



POJĘCIA PODSTAWOWE C. D.

Plan wykładu:

- Wyrażanie niepewności pomiarów. Przewodnik.
- Błędy pomiarów i ich klasyfikacja.
- Klasyfikacja niepewności standardowej.
- Algorytm wyznaczania niepewności rozszerzonej.
- Obliczanie niepewności standardowej - metoda typu A i metoda typu B.
- Określanie niepewności na podstawie błędu granicznego.



Metrologia



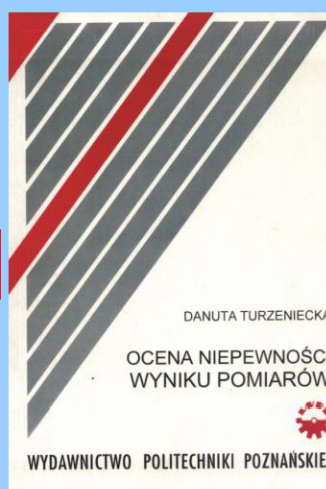
POJĘCIA PODSTAWOWE



Niepewność pomiaru

w odniesieniu do wartości otrzymanej W_o
z założonym prawdopodobieństwem określa
zakres, w którym leży wartość rzeczywista W_r .

Na podstawie wszystkich błędów, które występują
podczas pomiaru wyznaczamy niepewność pomiaru.



Metrologia





POJĘCIA PODSTAWOWE



Klasyfikacja błędów pomiarów

- ☐ Błędy systematyczne
- ☐ Błędy przypadkowe
- ☐ Błędy nadmierne

Kryterium klasyfikacji: sposób powstawania błędu.

Błędy systematyczne są spowodowane systematycznym oddziaływaniem wielkości wpływających.

Błędy przypadkowe i nadmierne są spowodowane oddziaływaniem losowym.



Metrologia



POJĘCIA PODSTAWOWE



- ☐ Błędy systematyczne - pozostają stałe zarówno co do wartości, jak i znaku, podczas wykonywania serii pomiarów tej samej wielkości mierzonej w tych samych warunkach.
Przy zmianie warunków zmieniają się z określoną prawidłowością, którą można wyznaczyć analitycznie.
- ☐ Błędy przypadkowe - zmieniają się w sposób losowy zarówno co do wartości, jak i znaku, podczas wykonywania serii pomiarów tej samej wielkości mierzonej w tych samych warunkach.
- ☐ Błędy nadmierne - są to błędy przypadkowe o bardzo małym prawdopodobieństwie wystąpienia.

Wyniki obarczone błędem nadmiernym odrzucamy.

Błąd **nadmierny** nazywany jest także **omylką** lub błędem **grubym**.



Metrologia





POJĘCIA PODSTAWOWE



- Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement.

- Wyrażanie niepewności pomiarów. Przewodnik.
- Zawiera wskazówki dotyczące wyrażania niepewności pomiaru.
- Plik z przewodnikiem można ściągnąć z sieci web:

<https://www.bipm.org/en/committees/jc/jcgm/publications>

- BIMP (*Bureau International des Poids et Mesures*) Międzynarodowe Biuro Miar i Wag.



Metrologia



POJĘCIA PODSTAWOWE



Wyróżniamy:

- ☐ niepewność standardową (u_c),
- ☐ niepewność standardową złożoną (u_z),
- ☐ niepewność rozszerzoną (u_r).

Klasyfikacja niepewności standardowej: ➡ Kryterium klasyfikacji: sposób wyznaczania.

- ☐ Niepewność standardowa obliczana metodą typu A (nazywana także **niepewnością typu A**).
- ☐ Niepewność standardowa obliczana metodą typu B (nazywana także **niepewnością typu B**).



Metrologia





POJĘCIA PODSTAWOWE



Niepewność standardowa - miarą liczbową jest odchylenie standardowe σ .

Niepewność standardowa obliczana metodą typu A	Niepewność standardowa obliczana metodą typu B
Najczęściej wykorzystywana do oceny wpływu oddziaływań przypadkowych.	Najczęściej wykorzystywana do oceny wpływu oddziaływań systematycznych.
Wyznaczamy na podstawie rozrzutu wyników serii obserwacji przez wyznaczenie estymatora odchylenia standardowego dla średniej.	Wyznaczamy innymi metodami np. za pomocą odchylenia standardowego obliczonego na podstawie przewidywanego rozkładu prawdopodobieństwa.



Metrologia



ZASADY ZAPISU WYNIKÓW POMIARÓW



Wyznaczanie niepewności rozszerzonej.

- 1 Błędy nadmierne ujawniamy i usuwamy.
- 2 Błędy systematyczne o znanym znaku i wartości usuwamy wprowadzając poprawkę.
- 3 Wyznaczamy niepewności standardowe dla poszczególnych błędów pomiaru metodą typu A lub metodą typu B.
- 4 Wyznaczamy niepewność standardową złożoną.
- 5 Obliczamy niepewność rozszerzoną dla przyjętego prawdopodobieństwa.

Na podstawie wszystkich błędów, które występują podczas pomiaru wyznaczamy niepewność pomiaru.



Metrologia





POJĘCIA PODSTAWOWE



Niepewność standardowa.

Miarą liczbową niepewności standardowej jest odchylenie standardowe σ .

Obliczanie niepewności standardowej - metoda typu A.

Wyznaczamy na podstawie serii n obserwacji (pomiarów) tej samej wielkości mierzonej. Wyniki obserwacji obarczone są błędem przypadkowym tzn. wykazują rozrzut.

$$u_s = \overline{S_{\bar{X}}} \Rightarrow \overline{S_{\bar{X}}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \Rightarrow \text{Estymator odchylenia standardowego dla średniej.}$$

gdzie: X_i - wyniki kolejnych obserwacji, n - liczba obserwacji,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad - \text{wartość średnia.}$$



Metoda najczęściej wykorzystywana do oceny wpływu błędów przypadkowych.

Metrologia



POJĘCIA PODSTAWOWE



Niepewność standardowa.

Miarą liczbową niepewności standardowej jest odchylenie standardowe σ .

Obliczanie niepewności standardowej - metoda typu A.

Wyznaczamy na podstawie serii n obserwacji (pomiarów) tej samej wielkości mierzonej. Wyniki obserwacji obarczone są błędem przypadkowym tzn. wykazują rozrzut.

$$u_s = \overline{S_{\bar{X}}} \Rightarrow \overline{S_{\bar{X}}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \Rightarrow \text{Estymator odchylenia standardowego dla średniej.}$$

Uwaga!

$$\overline{S_{\bar{X}}} = \frac{\bar{S}}{\sqrt{n}} \quad \text{gdzie} \quad \bar{S} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \Rightarrow \text{Estymator odchylenia standardowego.}$$



Metrologia





ZASADY ZAPISU WYNIKÓW POMIARÓW



Przykład 5.1.

Za pomocą woltomierza pięciokrotnie zmierzono napięcie stałe.

Wyniki obserwacji przedstawiono w tabeli.

Wyznaczyć niepewność standardową metodą typu A.

i	X_i [V]
1	9,5
2	9,6
3	9,6
4	9,7
5	9,9

1. Obliczamy wartość średnią.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 9,66 \text{ V}$$

2. Obliczamy niepewność standardową metodą typu A:

$$u_A = \bar{S}_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = 0,0678 \text{ V}$$

Uwaga: u_s – oznaczenie niepewności standardowej,

u_A – oznaczenie niepewności standardowej obliczanej metodą typu A.



Metrologia



POJĘCIA PODSTAWOWE



Co zrobić kiedy dysponujemy jedną wartością odczytaną z przyrządu pomiarowego.
Jak obliczyć niepewność standardową?

Obliczanie niepewności standardowej - metoda typu B.

Przewodnik podaje, że niepewność standardową określa się na drodze analizy opartej na wszystkich dostępnych informacjach o zmiennej losowej.

Zestaw tych informacji może obejmować:

- poprzednie dane pomiarowe,
- posiadane doświadczenie wraz z ogólną znajomością zjawisk i właściwości odpowiednich materiałów odniesienia i przyrządów,
- specyfikacje wytwórców,
- dane uzyskane ze wzorcowania i certyfikacji,
- niepewności przypisane danym odniesienia zaczerpniętym z podręczników.



Metrologia





POJĘCIA PODSTAWOWE



Niepewność standardowa.

Przykład obliczania niepewności standardowej metodą typu B.

1. Za pomocą multimetru cyfrowego zmierzono wartość napięcia elektrycznego.
2. Na podstawie specyfikacji wytwórcy wyznaczamy błąd graniczny Δ_g .
3. Dla błędu granicznego zakładamy rozkład zmiennej losowej.
4. Na podstawie przyjętego rozkładu obliczamy σ – odchylenie standardowe.

σ jest miarą niepewności standardowej u_s

$$u_s = \sigma$$

Uwaga: u_s – oznaczenie niepewności standardowej,

u_B – oznaczenie niepewności standardowej obliczanej metodą typu B.



Metrologia

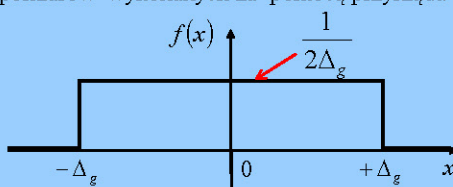


POJĘCIA PODSTAWOWE



Jak obliczyć niepewność standardową metodą typu B znając błąd graniczny Δ_g ?

Zakładamy, że błędy pomiarów wykonanych za pomocą przyrządu mają rozkład równomierny.



Funkcja gęstości prawdopodobieństwa:

$f(x) = \frac{1}{2\Delta_g}$ dla $x \in [-\Delta_g, +\Delta_g]$ Prawdopodobieństwo przyjęcia przez błąd dowolnej wybranej wartości z przedziału $[-\Delta_g, +\Delta_g]$ jest takie samo.

$f(x) = 0$ dla $x \notin [-\Delta_g, +\Delta_g]$ Prawdopodobieństwo przyjęcia przez błąd dowolnej wybranej wartości poza przedziałem $[-\Delta_g, +\Delta_g]$ jest = 0.



Metrologia



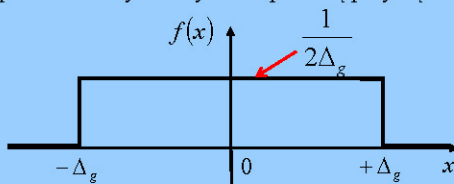


POJĘCIA PODSTAWOWE



Jak obliczyć niepewność standardową metodą typu B znając błąd graniczny Δ_g ?

Zakładamy, że błędy pomiarów wykonanych za pomocą przyrządu mają rozkład równomierny.



Dla tego rozkładu: $\sigma = \frac{\Delta_g}{\sqrt{3}}$ gdzie: σ – odchylenie standardowe – miara niepewności.

Stąd:

$$u_s = \Delta_g / \sqrt{3} \quad \text{niepewność standardowa } (u_s).$$



Metrologia



POJĘCIA PODSTAWOWE



Jak obliczyć niepewność rozszerzoną znając błąd graniczny Δ_g ?

- 1 Błędy nadmierne ujawniamy i usuwamy.
- 2 Błędy systematyczne o znanym znaku i wartości usuwamy wprowadzając poprawkę.

Punkty 1 i 2 pomijamy, ponieważ błąd graniczny jest jedynym błędem stwierdzonym podczas pomiaru.

- 3 Wyznaczamy niepewności standardowe dla poszczególnych błędów pomiaru metodą typu A lub metodą typu B.

W tym przypadku wyznaczamy niepewność metodą typu B.
Zakładamy, że błędy pomiaru mają rozkład równomierny i na podstawie tego rozkładu wyznaczamy niepewność standardową u_s .

$$u_s = \Delta_g / \sqrt{3}$$



Metrologia





POJĘCIA PODSTAWOWE



Jak obliczyć niepewność rozszerzoną znając błąd graniczny Δ_g ?

- 4 Wyznaczamy niepewność standardową złożoną.

Pomijamy ten punkt, ponieważ mamy jedną niepewność standardową.

- 5 Obliczamy niepewność rozszerzoną dla przyjętego prawdopodobieństwa.

Jeżeli błąd graniczny jest jedynym błędem występującym podczas pomiaru, na podstawie przyjętego rozkładu równomiernego można także wyznaczyć niepewność rozszerzoną.

$$u_r = u_s \cdot \sqrt{3}$$

stąd:

$$u_r = \Delta_g$$

niepewność rozszerzona (u_r).



Metrologia



ZASADY ZAPISU WYNIKÓW POMIARÓW



Dopuszczalne sposoby zapisu wyniku pomiaru:

Jeżeli błąd graniczny jest jedynym błędem występującym podczas pomiaru.

- 1 z niepewnością standardową:

$$u_s = \Delta_g / \sqrt{3}$$

$$W_p = (W_o \pm u_s) \text{ jednostka}$$

wtedy prawdopodobieństwo tego, że wartość rzeczywista W_r znajdzie się w przedziale:

$$W_o - u_s \leq W_r \leq W_o + u_s \quad \text{dla przyjętego rozkładu równomiernego wynosi } 0,58.$$



Metrologia





ZASADY ZAPISU WYNIKÓW POMIARÓW



Dopuszczalne sposoby zapisu wyniku pomiaru:

Jeżeli błąd graniczny jest jedynym błędem występującym podczas pomiaru.

- 2 z niepewnością rozszerzoną:

$$u_r = \Delta_g$$

$$W_p = (W_o \pm u_r) \text{ jednostka}$$

wtedy prawdopodobieństwo tego, że wartość rzeczywista W_r znajdzie się w przedziale:

$$W_o - u_r \leq W_r \leq W_o + u_r \quad \text{dla przyjętego rozkładu równomiernego wynosi } 1.$$



Metrologia



Przykład 5.2.

ZASADY ZAPISU WYNIKÓW POMIARÓW



Wartość odczytana z omomierza wynosi 129,341 Ω . Wyznaczona wartość błędu granicznego wynosi $\Delta_g = 0,06467 \Omega$. Zapisz poprawnie wynik pomiaru dla niepewności rozszerzonej.

Sprawdź czy niepewność w wyniku pomiaru może być zapisana za pomocą 1 cyfry znaczącej.

- 1 Obliczamy niepewność rozszerzoną:

$$u_r = \Delta_g = 0,06467 \Omega$$

- 2 Zaokrąglamy liczbę opisującą wartość niepewności rozszerzonej do jednej cyfry znaczącej w górę:

$$u_r = 0,06467 \Omega \approx 0,07 \Omega$$

- 3 Obliczamy błąd względny zaokrąglania:

$$\delta = \frac{u_{po} - u_{przed}}{u_{przed}} \cdot 100\% = \frac{0,07 - 0,06467}{0,06467} \cdot 100\% \approx 8,2\%$$

Ponieważ $\delta < 10\%$ $\Rightarrow$ liczbę wyrażającą niepewność możemy zapisać za pomocą 1 cyfry znaczącej.



Metrologia





Przykład 5.2.

ZASADY ZAPISU WYNIKÓW POMIARÓW



Wartość odczytana z omomierza wynosi $129,341 \Omega$. Wyznaczona wartość błędu granicznego wynosi $\Delta_g = 0,06467 \Omega$. Zapisz poprawnie wynik pomiaru dla niepewności rozszerzonej. Sprawdź czy niepewność w wyniku pomiaru może być zapisana za pomocą 1 cyfry znaczącej.

- 4 Zapisujemy poprawnie wynik pomiaru dla niepewności rozszerzonej:

$$W_p = (129,34 \pm 0,07) \Omega$$

Uwaga! Wynik został zapisany dla niepewności rozszerzonej.

Prawdopodobieństwo tego, że wartość rzeczywista W_r znajduje się w przedziale:

$$129,34 - 0,07 \leq W_r \leq 129,34 + 0,07$$

$$129,27 \Omega \leq W_r \leq 129,41 \Omega$$

dla przyjętego rozkładu równomiernego wynosi **1**.



Metrologia



ZASADY ZAPISU WYNIKÓW POMIARÓW



Za pomocą mierników cyfrowych zmierzono napięcie stałe.

Który z pomiarów jest poprawny?

Zakres: 10 V.



Zakres: 20 V.



Zakres: 4 V.



Metrologia





ZASADY ZAPISU WYNIKÓW POMIARÓW



Za pomocą mierników cyfrowych zmierzono napięcie stałe.

Który z pomiarów jest poprawny?

Zakres: 10 V.



$$U_{HP} = (1,64272 \pm 0,00011) \text{ V}$$
$$1,64261 \text{ V} \leq W_r \leq 1,64283 \text{ V}$$



Zakres: 20 V.



Zakres: 4 V.

$$U_{SAN} = (1,641 \pm 0,012) \text{ V}$$
$$1,629 \text{ V} \leq W_r \leq 1,653 \text{ V}$$

$$U_{MET} = (1,630 \pm 0,015) \text{ V}$$
$$1,615 \text{ V} \leq W_r \leq 1,645 \text{ V}$$



Metrologia



ZASADY ZAPISU WYNIKÓW POMIARÓW

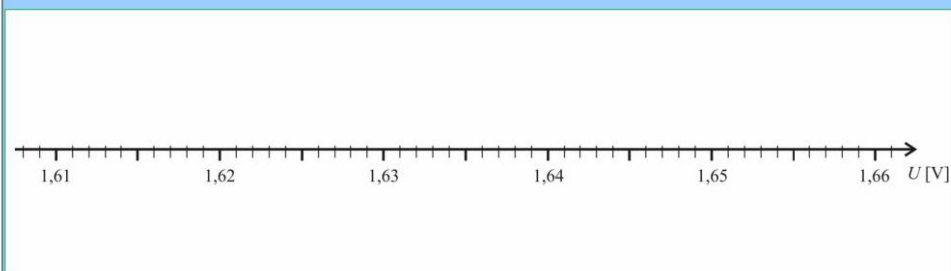


Za pomocą mierników cyfrowych zmierzono napięcie stałe.

Który z pomiarów jest poprawny?

$$U_{MET} = (1,630 \pm 0,015) \text{ V}$$
$$1,615 \text{ V} \leq W_r \leq 1,645 \text{ V}$$

$$U_{HP} = (1,64272 \pm 0,00011) \text{ V}$$
$$1,64261 \text{ V} \leq W_r \leq 1,64283 \text{ V}$$



$$U_{SAN} = (1,641 \pm 0,012) \text{ V}$$
$$1,629 \text{ V} \leq W_r \leq 1,653 \text{ V}$$





ZASADY ZAPISU WYNIKÓW POMIARÓW



Za pomocą mierników cyfrowych zmierzono napięcie stałe.

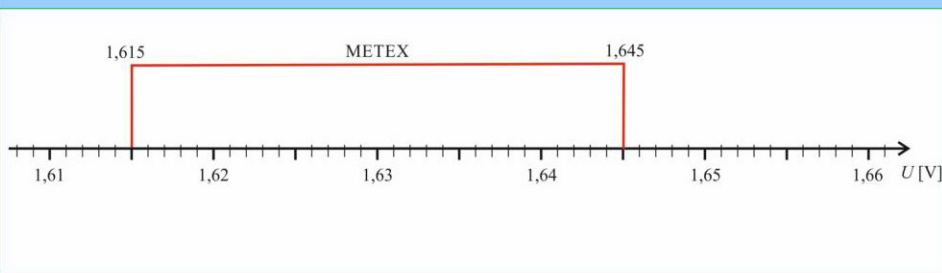
Który z pomiarów jest poprawny?

$$U_{\text{MET}} = (1,630 \pm 0,015) \text{ V}$$

$$1,615 \text{ V} \leq W_r \leq 1,645 \text{ V}$$

$$U_{\text{HP}} = (1,64272 \pm 0,00011) \text{ V}$$

$$1,64261 \text{ V} \leq W_r \leq 1,64283 \text{ V}$$



$$U_{\text{SAN}} = (1,641 \pm 0,012) \text{ V}$$

$$1,629 \text{ V} \leq W_r \leq 1,653 \text{ V}$$



ZASADY ZAPISU WYNIKÓW POMIARÓW



Za pomocą mierników cyfrowych zmierzono napięcie stałe.

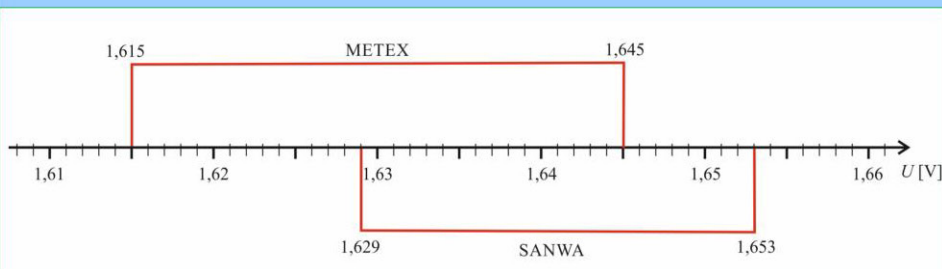
Który z pomiarów jest poprawny?

$$U_{\text{MET}} = (1,630 \pm 0,015) \text{ V}$$

$$1,615 \text{ V} \leq W_r \leq 1,645 \text{ V}$$

$$U_{\text{HP}} = (1,64272 \pm 0,00011) \text{ V}$$

$$1,64261 \text{ V} \leq W_r \leq 1,64283 \text{ V}$$



$$U_{\text{SAN}} = (1,641 \pm 0,012) \text{ V}$$

$$1,629 \text{ V} \leq W_r \leq 1,653 \text{ V}$$





ZASADY ZAPISU WYNIKÓW POMIARÓW



Za pomocą mierników cyfrowych zmierzono napięcie stałe.

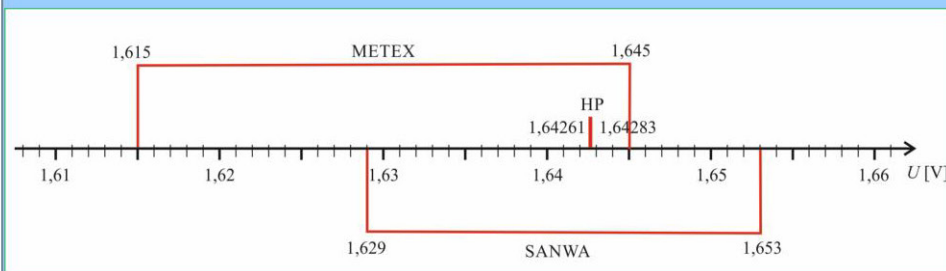
Który z pomiarów jest poprawny?

$$U_{\text{MET}} = (1,630 \pm 0,015) \text{ V}$$

$$1,615 \text{ V} \leq W_r \leq 1,645 \text{ V}$$

$$U_{\text{HP}} = (1,64272 \pm 0,00011) \text{ V}$$

$$1,64261 \text{ V} \leq W_r \leq 1,64283 \text{ V}$$



$$U_{\text{SAN}} = (1,641 \pm 0,012) \text{ V}$$

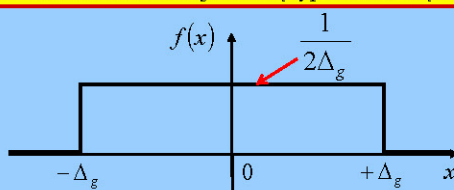
$$1,629 \text{ V} \leq W_r \leq 1,653 \text{ V}$$



POJĘCIA PODSTAWOWE



Obliczanie niepewności standardowej metodą typu B dla błędu granicznego Δ_g .



Obliczmy wartość oczekiwaną.

$$\begin{aligned} \mu = E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \frac{1}{2\Delta_g} \int_{-\Delta_g}^{+\Delta_g} x \cdot dx = \frac{1}{2\Delta_g} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-\Delta_g}^{+\Delta_g} = \\ &= \frac{1}{4\Delta_g} \left[(+\Delta_g)^2 - (-\Delta_g)^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

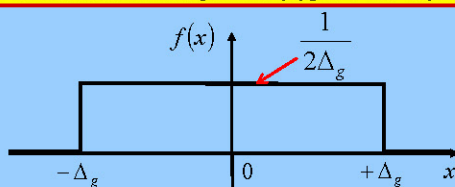




POJĘCIA PODSTAWOWE



Obliczanie niepewności standardowej metodą typu B dla błędu granicznego Δ_g .



Obliczamy wariancję.

$$\begin{aligned} V = D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx = \frac{1}{2\Delta_g} \int_{-\Delta_g}^{+\Delta_g} (x)^2 \cdot dx = \frac{1}{2\Delta_g} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-\Delta_g}^{+\Delta_g} = \\ &= \frac{1}{6\Delta_g} \left[(+\Delta_g)^3 - (-\Delta_g)^3 \right] = \frac{1}{6\Delta_g} 2\Delta_g^3 = \frac{\Delta_g^2}{3} \end{aligned}$$



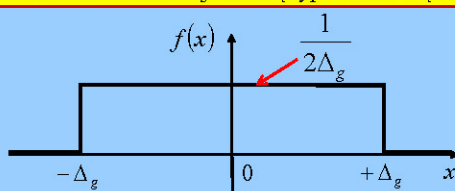
Metrologia



POJĘCIA PODSTAWOWE



Obliczanie niepewności standardowej metodą typu B dla błędu granicznego Δ_g .



Obliczamy odchylenie standardowe.

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{\Delta_g^2}{3}} = \frac{\Delta_g}{\sqrt{3}}$$

$$\text{stąd: } u_s = \frac{\Delta_g}{\sqrt{3}}$$



Metrologia



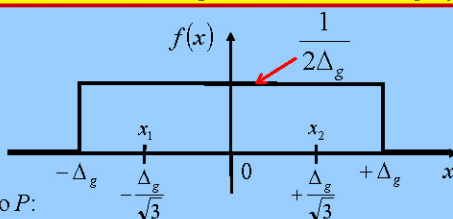


POJĘCIA PODSTAWOWE



Dlaczego prawdopodobieństwo dla niepewności standardowej wynosi 0,58?

$$u_s = \Delta_g / \sqrt{3}$$



Prawdopodobieństwo P :

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Dystrybucja F :

$$F(x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{Dla } x_1: F(x_1) &= \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx = \int_{-\Delta_g}^{x_1} \frac{1}{2\Delta_g} dx = \frac{1}{2\Delta_g} [x]_{-\Delta_g}^{x_1} = \\ &= \frac{1}{2\Delta_g} \left(-\frac{\Delta_g}{\sqrt{3}} + \Delta_g \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$



Metrologia

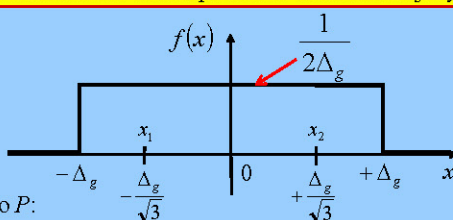


POJĘCIA PODSTAWOWE



Dlaczego prawdopodobieństwo dla niepewności standardowej wynosi 0,58?

$$u_s = \Delta_g / \sqrt{3}$$



Prawdopodobieństwo P :

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Dystrybucja F :

$$F(x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{Dla } x_2: F(x_2) &= \int_{-\infty}^{x_2} f(x) dx = \int_{-\Delta_g}^{x_2} \frac{1}{2\Delta_g} dx = \frac{1}{2\Delta_g} [x]_{-\Delta_g}^{x_2} = \\ &= \frac{1}{2\Delta_g} \left(\frac{\Delta_g}{\sqrt{3}} + \Delta_g \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$



Metrologia



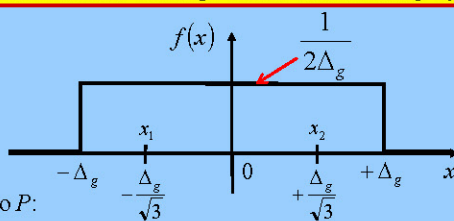


POJĘCIA PODSTAWOWE



Dlaczego prawdopodobieństwo dla niepewności standardowej wynosi 0,58?

$$u_s = \Delta_g / \sqrt{3}$$



Prawdopodobieństwo P :

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Dystrybucja F :

$$F(x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} f(x) dx$$

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = 0,57735 \approx 0,58$$

