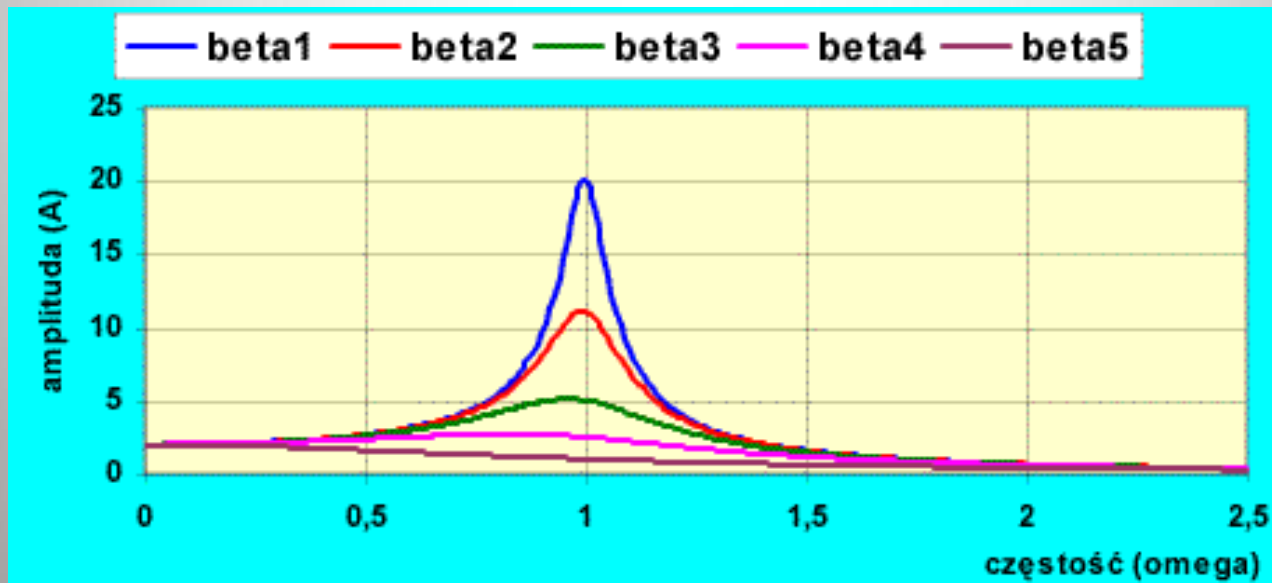
Największa wartość amplitudy, gdy:

$$\frac{dA_0}{d\omega_w} = 0$$

wtedy:

$$\omega_w = \sqrt{\omega^2 - \frac{b^2}{2m^2}} = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2}$$

beta



Rezonans

Driven Simple Harmonic Oscillator

Mass: **1.0 kg**
Frequency of driver: **0.20 Hz**
Natural frequency of spring-mass: **0.35 Hz**
Damping constant γ : **0.2 kg/sec**

The damping force
is $= -\gamma v$.



Rewind: 

All Converter.org
Copyright © 2004 David M. Harrison

Driven Simple Harmonic Oscillator

Mass: **1.0 kg**
Frequency of driver: **0.20 Hz**
Natural frequency of spring-mass: **0.20 Hz**
Damping constant γ : **0.2 kg/sec**

The damping force
is $= -\gamma v$.



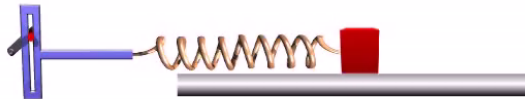
Rewind: 

All Converter.org
Copyright © 2004 David M. Harrison

Driven Simple Harmonic Oscillator

Mass: **1.0 kg**
Frequency of driver: **0.20 Hz**
Natural frequency of spring-mass: **0.23 Hz**
Damping constant γ : **1.0 kg/sec**

The damping force
is $= -\gamma v$.



Rewind: 

All Converter.org
Copyright © 2004 David M. Harrison

Driven Simple Harmonic Oscillator

Mass: **1.0 kg**
Frequency of driver: **0.20 Hz**
Natural frequency of spring-mass: **0.10 Hz**
Damping constant γ : **0.2 kg/sec**

The damping force
is $= -\gamma v$.



Rewind: 

All Converter.org
Copyright © 2004 David M. Harrison

Rezonans

Driven Mechanical Oscillator

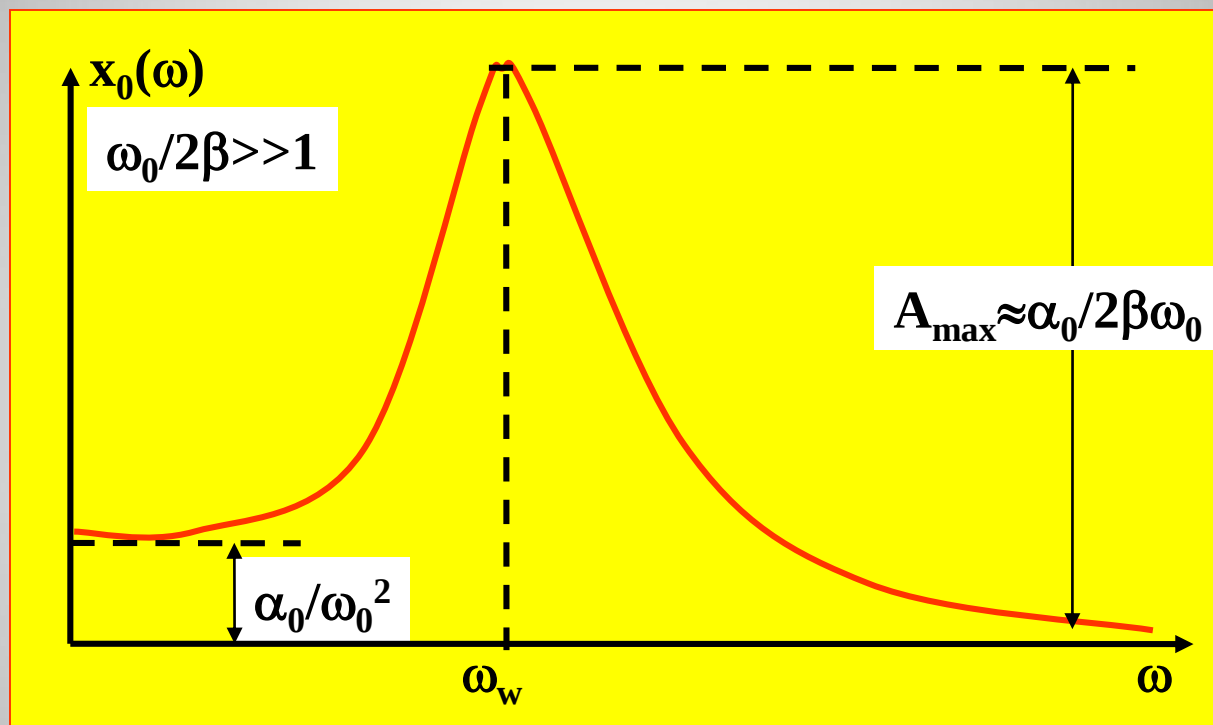
MIT Physics Lecture
Demonstration Group



Rezonans



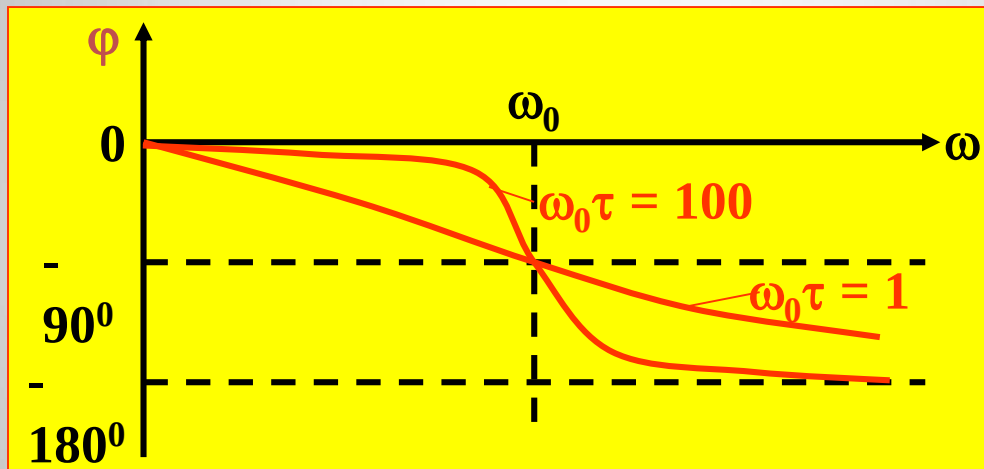
Parametry krzywej rezonansowej



Dokładniejsza analiza krzywej rezonansu wykazuje, że nie jest ona symetryczna.

Krzywa fazowa rezonansu

kąt fazowy φ zmienia się z częstotliwością drgań oscylatora



Kąt ten jest zawsze ujemny, co oznacza, że wychylenie jest zawsze opóźnione w stosunku do siły wymuszającej. Dla częstotliwości równej ω_0 przesunięcie to wynosi 90° . Dla dużych częstotliwości wychylenie może być przeciwne do siły wymuszającej, czyli 180° .

Współczynnik dobroci oscylatora harmonicznego

Dla układów drgających, a w szczególności elektrycznych mówi się często o współczynniku dobroci Q .

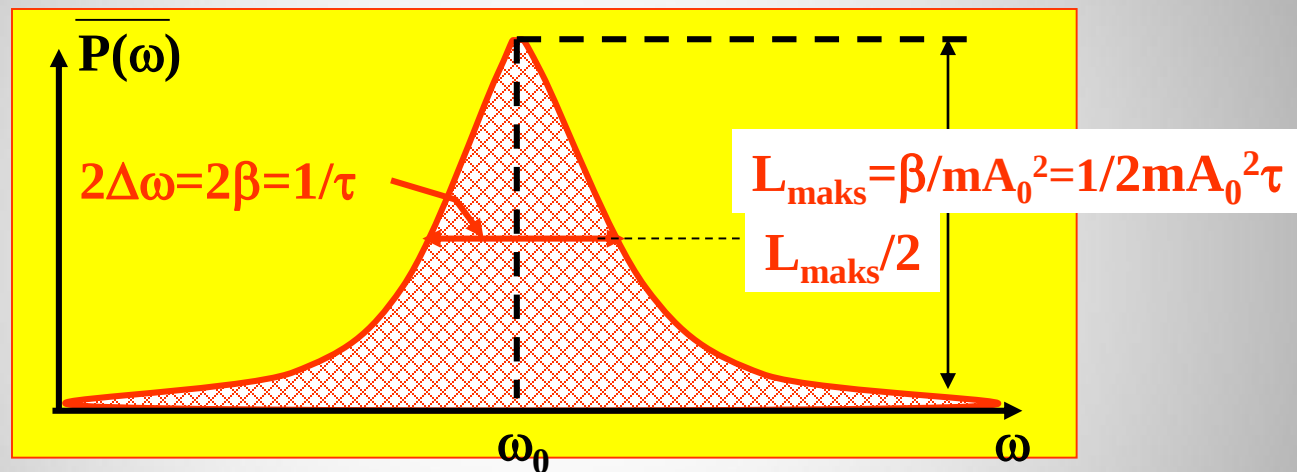
Współczynnik ten definiuje się jako odwrotność względnej straty energii przypadającej na jeden okres

$$Q = \frac{E(t)}{E(t) - E(t + T)}$$

Można pokazać, że dla oscylatora harmonicznego tłumionego drgającego zgodnie z równaniem (10.8) jest dla przypadku gdy $\omega_0 \tau \gg 1$ dane przez;

$$Q = \omega_0 \tau \qquad Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

Moc absorbowana przez układ drgający



Krzywa rezonansowa średniej absorbowanej mocy spada do zera po obu stronach częstości rezonansowej. Szerokość linii rezonansowej decyduje o ostrości tej linii.

Zachodzi również;

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0\tau} = \frac{1}{Q}$$

Składanie drgań równoległych

$$x_a = A \cos[\omega \cdot t]$$

$$x_b = A \cos[(\omega + \Delta\omega) \cdot t]$$

$$x = x_a + x_b = \left[2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t\right) \right] \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

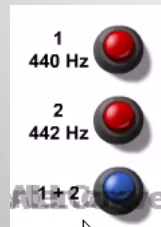
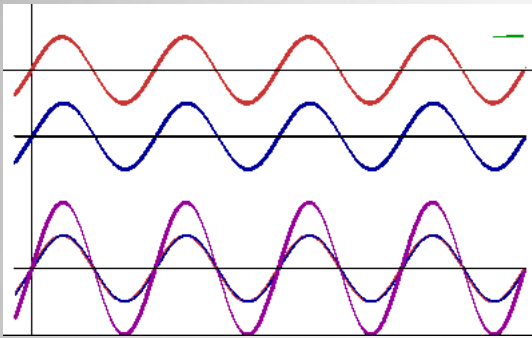
$$\Delta\omega \ll \omega$$

Amplituda

Ruch okresowy - gdy częstości składowych ruchów spełniają warunek:

$$\frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{n_a}{n_b}$$

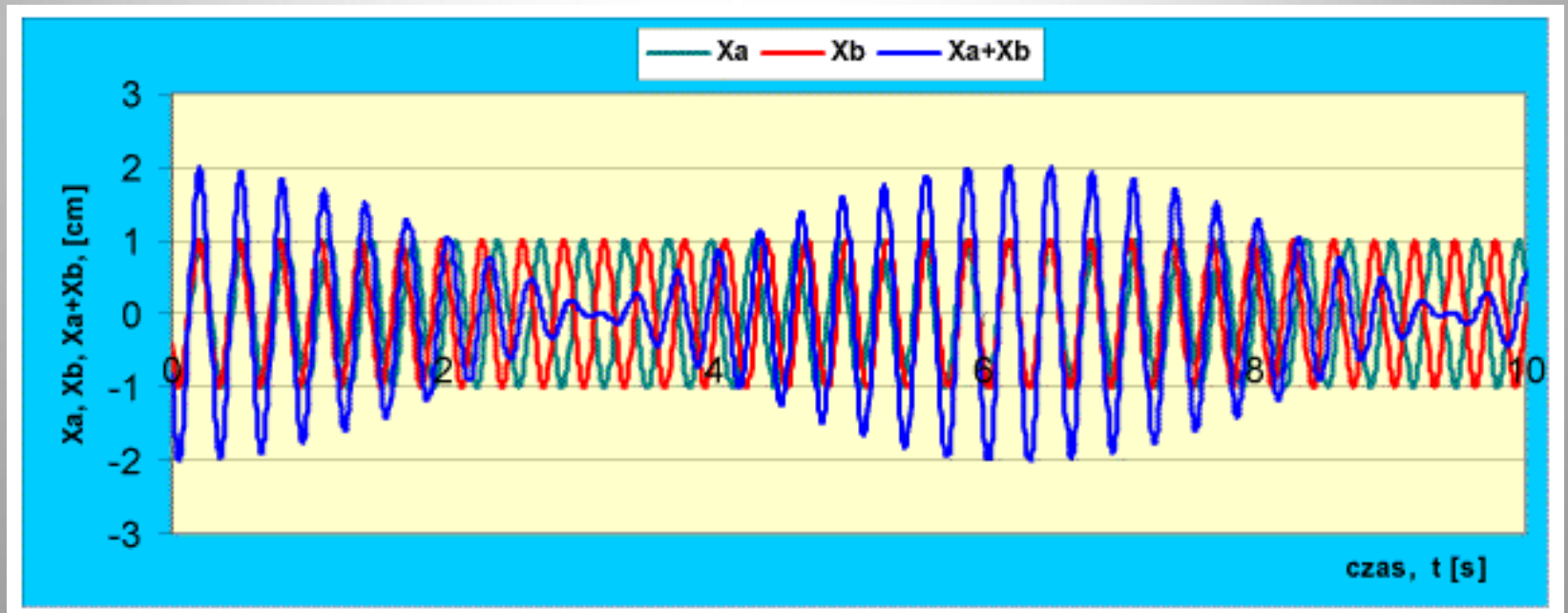
Składanie drgań równoległych



Składanie drgań równoległych

Dudnienia

$$x = x_a + x_b = \left[2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t\right) \right] \cdot \cos(\omega \cdot t)$$



Składanie drgań prostokątnych

$$x = A_x \sin(\omega_x t)$$

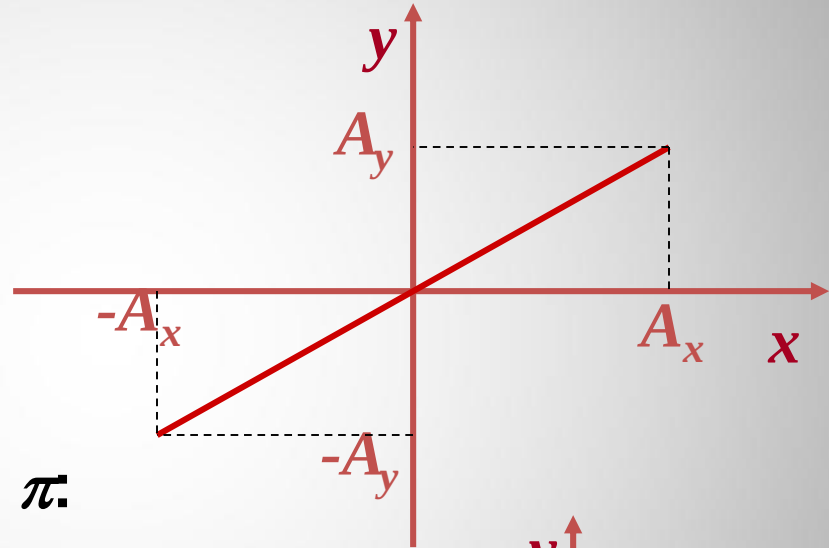
$$y = A_y \sin(\omega_y t + \varphi)$$

Gdy częstości równe i $\varphi = 0$:

$$y = A_y \sin(\omega t)$$

$$x = A_x \sin(\omega t)$$

$$y = \frac{A_y}{A_x} \cdot x$$

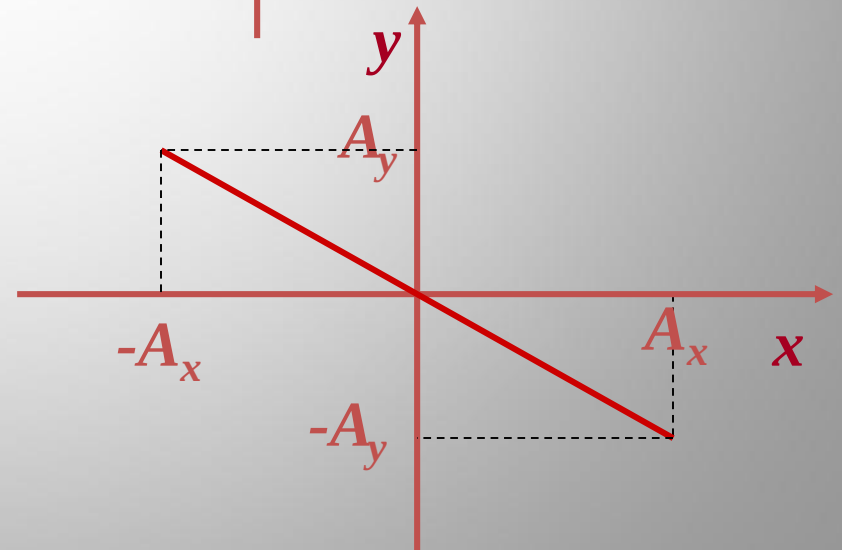


Gdy częstości równe i $\varphi = \pi$:

$$y = -A_y \sin(\omega t)$$

$$x = A_x \sin(\omega t)$$

$$y = -\frac{A_y}{A_x} \cdot x$$



Składanie drgań prostopadłych

Gdy częstotności równe i $\varphi = \pm\pi/2$:

$$y = \pm A_y \sin(\omega t)$$

$$x = A_x \cos(\omega t)$$

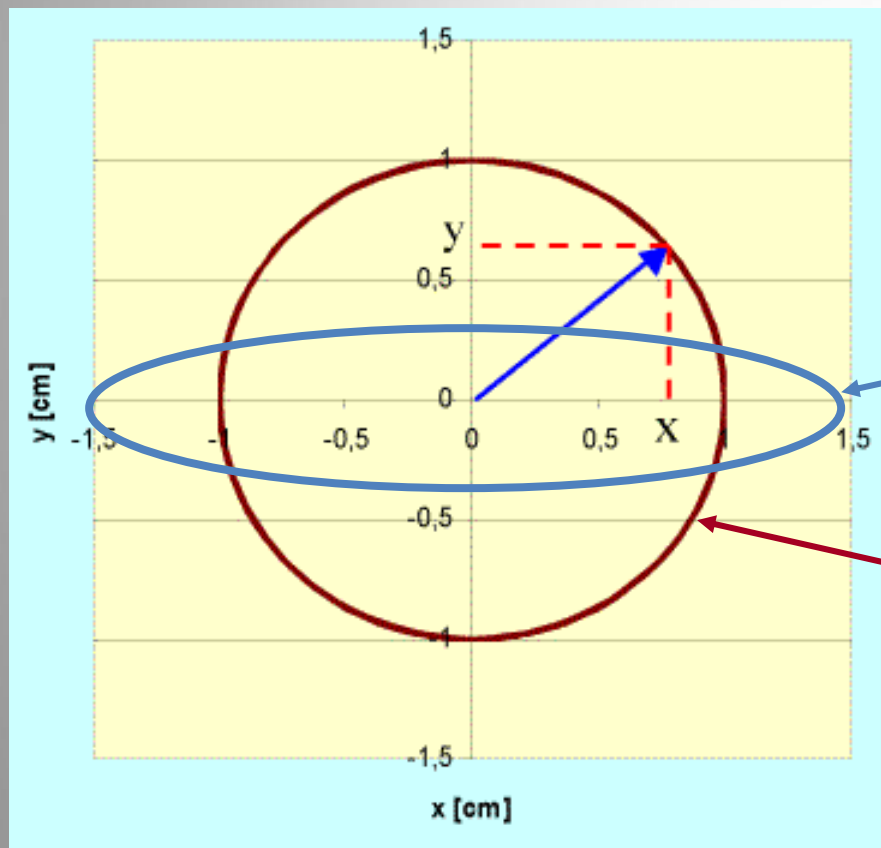
$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1$$

Elipsa

$$A_x = A_y = A$$

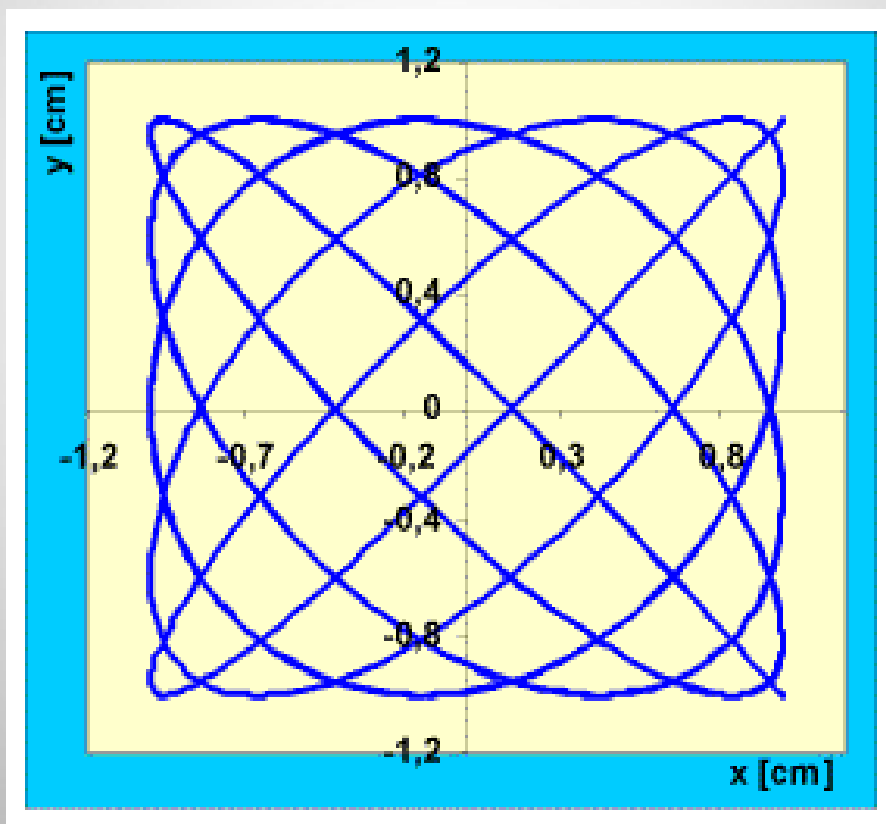
Równanie okręgu

$$x^2 + y^2 = A^2$$



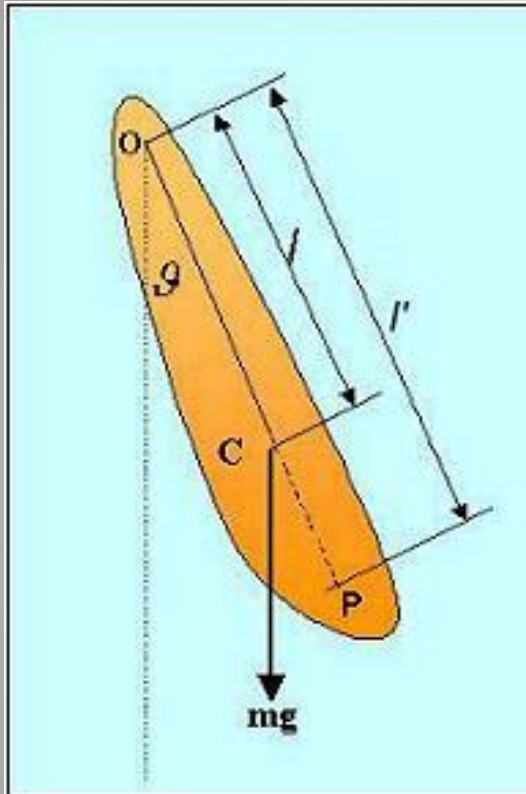
Figury Lissajou

Stosunek liczby stychnych do obu boków: $w_x/w_y = n_x/n_y$



Przykłady ruchu harmonicznego

Wahadło



l - odległość punktu zawieszenia O od środka masy ciała C ,

ϑ - kąt odchylenia ciała od pionu,

ε - przyspieszenie kątowe ciała,

I - moment bezwładności ciała względem punktu zawieszenia,

m - masa ciała,

g - przyspieszenie ziemskie.

$$M = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin \vartheta$$

Wahadło

$$I \cdot \varepsilon = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin \vartheta$$

$$\varepsilon = \frac{d^2 \vartheta}{dt^2}$$

$$I \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin \vartheta$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -\frac{m \cdot g \cdot l}{I} \cdot \sin \vartheta$$

Dla małych kątów:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -\omega^2 \cdot \vartheta$$

gdzie:

$$\omega^2 = \frac{m \cdot g \cdot l}{I}$$

Wahadło

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot l}}$$

$$T' = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l'}{g}}$$

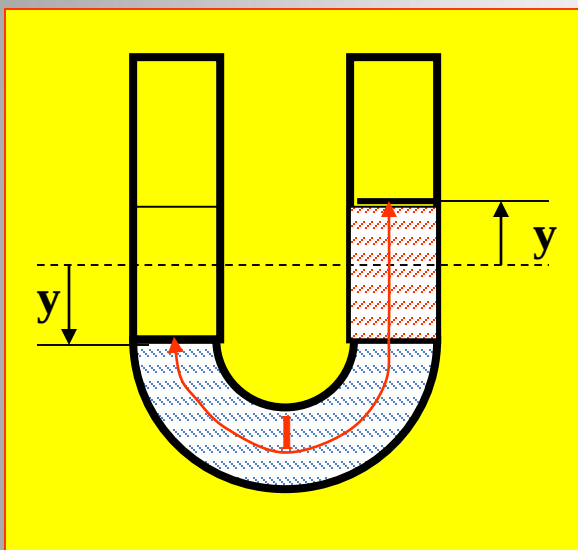
l' – długość zredukowana

$$T' = T$$

$$\frac{I}{m \cdot g \cdot l} = \frac{l'}{g}$$

$$l' = \frac{I}{m \cdot l}$$

Przykłady ruchu harmonicznego- ciekłe wahadło



Jeśli rurkę o kształcie **U** i stałym przekroju **S** napelnimy cieczą o gęstości ρ , ustala się po pewnym czasie równowaga dla której poziom cieczy określa linia przerywana. Słup cieczy w kształcie litery **U** ma długość **l**. Jeśli w jednej rurce przesuniemy o **y**

poziom cieczy, powstaje różnica poziomów **2y** między rurkami. Ciężar wystającego słupa cieczy o masie m_{2y} powoduje pojawienie się siły zwrotnej. Zgodnie z prawem Newtona mamy;

$$F = ma$$

$$-m_{2y}g = m_C \ddot{y}$$

Nadmiarowa masa wynosi;

$$m_{2y} = 2yS\rho \quad .$$

Równanie różniczkowe dla drgającej cieczy ma postać,

$$\ddot{y} + \frac{2S\rho g}{m_C} y = 0 \quad .$$

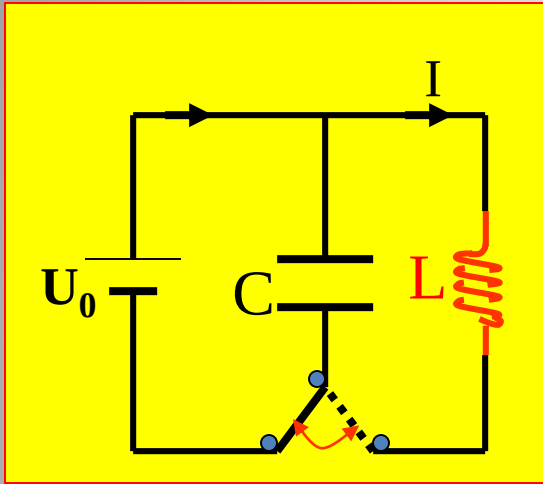
Rozwiązanie tego równania jest następujące;

$$y(t) = y_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2S\rho g}{m_C}}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m_C}{2S\rho g}} \quad .$$

Elektryczny układ drgający



Układ ten składa się z połączonych równolegle **pojemności C** i **indukcyjności L** . Jeśli zamkniemy obwód po naładowaniu kondensatora **C** , to spełniony musi być warunek; $V_L + V_C = 0$

Możemy więc zapisać, że;

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad / \frac{d}{dt}$$

Po podstawieniu za **I** pochodnej ładunku po czasie otrzymujemy następujące równanie,

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0 \quad .$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego o częstości

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad .$$