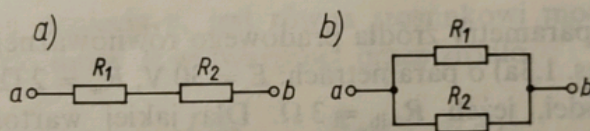


1

Obwody elektryczne w stanie ustalonym

1.1. Obwody elektryczne przy wymuszeniu stałym

1.1. Rezystancja wypadkowa dwóch rezystancji połączonych szeregowo (rys. 1.1a) jest równa $25\ \Omega$, a połączonych równolegle (rys. 1.1b) $4\ \Omega$. Obliczyć wartości poszczególnych rezystancji.



Rys. 1.1

ROZWIĄZANIE. Przy połączeniu szeregowym rezystancja wypadkowa

$$R_{w1} = R_1 + R_2 = 25\ \Omega$$

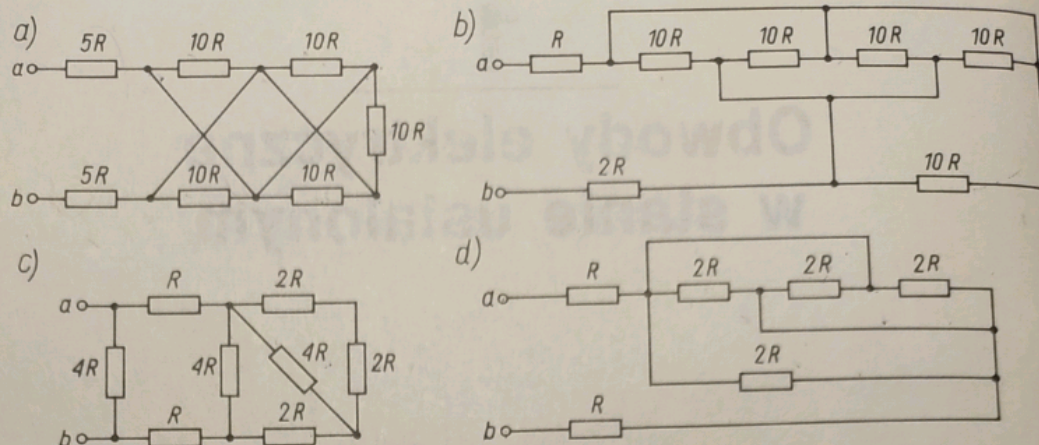
Przy połączeniu równoległym rezystancja wypadkowa

$$R_{w2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 4\ \Omega$$

Dokonując obliczeń, otrzymujemy

$$R_1 = 5\ \Omega \quad \text{oraz} \quad R_2 = 20\ \Omega$$

1.2. Obliczyć rezystancję zastępczą widzianą z zacisków a - b obwodów, których schematy przedstawiono na rys. 1.2.



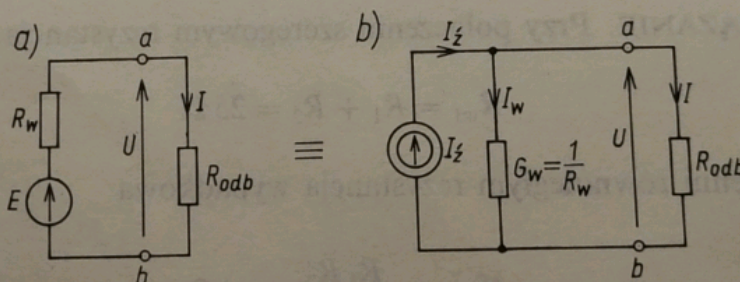
Rys. 1.2

ROZWIĄZANIE. Rezystancje są następujące:

a) $R_{ab} = 5R + \frac{10R}{5} + 5R = 12R$ c) $R_{ab} = 2R$

b) $R_{ab} = R + \frac{10R}{5} + 2R = 5R$ d) $R_{ab} = R + 0,5R + R = 2,5R$

1.3. Obliczyć parametry źródła prądowego równoważnego rzeczywistemu źródłu napięcia (rys. 1.3a) o parametrach: $E = 30 \text{ V}$, $R_w = 2 \Omega$. Obliczyć sprawność obydwu źródeł, jeżeli $R_{odb} = 3 \Omega$. Dla jakiej wartości R_{odb} wystąpi dopasowanie odbiornika do źródła?



Rys. 1.3

ROZWIĄZANIE

a) Dla rzeczywistego źródła napięcia:

— prąd zwarcia

$$I_{zw} = \frac{E}{R_w} = \frac{30}{2} = 15 \text{ A}$$

— prąd w obwodzie

$$I = \frac{E}{R_w + R_{odb}} = \frac{30}{2 + 3} = 6 \text{ A}$$

— napięcie na odbiorniku

$$U = R_{odb} I = 3 \cdot 6 = 18 \text{ V}$$

— napięcie na rezystancji wewnętrznej źródła

$$U_w = R_w I = 2 \cdot 6 = 12 \text{ V}$$

— moc pobierana przez odbiornik

$$P_{odb} = R_{odb} I^2 = R_{odb} \left(\frac{E}{R_w + R_{odb}} \right)^2 = 3 \cdot 6^2 = 108 \text{ W}$$

— moc tracona na rezystancji wewnętrznej

$$P_w = R_w I^2 = 2 \cdot 6^2 = 72 \text{ W}$$

— moc wytwarzana przez źródło

$$P = EI = \frac{E^2}{R_w + R_{odb}} = 180 \text{ W}; \quad P = P_w + P_{odb}$$

Sprawność źródła napięcia η_u jest równa stosunkowi mocy P_{odb} pobieranej przez odbiornik do mocy P wytwarzanej przez źródło

$$\eta_u = \frac{P_{odb}}{P} = \frac{R_{odb}}{R_{odb} + R_w} = 0,6$$

— moc pobierana przez odbiornik

$$P_{odb} = P - P_w = EI - R_w I^2$$

Przyrównując pochodną mocy względem prądu do zera

$$\frac{dP_{odb}}{dI} = E - 2R_w I = 0$$

otrzymujemy wartość prądu, przy której moc odbiornika jest maksymalna

$$I' = \frac{E}{2R_w} = \frac{30}{4} = 7,5 \text{ A}$$

Zatem, przy $R_{odb} = R_w$ wystąpi dopasowanie odbiornika do źródła napięcia stałego. Wydziela się wówczas w odbiorniku moc maksymalna

$$P_{odb \max} = \frac{E^2}{4R_w} = \frac{900}{8} = 112,5 \text{ W}$$

Moc źródła przy dopasowaniu odbiornika do źródła napięcia

$$P' = EI' = 30 \cdot 7,5 = 225 \text{ W}$$

Sprawność przy dopasowaniu odbiornika do źródła napięcia, tzn. przy przesyłaniu największej mocy

$$\eta'_u = \frac{P_{\text{odb max}}}{P'} = \frac{R_w}{2R_w} = 0,5$$

Oznacza to, że połowa mocy wytworzonej przez źródło jest dostarczana do odbiornika, a połowa jest tracona na rezystancji wewnętrznej R_w . Układy elektroenergetyczne nigdy nie pracują w takich warunkach, tzn. nie przesyłają mocy maksymalnej, gdyż ze względów ekonomicznych nie można dopuścić do tak dużych strat energii. Niektóre odbiory telekomunikacyjne pracują natomiast w pobliżu dopasowania odbioru, bowiem energia przesyłana bywa tak mała, że straty mają niewielkie znaczenie.

b) Na rysunku 1.3b przedstawiono rzeczywiste źródło prądu równoważne rzeczywistemu źródłu napięcia przedstawionemu na rys. 1.3a. Zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa dla schematu z rys. 1.3a możemy napisać

$$E = (R_w + R_{\text{odb}})I = R_w I + R_{\text{odb}} I = R_w I + U$$

Dzieląc obustronnie przez R_w powyższe równanie (przy założeniu, że $R_w \neq 0$), otrzymujemy

$$\frac{E}{R_w} = I + \frac{U}{R_w}$$

lub

$$I_z = I + I_w$$

Równaniu temu odpowiada schemat przedstawiony na rys. 1.3b, przy czym:

$I_z = \frac{E}{R_w}$ — prąd zwarcia źródła napięcia, równy prądowi idealnego źródła

prądu; $I_w = \frac{U}{R_w} = G_w U$ — prąd płynący przez konduktancję G_w ; I — prąd płynący przez odbiornik.

Źródło napięcia o rezystancji wewnętrznej różnej od zera może być zawsze zastąpione przez źródło prądu. W obu przypadkach na zaciskach odbiornika jest to samo napięcie U , a przez odbiornik płynie ten sam prąd I . Idealne źródło napięcia ($R_w = 0$) nie ma równoważnego sobie idealnego źródła prądu i odwrotnie. Źródła idealne stosowane w schematach obwodów elektrycznych stanowią zawsze przybliżenie źródeł rzeczywistych.

Dla rzeczywistego źródła prądu:

— prąd źródła prądowego

$$I_z = \frac{E}{R_w} = \frac{30}{2} = 15 \text{ A}$$

— napięcie na odbiorniku

$$U = \frac{I_z}{G_w + G_{odb}} = \frac{15}{0,5 + 0,333} = 18 \text{ V}$$

— prądy I_w oraz I wynoszą odpowiednio

$$I_w = \frac{U}{R_w} = G_w U = 0,5 \cdot 18 = 9 \text{ A}$$

$$I = I_z - I_w = 15 - 9 = 6 \text{ A}$$

— moc pobierana przez odbiornik

$$P_{odb} = G_{odb} U^2 = \frac{1}{3} \cdot 18^2 = 108 \text{ W}$$

— moc tracona na konduktancji G_w

$$P_w = G_w U^2 = \frac{1}{2} \cdot 18^2 = 162 \text{ W}$$

— moc wytwarzana przez źródło

$$P = U I_z = 18 \cdot 15 = 270 \text{ W}; \quad P = P_w + P_{odb}$$

Sprawność źródła prądu η_i jest równa stosunkowi mocy P_{odb} pobieranej przez odbiornik do mocy P wytwarzanej w źródle

$$\eta_i = \frac{P_{odb}}{P} = \frac{108}{270} = 0,4$$

Moc pobierana przez odbiornik o konduktancji $G_{odb} = \frac{1}{R_{odb}}$

$$P_{odb} = G_{odb} \left(\frac{I_z}{G_w + G_{odb}} \right)^2$$

Postępując analogicznie do przypadku zasilania odbiornika ze źródła napięcia, otrzymujemy wartość mocy maksymalnej $P_{odb \max}$ dla $G_{odb} = G_w = \frac{1}{2} S$ (dopasowanie odbiornika do źródła prądu)

$$P_{odb \max} = \frac{I_z^2}{4 G_w} = 112,5 \text{ W}$$

Wówczas moc źródła

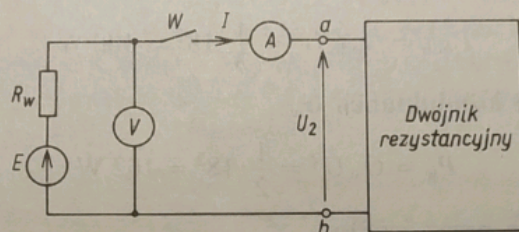
$$P' = U I_z = \frac{I_z^2}{2 G_w} = 225 \text{ W}$$

Sprawność przy dopasowaniu odbiornika do źródła prądu, tzn. przy przesyle największej mocy

$$\eta_i = \frac{P_{odb \max}}{P'} = 0,5$$

Porównując sprawność źródła napięcia η_u ze sprawnością źródła prądu η_i w schematach zastępczych tego samego źródła energii stwierdzamy, że $\eta_u = \eta_i$ tylko dla $R_w = R_{odb}$. Sprawności rozważanych źródeł napięcia i prądu stałego są sobie równe tylko w stanie dopasowania.

1.4. Wyznaczyć wartość źródła napięcia E , rezystancji wewnętrznej R_w oraz rezystancji zastępczej R_z pasywnego dwójnika rezystancyjnego na podstawie pomiarów w stanach ustalonych (rys. 1.4). Przy otwartym wyłączniku woltomierz wskazywał $U_{V1} = 200 \text{ V}$, amperomierz $I_{A1} = 0$. Przy zamkniętym wyłączniku wskazania odpowiednio wynosiły $U_{V2} = 180 \text{ V}$, $I_{A2} = 10 \text{ A}$.



Rys. 1.4

ROZWIĄZANIE. Z pomiaru przy otwartym wyłączniku wynika, że $E = 200 \text{ V}$. Przy zamkniętym wyłączniku

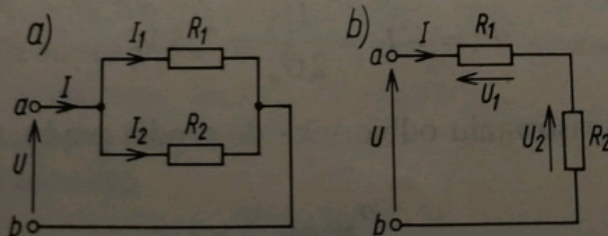
$$U_2 = R_z I_2 = E - R_w I_2$$

Wstawiając dane liczbowe, otrzymujemy

$$R_z = \frac{U_2}{I_2} = \frac{180}{10} = 18 \Omega$$

$$R_w = \frac{E - U_2}{I_2} = \frac{200 - 180}{10} = 2 \Omega$$

1.5. Dobrać wartość rezystancji R_2 w taki sposób, aby w obwodzie przedstawionym na rys. 1.5a prąd I_1 wynosił $0,8I$, a w obwodzie na rys. 1.5b napięcie U_1 było równe $0,8U$. Rezystancja $R_1 = 100 \Omega$.



Rys. 1.5

ROZWIĄZANIE

a) Obwód z rys. 1.5a opisują równania

$$I = I_1 + I_2 \quad \text{stąd} \quad I_2 = I - I_1 = 0,2I$$

$$R_1 I_1 = R_2 I_2 = U$$

ostatecznie

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{0,2I}{0,8I} = \frac{1}{4}$$

Rozpływ prądów w gałęziach równoległych jest odwrotnie proporcjonalny do wartości rezystancji tych gałęzi, stąd rezystancja

$$R_2 = 4R_1 = 400 \, \Omega$$

b) Obwód z rys. 1.5b opisują równania

$$U = U_1 + U_2 \quad \text{stąd} \quad U_2 = U - U_1 = 0,2U$$

$$U_1 = R_1 I \quad \text{oraz} \quad U_2 = R_2 I$$

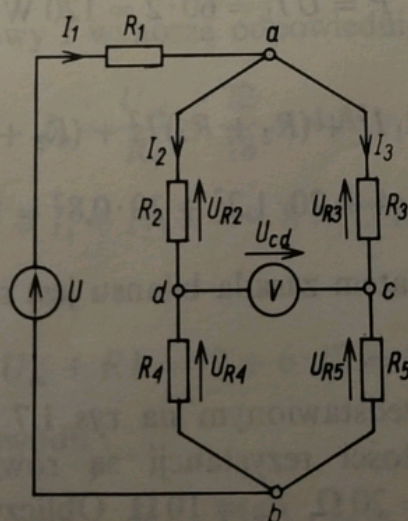
ostatecznie

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1 I}{R_2 I} = \frac{R_1}{R_2} = 4$$

Spadki napięć w obwodzie szeregowym są wprost proporcjonalne do wartości rezystancji, na których spadki te występują. Rezystancja R_2 wynosi

$$R_2 = \frac{R_1}{4} = 25 \, \Omega$$

1.6. Źródło napięcia stałego $U = 60 \, \text{V}$ zasila obwód przedstawiony na rys. 1.6.



Rys. 1.6

Wartości rezystancji wynoszą: $R_1 = 18 \Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = 10 \Omega$, $R_5 = 20 \Omega$. Wyznaczyć wartości prądów gałęziowych, wskazania woltomierza oraz sporządzić bilans mocy w obwodzie (założyć, że woltomierz jest idealny).

ROZWIĄZANIE. Rezystancja wypadkowa obwodu

$$R_w = R_1 + \frac{(R_2 + R_4)(R_3 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5} = 18 + \frac{20 \cdot 30}{50} = 30 \Omega$$

Prąd wejściowy

$$I_1 = \frac{U}{R_w} = \frac{60}{30} = 2 \text{ A}$$

Napięcia w gałęziach równoległych możemy obliczyć z zależności

$$U_{ab} = R_{ab} I_1 = 12 \cdot 2 = 24 \text{ V}$$

lub

$$U_{ab} = U - R_1 I_1 = 60 - 18 \cdot 2 = 24 \text{ V}$$

Prądy gałęziowe

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2 + R_4} = \frac{24}{20} = 1,2 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{U_{ab}}{R_3 + R_5} = \frac{24}{30} = 0,8 \text{ A}$$

Woltomierz mierzy napięcie

$$U_{cd} = U_{R2} - U_{R3} = U_{R5} - U_{R4} = 4 \text{ V}$$

Sprawdzimy bilans mocy w obwodzie. Zgodnie z zasadą bilansu mocy, moc dostarczona przez źródło równa się mocy pobranej przez odbiornik.

Moc źródła

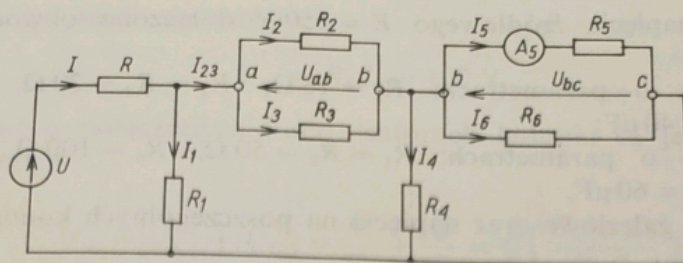
$$P = UI_1 = 60 \cdot 2 = 120 \text{ W}$$

Moc odbiornika

$$\begin{aligned} P_{\text{odb}} &= R_1 I_1^2 + (R_2 + R_4) I_2^2 + (R_3 + R_5) I_3^2 = \\ &= 18 \cdot 4 + 20 \cdot 1,2^2 + 30 \cdot 0,8^2 = 120 \text{ W} \end{aligned}$$

Otrzymujemy $P = P_{\text{odb}}$, zatem zasada bilansu jest spełniona.

1.7. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.7 wskazanie amperomierza wynosi $I_5 = 2 \text{ A}$, a wartości rezystancji są równe $R = 6 \Omega$, $R_1 = 18 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = R_4 = R_5 = 20 \Omega$, $R_6 = 10 \Omega$. Obliczyć wartości napięcia i prądu wejściowego.



Rys. 1.7

ROZWIĄZANIE. Mając dany prąd w gałęzi zawierającej rezystancję R_5 , możemy obliczyć napięcie U_{bc} oraz prądy gałęziowe I_4 i I_6

$$U_{bc} = R_5 I_5 = 20 \cdot 2 = 40 \text{ V}$$

$$I_6 = \frac{U_{bc}}{R_6} = \frac{40}{10} = 4 \text{ A}$$

$$I_4 = \frac{U_{bc}}{R_4} = \frac{40}{20} = 2 \text{ A}$$

Zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa dla węzła b otrzymujemy

$$I_{23} = I_4 + I_5 + I_6 = 8 \text{ A}$$

Napięcie U_{ab} obliczamy z zależności

$$U_{ab} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} I_{23} = \frac{5 \cdot 20}{25} 8 = 32 \text{ V}$$

Napięcie U_{ac} zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa

$$U_{ac} = U_{ab} + U_{bc} = 32 + 40 = 72 \text{ V}$$

Prąd I_1 oraz prąd wejściowy I wynoszą odpowiednio

$$I_1 = \frac{U_{ac}}{R_1} = \frac{72}{18} = 4 \text{ A}$$

$$I = I_1 + I_{23} = 4 + 8 = 12 \text{ A}$$

Napięcie wejściowe

$$U = U_{ac} + RI = 72 + 6 \cdot 12 = 144 \text{ V}$$

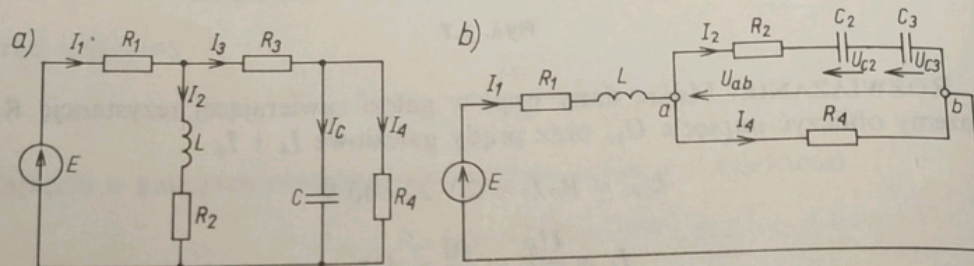
Rezystancja wejściowa obwodu

$$R_{we} = \frac{U}{I} = \frac{144}{12} = 12 \Omega$$

1.8. Do napięcia źródłowego $E = 150 \text{ V}$ dołączono obwód przedstawiony na:

a) rys. 1.8a o parametrach: $R_1 = 18 \Omega$, $R_2 = R_3 = 20 \Omega$, $R_4 = 10 \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$, $C = 40 \mu\text{F}$;

b) rys. 1.8b o parametrach: $R_1 = R_2 = 50 \Omega$, $R_4 = 100 \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$, $C_2 = 40 \mu\text{F}$, $C_3 = 60 \mu\text{F}$.
Obliczyć prądy gałęziowe oraz napięcia na poszczególnych kondensatorach.



Rys. 1.8

ROZWIĄZANIE

a) W obwodzie przedstawionym na rys. 1.8a prąd I_1 wynosi

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}} = \frac{150}{18 + 12} = 5 \text{ A}$$

Reaktancja cewki $X_L = 2\pi fL$ dla wymuszeń stałych ($f = 0$) jest równa zero ($X_L = 0$), zatem cewka stanowi zwarcie. Reaktancja kondensatora $X_C = 1/2\pi fC$ dla wymuszeń stałych dąży do nieskończoności ($X_C \rightarrow \infty$), zatem kondensator stanowi przerwę, a prąd $I_C = 0$.

Prądy gałęziowe wynoszą

$$I_2 = \frac{E - R_1 I_1}{R_2} = \frac{150 - 18 \cdot 5}{20} = 3 \text{ A}$$

$$I_3 = I_4 = \frac{E - R_1 I_1}{R_3 + R_4} = \frac{60}{30} = 2 \text{ A}$$

Napięcie na kondensatorze C

$$U_C = R_4 I_4 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ V}$$

b) W obwodzie na rys. 1.8b prądy są równe

$$I_3 = I_4 = \frac{E}{R_1 + R_4} = \frac{150}{50 + 100} = 1 \text{ A}$$

$$I_2 = 0$$

Napięcie na gałęziach równoległych

$$U_{ab} = R_4 I_4 = 100 \text{ V}$$

Przy szeregowo połączonych kondensatorach ładunki są jednakowe $Q_2 = Q_3 = Q$, zatem

$$U_{ab} = U_{C2} + U_{C3} = \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q \left(\frac{C_2 + C_3}{C_2 C_3} \right)$$

Po wykonaniu przekształceń

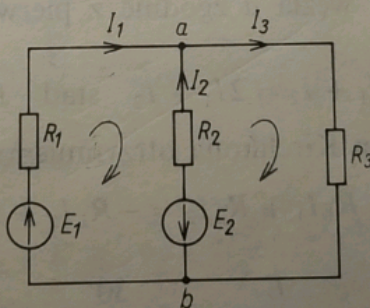
$$Q = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} U_{ab} = \frac{40 \cdot 10^{-6} \cdot 60 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-6}} 100 = 24 \cdot 10^{-4} \text{ C}$$

Napięcia na kondensatorach C_2 i C_3 wynoszą odpowiednio

$$U_{C2} = \frac{Q}{C_2} = \frac{24 \cdot 10^{-4}}{40 \cdot 10^{-6}} = 60 \text{ V}$$

$$U_{C3} = \frac{Q}{C_3} = \frac{24 \cdot 10^{-4}}{60 \cdot 10^{-6}} = 40 \text{ V}$$

1.9. Wyznaczyć rozpyły prądów w gałęziach obwodu przedstawionego na rys. 1.9. Napięcia źródłowe wynoszą: $E_1 = 80 \text{ V}$, $E_2 = 64 \text{ V}$, a rezystancje: $R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$. Sporządzić bilans mocy w obwodzie.



Rys. 1.9

ROZWIĄZANIE. Oznaczamy zwroty prądów w gałęziach. Zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa dla węzła a otrzymamy

$$I_1 + I_2 = I_3$$

Przyjmujemy zwroty obiegowe oczek i piszemy równania zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa

$$E_1 + E_2 = R_1 I_1 - R_2 I_2$$

$$-E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3$$

W wyniku rozwiązania układu równań otrzymujemy następujące wartości prądów: $I_1 = 14 \text{ A}$, $I_2 = -15 \text{ A}$, $I_3 = -1 \text{ A}$. Zwroty prądów są przyjmowane dowolnie i dlatego może okazać się, że rzeczywiste zwroty prądów w gałęziach są przeciwne do założonych. Tak jest w przypadku prądów I_2 oraz I_3 , które mają znak minus.

Sprawdźmy bilans mocy w obwodzie

$$E_1 I_1 - E_2 I_2 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2$$

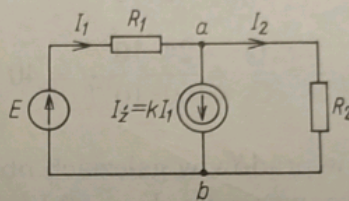
Po podstawieniu wartości liczbowych

$$80 \cdot 14 + 64 \cdot 15 = 6 \cdot 14^2 + 4 \cdot (-15)^2 + 4 \cdot (-1)^2$$

$$2080 = 2080$$

Zasada bilansu mocy jest spełniona.

1.10. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.10 obliczyć rozptyw prądów. Dane: $E = 30 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 30 \Omega$, $I_z = kI_1$, $k = 2$.



Rys. 1.10

ROZWIĄZANIE. Dla węzła a zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa mamy

$$I_1 = kI_1 + I_2 = 2I_1 + I_2 \quad \text{stąd} \quad I_2 = -I_1$$

Zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa otrzymujemy równanie

$$E = R_1 I_1 + R_2 I_2 = -R_1 I_2 + R_2 I_2$$

stąd

$$I_2 = \frac{E}{R_2 - R_1} = \frac{30}{30 - 20} = 3 \text{ A}$$

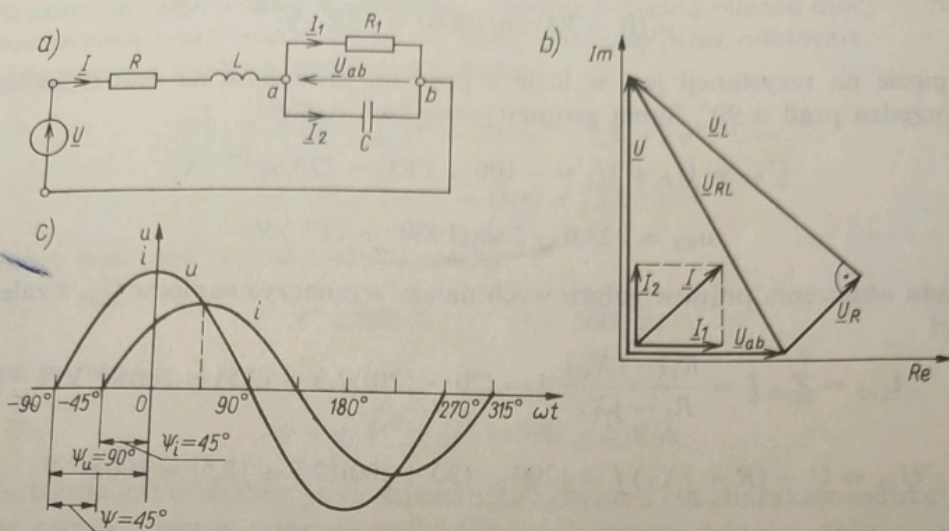
oraz

$$I_1 = -I_2 = -3 \text{ A}$$

1.2. Obwody elektryczne przy wymuszeniu sinusoidalnie zmiennym w funkcji czasu

1.11. Do obwodu przedstawionego na rys. 1.11a przyłożono napięcie o wartości chwilowej $u = 200\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ V}$ i pulsacji $\omega = 1000 \text{ rad/s}$. Rezystancje $R = 20 \Omega$, $R_1 = 40 \Omega$, indukcyjność $L = 60 \text{ mH}$, a pojemność

$C = 25 \mu\text{F}$. Obliczyć rozpyły prądów i kąt między napięciem a prądem wejściowym oraz sporządzić bilans mocy w obwodzie. Wykonać wykres wektorowy prądów i napięć.



Rys. 1.11

ROZWIĄZANIE. Reaktancje indukcyjne i pojemnościowe wynoszą odpowiednio

$$X_L = \omega L = 1000 \cdot 60 \cdot 10^{-3} = 60 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} = 40 \Omega$$

Impedancja zastępcza obwodu

$$\begin{aligned} \underline{Z}_z &= R + jX_L + \frac{R_1(-jX_C)}{R_1 - jX_C} = \\ &= 20 + j60 + 20 - j20 = 40 + j40 = 40\sqrt{2} e^{j45^\circ} \Omega \end{aligned}$$

Wartość skuteczna zespolona prądu wejściowego

OHMA $\rightarrow$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_z} = \frac{j200}{40 + j40} = \frac{200e^{j90^\circ}}{40\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = (2,5 + j2,5) = 2,5\sqrt{2} e^{j45^\circ} \text{ A}$$

Spadki napięć na rezystancji R i indukcyjności L wynoszą odpowiednio

$$\underline{U}_R = R\underline{I} = 20(2,5 + j2,5) = 50 + j50 = 50\sqrt{2} e^{j45^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_L = jX_L\underline{I} = j60(2,5 + j2,5) = -150 + j150 = 150\sqrt{2} e^{j135^\circ} \text{ V}$$

i w postaci czasowej $[u(t) = 22 \sin(\omega t + 45^\circ)]$

$$u_R(t) = 100 \sin(1000t + 45^\circ) \text{ V}$$

$$u_L(t) = 300 \sin(1000t + 135^\circ) \text{ V}$$

Napięcie na rezystancji jest w fazie z prądem, a napięcie na indukcyjności wyprzedza prąd o 90° . Suma geometryczna tych napięć

$$\underline{U}_{RL} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = -100 + j200 = 223,6 e^{j117^\circ} \text{ V}$$

$$u_{RL} = 223,6 \sqrt{2} \sin(1000t + 117^\circ) \text{ V}$$

W celu obliczenia prądów gałęziowych należy wyznaczyć napięcie $\underline{U}_{ab}$ z zależności

$$\underline{U}_{ab} = \underline{Z}_{ab} \underline{I} = \frac{R_1(-jX_C)}{R_1 - jX_C} \underline{I} = (20 - j20)(2,5 + j2,5) = 100 e^{j0^\circ} \text{ V}$$

lub

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U} - (R + jX_L) \underline{I} = j200 - (20 + j60)(2,5 + j2,5) = 100 e^{j0^\circ} \text{ V}$$

Prądy gałęziowe wynoszą

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{ab}}{R_1} = \frac{100}{40} = 2,5 \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{ab}}{-jX_C} = \frac{100}{-j40} = 2,5 e^{j90^\circ} \text{ A}$$

Prąd płynący przez rezystancję R_1 jest w fazie z napięciem $\underline{U}_{ab}$, a prąd w gałęzi z pojemnością wyprzedza to napięcie o 90° .
Postacie czasowe prądów

$$i(t) = 2,5 \sqrt{2} \sqrt{2} \sin(1000t + 45^\circ) = 5 \sin(1000t + 45^\circ) \text{ A}$$

$$i_1(t) = 2,5 \sqrt{2} \sin 1000t \text{ A}$$

$$i_2(t) = 2,5 \sqrt{2} \sin(1000t + 90^\circ) \text{ A}$$

Na rysunku 1.11b przedstawiono wykres wektorowy prądów i napięć obwodu z rys. 1.11a. Na rysunku 1.11c przedstawiono przebiegi czasowe napięcia i prądu wejściowego. Kąt między napięciem a prądem wejściowym $\psi = \psi_u - \psi_i = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. O wartości kąta przesunięcia między napięciem a prądem wejściowym decyduje charakter i wartość impedancji zastępczej $\underline{Z}_z$ obwodu.

W rozpatrywanym przypadku

$$\underline{Z}_z = 40 + j40 = 40 \sqrt{2} e^{j45^\circ} \Omega$$

Impedancja $\underline{Z}_z$ ma wartość dodatnią reaktancji, co świadczy o charakterze indukcyjnym obwodu; argumentem tej impedancji jest kąt 45° (kąt o jaki napięcie wejściowe wyprzedza prąd wejściowy).
 Sprawdzimy bilans mocy w obwodzie. Zgodnie z zasadą bilansu mocy — moc dostarczona przez źródło równa się mocy pobranej przez odbiornik.
 Moc pozorna źródła w postaci zespolonej

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{U} \underline{I}^* = 200e^{j90^\circ} \cdot 2,5 \sqrt{2} e^{-j45^\circ} =$$

$$= 500 \sqrt{2} e^{j45^\circ} = (500 + j500) \text{ V} \cdot \text{A}$$

Wobec tego moc czynna i bierna źródła

$$P = 500 \text{ W}; \quad Q = 500 \text{ var}$$

Moc pozorna

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 500 \sqrt{2} \text{ V} \cdot \text{A}$$

Moc bierna jest dodatnia, gdyż impedancja zastępcza ma charakter indukcyjny.
 Moc czynna i bierna pobrana przez odbiornik wynosi odpowiednio

$$P_o = RI^2 + R_1 I_1^2 = 20(2,5 \sqrt{2})^2 + 40(2,5)^2 = 500 \text{ W}$$

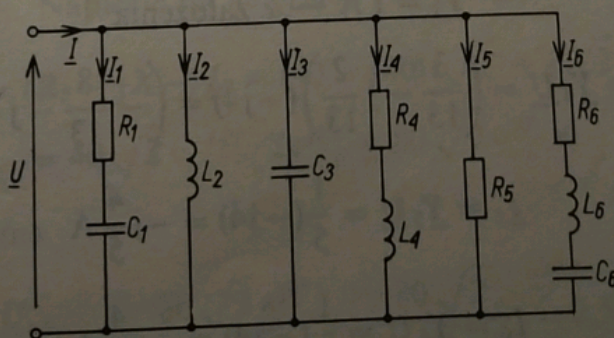
$$Q_o = X_L I^2 - X_C I_2^2 = 60(2,5 \sqrt{2})^2 - 40(2,5)^2 = 500 \text{ var}$$

W wyniku obliczeń otrzymujemy

$$P = P_o; \quad Q = Q_o$$

Zatem zasada bilansu mocy jest spełniona.

1.12. Parametry obwodu przedstawionego na rys. 1.12 wynoszą: $R_1 = 3 \Omega$, $X_{C1} = 2 \Omega$, $X_{L2} = 4 \Omega$, $X_{C3} = 4 \Omega$, $R_4 = 3 \Omega$, $X_{L4} = 2 \Omega$, $R_5 = 5 \Omega$, $R_6 = 7 \Omega$, $X_{L6} = 2 \Omega$, $X_{C6} = 2 \Omega$; prąd $\underline{I}_3 = 1 \text{ A}$. Obliczyć admitancję zastępczą obwodu, wartości skuteczne prądów w gałęziach, wartość skuteczną napięcia na zaciskach oraz moc pobieraną przez obwód.



Rys. 1.12

ROZWIĄZANIE. Obliczymy admitancje zespolone poszczególnych gałęzi

$$\underline{Y}_1 = \frac{R_1}{Z_1^2} + j \frac{X_{C1}}{Z_1^2} = \left(\frac{3}{13} + j \frac{2}{13} \right) S$$

$$\underline{Y}_2 = -j \frac{1}{X_{L2}} = -j \frac{1}{4} S$$

$$\underline{Y}_3 = j \frac{1}{X_{C3}} = j \frac{1}{4} S$$

$$\underline{Y}_4 = \frac{R_4}{Z_4^2} - j \frac{X_{L4}}{Z_4^2} = \left(\frac{3}{13} - j \frac{2}{13} \right) S$$

$$\underline{Y}_5 = \frac{1}{R_5} = \frac{1}{5} S$$

$$\underline{Y}_6 = \frac{1}{Z_6} = \frac{1}{7 + j(2 - 2)} = \frac{1}{7} S$$

Admitancja zastępcza obwodu

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6 = \\ &= \frac{3}{13} + j \frac{2}{13} - j \frac{1}{4} + j \frac{1}{4} + \frac{3}{13} - j \frac{2}{13} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} = 0,8 S \end{aligned}$$

Admitancja zastępcza obwodu ma więc charakter rzeczywisty.

Napięcie na zaciskach obwodu

$$\underline{U} = -j X_{C3} \underline{I}_3 = -j 4 \cdot 1 = -j 4 V$$

Wartość skuteczna napięcia wynosi $U = 4 V$.

Prądy w poszczególnych gałęziach w postaci zespolonej wynoszą

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \underline{U} = \left(\frac{3}{13} + j \frac{2}{13} \right) (-j 4) = \left(\frac{8}{13} - j \frac{12}{13} \right) A$$

$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_2 \underline{U} = \left(-j \frac{1}{4} \right) (-j 4) = -1 A$$

$$\underline{I}_3 = 1 A \text{ — z założenia}$$

$$\underline{I}_4 = \underline{Y}_4 \underline{U} = \left(\frac{3}{13} - j \frac{2}{13} \right) (-j 4) = \left(-\frac{8}{13} - j \frac{12}{13} \right) A$$

$$\underline{I}_5 = \underline{Y}_5 \underline{U} = \frac{1}{5} (-j 4) = -j \frac{4}{5} A$$

$$\underline{I}_6 = \underline{Y}_6 \underline{U} = \frac{1}{7} (-j 4) = -j \frac{4}{7} A$$

Zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa prąd całkowity

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4 + \underline{I}_5 + \underline{I}_6 = -j3,2 \text{ A}$$

a jego wartość skuteczna (moduł)

$$I = 3,2 \text{ A}$$

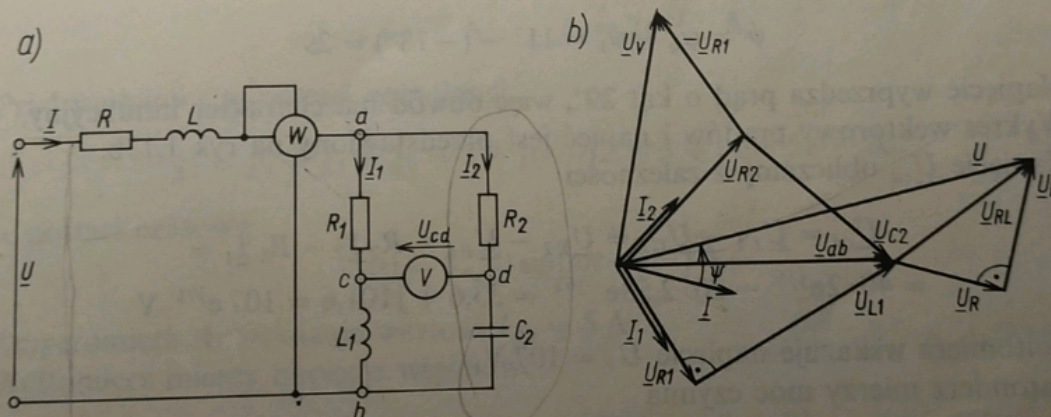
Moc pozorna w postaci zespolonej

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{U} \underline{I}^* = (-j4)(j3,2) = 12,8 \text{ V}\cdot\text{A}$$

Część urojona mocy pozornej zespolonej jest równa zero, a zatem całkowita moc bierna pobierana przez układ jest równa zero ($Q = 0$) i wówczas moc czynna

$$P = 12,8 \text{ W}$$

1.13. Parametry obwodu przedstawionego na rys. 1.13a wynoszą: $\underline{Z} = R + jX_L = (20 + j20) \Omega$, $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L1} = (20 + j40) \Omega$, $\underline{Z}_2 = R_2 - jX_{C2} = (40 - j40) \Omega$. Prąd $\underline{I}_2 = 2e^{j45^\circ} \text{ A}$. Obliczyć wartość napięcia zasilającego, wskazanie woltomierza i watomierza oraz kąt między napięciem i prądem wejściowym. Wykonać wykres wektorowy.



Rys. 1.13

ROZWIĄZANIE. Napięcie na gałęziach równoległych

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ab} &= (R_2 - jX_{C2}) \underline{I}_2 = (40 - j40)(\sqrt{2} + j\sqrt{2}) = \\ &= 40\sqrt{2} e^{-j45^\circ} \cdot 2e^{j45^\circ} = 80\sqrt{2} e^{j0^\circ} \text{ V} \end{aligned}$$

zatem z prawa Ohma

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{ab}}{R_1 + jX_{L1}} = \frac{80\sqrt{2} e^{j0^\circ}}{20 + j40} = \frac{80\sqrt{2}}{20\sqrt{5} e^{j63^\circ}} = 2,53 e^{-j63^\circ} \text{ A}$$

Dla węzła a zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa prąd wejściowy

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 1,15 - j2,25 + \sqrt{2} + j\sqrt{2} = \\ = 2,56 - j0,84 = 2,7e^{-j18^\circ} \text{ A}$$

w postaci czasowej

$$i(t) = 2,7\sqrt{2} \sin(\omega t - 18^\circ) \text{ A}$$

Prąd $\underline{I}$ wywołuje spadki napięć

$$\underline{U}_R = R \underline{I} = 20 \cdot 2,7e^{-j18^\circ} = 54e^{-j18^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_L = jX_L \underline{I} = 20e^{j90^\circ} \cdot 2,7e^{-j18^\circ} = 54e^{j72^\circ} \text{ V}$$

$$\underline{U}_{RL} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = 68 + j34,7 = 76,4e^{j27^\circ} \text{ V}$$

Napięcie zasilające zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa

$$\underline{U} = \underline{U}_{RL} + \underline{U}_{ab} = 68 + j34,7 + 112,8 = 180,8 + j34,7 = 184e^{j11^\circ} \text{ V}$$

w postaci czasowej

$$u(t) = 184\sqrt{2} \sin(\omega t + 11^\circ) \text{ V}$$

Kąt między napięciem i prądem wejściowym

$$\psi = \psi_u - \psi_i = 11^\circ - (-18^\circ) = 29^\circ$$

Napięcie wyprzedza prąd o kąt 29° , więc obwód ma charakter indukcyjny.

Wykres wektorowy prądów i napięć jest przedstawiony na rys. 1.13b.

Napięcie $\underline{U}_{cd}$ obliczamy z zależności

$$\underline{U}_{cd} = \underline{U}_{L1} - \underline{U}_{C2} = \underline{U}_{R2} - \underline{U}_{R1} = R_2 \underline{I}_2 - R_1 \underline{I}_1 = \\ = 40 \cdot 2e^{j45^\circ} - 20 \cdot 2,53e^{-j63^\circ} = 33,6 + j101,6 = 107e^{j71^\circ} \text{ V}$$

Woltomierz wskazuje napięcie $U_V = 107 \text{ V}$.

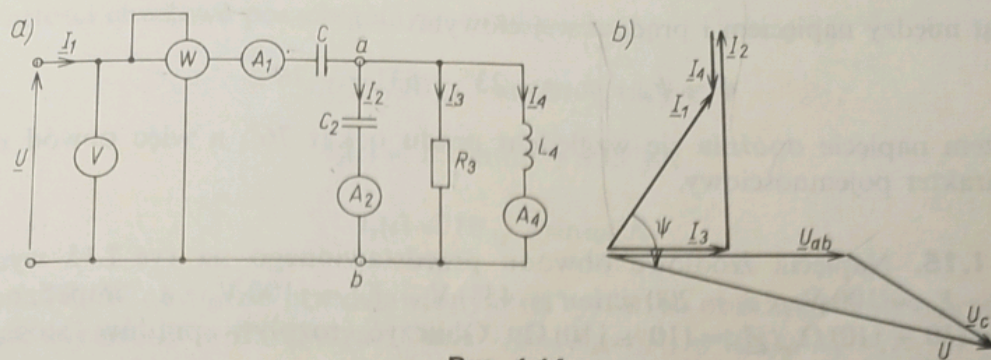
Watomierz mierzy moc czynną

$$P = \operatorname{Re}(\underline{U}_{ab} \underline{I}^*) = [\operatorname{Re}(\underline{Z}_{ab})] I^2 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = \\ = 20 \cdot 2,53^2 + 40 \cdot 2^2 = 288 \text{ W}$$

1.14. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.14a, $R_3 = X_C = 20 \Omega$, a prąd $\underline{I}_3 = 3 \text{ A}$. Wskazania amperomierzy wynoszą: $I_{A2} = 6 \text{ A}$, $I_{A4} = 2 \text{ A}$. Obliczyć wartości X_{C2} , X_{L4} , wskazania amperomierza A_1 , woltomierza i watomierza oraz wykonać wykres wektorowy prądów i napięć. Określić charakter obwodu.

ROZWIĄZANIE. Napięcie na gałęziach równoległych

$$\underline{U}_{ab} = R_3 \underline{I}_3 = 60e^{j0^\circ} \text{ V}$$



Rys. 1.14

Z prawa Ohma obliczamy wartości reaktancji indukcyjnej i pojemnościowej odpowiednio

$$X_{L4} = \frac{U_{ab}}{I_4} = \frac{60}{2} = 30 \, \Omega$$

$$X_{C2} = \frac{U_{ab}}{I_2} = \frac{60}{6} = 10 \, \Omega$$

Prąd $\underline{I}_2$ wyprzedza napięcie $\underline{U}_{ab}$ o 90° , a prąd $\underline{I}_4$ opóźnia się względem napięcia $\underline{U}_{ab}$ o 90° . Prądy te mają postacie wykładnicze

$$\underline{I}_2 = 6e^{j90^\circ} \text{ A}; \quad \underline{I}_4 = 2e^{-j90^\circ} \text{ A}$$

Prąd wejściowy w postaci zespolonej

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4 = 3 + j6 - j2 = 3 + j4 = 5e^{j53^\circ} \text{ A}$$

w postaci czasowej

$$i_1(t) = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 53^\circ) \text{ A}$$

Amperomierz A_1 wskazuje wartość $I_{A1} = 5 \text{ A}$.

Woltomierz mierzy napięcie wejściowe

$$\begin{aligned} \underline{U} &= -jX_C \underline{I}_1 + \underline{U}_{ab} = -j20(3 + j4) + 60 = \\ &= 140 - j60 = 152,3e^{-j23^\circ} \text{ V} \end{aligned}$$

zatem wskazanie woltomierza wynosi

$$U_V = \sqrt{140^2 + 60^2} = 152,3 \text{ V}$$

Watomierz mierzy moc

$$P = \text{Re}(\underline{U} \underline{I}_1^*) = \text{Re}[(140 - j60)(3 - j4)] = 180 \text{ W}$$

Watomierz mierzy moc czynną, jaka wydzieli się na rezystancji R_3

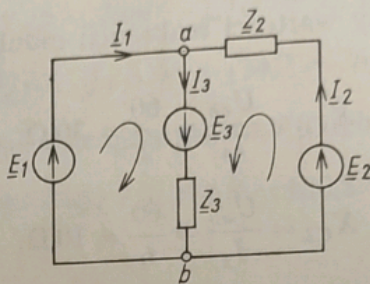
$$P_{R3} = R_3 I_3^2 = 20 \cdot 9 = 180 \text{ W}$$

Kąt między napięciem i prądem wejściowym

$$\psi = \psi_u - \psi_i = -23^\circ - 53^\circ = -76^\circ$$

Zatem napięcie opóźnia się względem prądu o kąt 76° , a więc obwód ma charakter pojemnościowy.

1.15. Napięcia źródłowe obwodu przedstawionego na rys. 1.15 wynoszą: $\underline{E}_1 = 100 \text{ V}$, $e_2 = 200 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ V}$, $\underline{E}_3 = j100 \text{ V}$, a impedancje: $\underline{Z}_2 = (10 - j10) \Omega$, $\underline{Z}_3 = (10 + j10) \Omega$. Obliczyć rozpyły prądów stosując prawa Kirchhoffa.



Rys. 1.15

ROZWIĄZANIE. Zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa dla węzła a otrzymujemy

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

Przyjmujemy zwroty obiegowe oczek i piszemy równania zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa

$$\underline{E}_1 + \underline{E}_3 = \underline{Z}_3 \underline{I}_3$$

$$\underline{E}_2 + \underline{E}_3 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \underline{I}_3$$

Z równania pierwszego wyznaczamy prąd $\underline{I}_3$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_1 + \underline{E}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{100 + j100}{10 + j10} = 10 \text{ A}$$

Odejmując stronami równanie pierwsze od równania drugiego, otrzymujemy

$$\underline{E}_2 - \underline{E}_1 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2$$

stąd

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_2 - \underline{E}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{100 + j100 - 100}{10 - j10} = \frac{j100}{10(1 - j1)} = (-5 + j5) \text{ A}$$

Zatem prąd $\underline{I}_1$ wynosi

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_3 - \underline{I}_2 = 10 + 5 - j5 = (15 - j5) \text{ A}$$

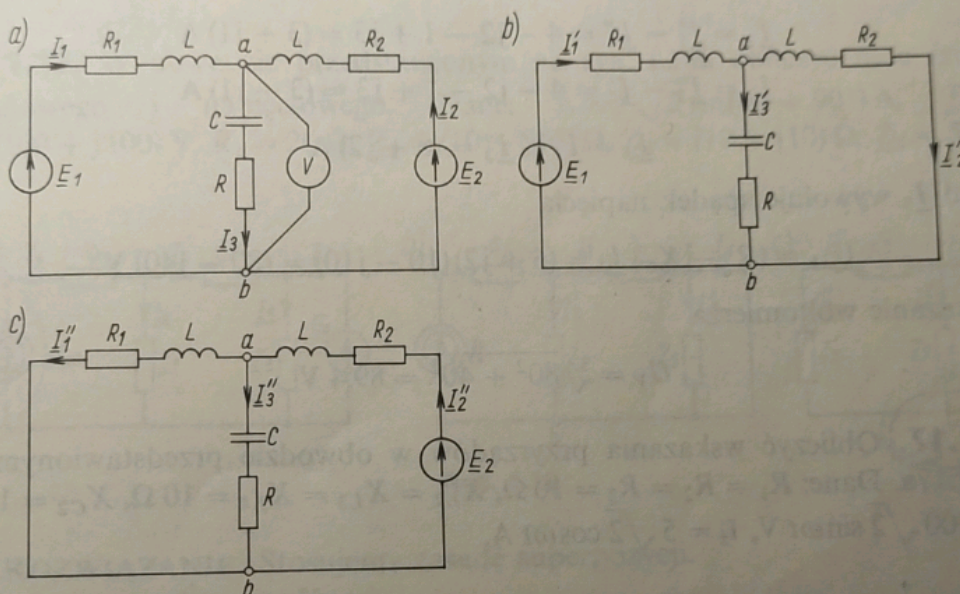
Wartości chwilowe poszczególnych prądów

$$i_1(t) = 10\sqrt{5} \sin(\omega t - 18^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 10 \sin(\omega t + 135^\circ) \text{ A}$$

$$i_3(t) = 10\sqrt{2} \sin \omega t \text{ A}$$

1.16. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.16a obliczyć rozpływ prądów oraz wskazanie woltomierza. Dane: $R = R_1 = R_2 = 10 \Omega$, $X_L = X_C = 10 \Omega$,



Rys. 1.16

ROZWIĄZANIE. Rozpływ prądów obliczamy korzystając z zasady superpozycji.

a) Obliczamy wartości prądów od źródła $\underline{E}_1$ (rys. 1.16b)

$$\underline{I}'_1 = \frac{\underline{E}_1}{R_1 + jX_L + \frac{(R_2 + jX_L)(R - jX_C)}{R_2 + jX_L + R - jX_C}} = \frac{100}{10 + j10 + 10} = (4 - j2) \text{ A}$$

$$\underline{I}'_2 = \frac{\underline{U}_{ab}}{R_2 + jX_L} = \frac{\underline{Z}_{ab} \underline{I}'_1}{R_2 + jX_L} = \frac{10(4 - j2)}{10 + j10} = (1 - j3) \text{ A}$$

$$\underline{I}'_3 = \frac{\underline{U}_{ab}}{R - jX_C} = \frac{20(2 - j)}{10(1 - j)} = (3 + j1) \text{ A}$$

b) Obliczamy wartości prądów od źródła $\underline{E}_2$ (rys. 1.16c)

$$\underline{I}_2'' = \frac{\underline{E}_2}{R_2 + jX_L + \frac{(R_1 + jX_L)(R - jX_C)}{R_1 + jX_L + R - jX_C}} = (4 - j2) \text{ A}$$

$$\underline{I}_1'' = \frac{(4 - j2) 10}{10 + j10} = (1 - j3) \text{ A}$$

$$\underline{I}_3'' = \frac{(4 - j2) 10}{10 - j10} = (3 + j1) \text{ A}$$

Przyjmując zwroty prądów zgodnie z rys. 1.16a, otrzymujemy

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1' - \underline{I}_1'' = 4 - j2 - 1 + j3 = (3 + j1) \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_2' - \underline{I}_2'' = 4 - j2 - 1 + j3 = (3 + j1) \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_3' + \underline{I}_3'' = (6 + j2) \text{ A}$$

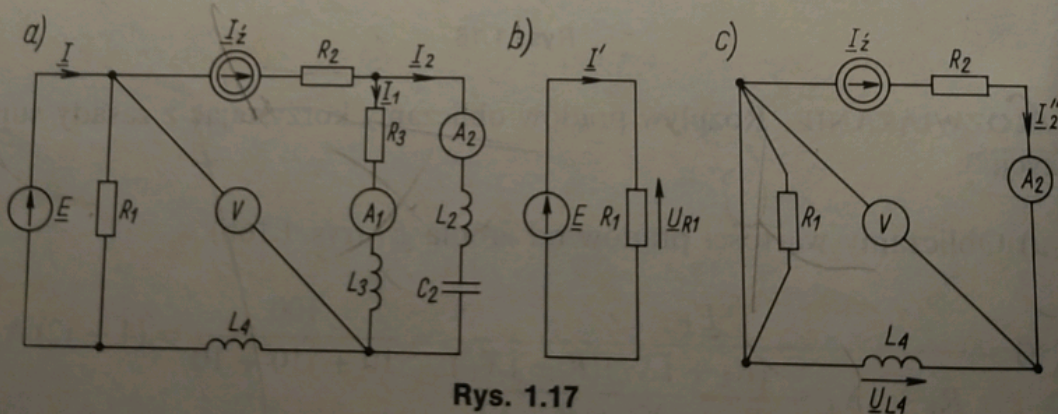
Prąd $\underline{I}_3$ wywołuje spadek napięcia

$$\underline{U}_{ab} = (R - jX_C) \underline{I}_3 = (6 + j2)(10 - j10) = (80 - j40) \text{ V}$$

Wskazanie woltomierza

$$U_V = \sqrt{80^2 + 40^2} = 89,4 \text{ V}$$

1.17. Obliczyć wskazania przyrządów w obwodzie przedstawionym na rys. 1.17a. Dane: $R_1 = R_2 = R_3 = 10 \Omega$, $X_{L2} = X_{L3} = X_{L4} = 10 \Omega$, $X_{C2} = 10 \Omega$, $e = 100 \sqrt{2} \sin \omega t \text{ V}$, $i_z = 5 \sqrt{2} \cos \omega t \text{ A}$.



Rys. 1.17

ROZWIĄZANIE. Korzystamy z zasady superpozycji. Schemat obwodu przy wymuszeniu napięciowym podano na rys. 1.17b, a przy wymuszeniu prądowym na rys. 1.17c.

Zgodnie ze schematem z rys. 1.17b

$$\underline{U}_{R1} = \underline{E} = 100 \text{ V}; \quad \underline{I}_1' = 0; \quad \underline{I}_2' = 0$$

Zgodnie ze schematem z rys. 1.17c prąd $\underline{I}_z$ popłynie przez rezystancję R_2 oraz gałąź L_2, C_2 o reaktancji $X = X_{L2} - X_{C2} = 0$. W wyniku przepływu prądu powstanie napięcie

$$\underline{U}_{L4} = jX_{L4} \underline{I}_z = 10e^{j90^\circ} \cdot 5e^{j90^\circ} = -50 \text{ V}; \quad \underline{I}_1'' = 0; \quad \underline{I}_2'' = \underline{I}_z$$

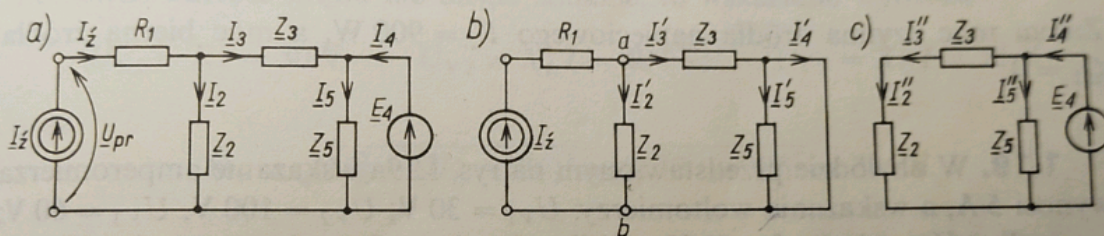
Wskazanie woltomierza w obwodzie na rys. 1.17a

$$\underline{U}_V = \underline{U}_{R1} - \underline{U}_{L4} = 100 + 50 = 150 \text{ V}$$

Wskazania amperomierzy

$$I_{A1} = 0; \quad I_{A2} = 5 \text{ A}$$

1.18. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.18a obliczyć moc źródła prądowego i napięciowego. Dane: $i_z = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ A}$, $\underline{E}_4 = (100 + j100) \text{ V}$, $R_1 = 20 \Omega$, $\underline{Z}_2 = (10 - j10) \Omega$, $\underline{Z}_3 = (10 + j10) \Omega$, $\underline{Z}_5 = 50 \Omega$.



Rys. 1.18

ROZWIĄZANIE. Stosujemy zasadę superpozycji. Obliczamy rozpyły prądów:

— od źródła prądowego (rys. 1.18b)

$$\underline{I}_2' = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_2} = \frac{(\underline{Z}_2 \underline{Z}_3) \underline{I}_z}{(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \underline{Z}_2} = \frac{50e^{j90^\circ}}{10 - j10} = (-2,5 + j2,5) \text{ A}$$

$$\underline{I}_3' = \underline{I}_4' = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_3} = \frac{50e^{j90^\circ}}{10 + j10} = (2,5 + j2,5) \text{ A} \quad \text{oraz} \quad \underline{I}_5' = 0$$

— od źródła napięciowego (rys. 1.18c)

$$\underline{I}_2'' = \underline{I}_3'' = \frac{\underline{E}_4}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{100 + j100}{20} = (5 + j5) \text{ A}$$

$$\underline{I}_5'' = \frac{\underline{E}_4}{\underline{Z}_5} = \frac{100 + j100}{50} = (2 + j2) \text{ A}$$

$$\underline{I}_4'' = \underline{I}_3'' + \underline{I}_5'' = (7 + j7) \text{ A}$$

Przyjmując zwroty prądów zgodnie z rys. 1.18a, otrzymujemy

$$\underline{I}_2 = \underline{I}'_2 + \underline{I}''_2 = -2,5 + j2,5 + 5 + j5 = (2,5 + j7,5) \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}'_3 - \underline{I}''_3 = 2,5 + j2,5 - 5 - j5 = (-2,5 - j2,5) \text{ A}$$

$$\underline{I}_5 = \underline{I}'_5 + \underline{I}''_5 = (2 + j2) \text{ A}$$

$$\underline{I}_4 = -\underline{I}'_4 + \underline{I}''_4 = -2,5 - j2,5 + 7 + j7 = (4,5 + j4,5) \text{ A}$$

Moc pozorna w postaci zespolonej źródła prądowego

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_{pr} \underline{I}_2^* = (R_1 \underline{I}_2 + Z_2 \underline{I}_2) 5e^{-j90^\circ} =$$

$$= [20 \cdot j5 + (10 - j10)(2,5 + j7,5)](-j5) = (750 - j500) \text{ V} \cdot \text{A}$$

Zatem moc czynna i bierna źródła prądowego wynoszą odpowiednio

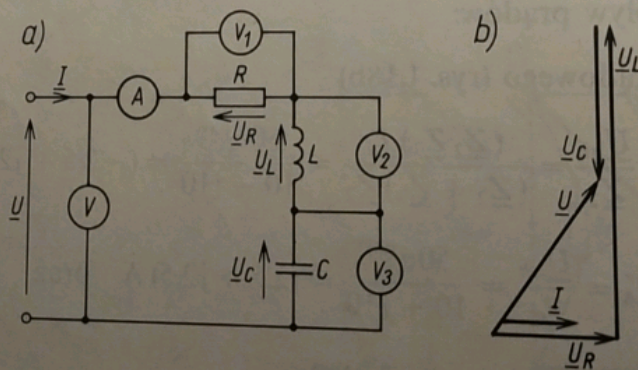
$$P_1 = 750 \text{ W}; \quad Q_1 = -500 \text{ var}$$

Moc pozorna w postaci zespolonej źródła napięciowego

$$\underline{S}_2 = \underline{E}_4 \underline{I}_4^* = (100 + j100)(4,5 - j4,5) = 900 \text{ V} \cdot \text{A}$$

Zatem moc czynna źródła napięciowego $P_2 = 900 \text{ W}$, a moc bierna źródła $Q_2 = 0$.

1.19. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.19a wskazanie amperomierza wynosi 5 A, a wskazania woltomierzy: $U_{V1} = 30 \text{ V}$, $U_{V2} = 100 \text{ V}$, $U_{V3} = 60 \text{ V}$; częstotliwość napięcia $f = 50 \text{ Hz}$. Obliczyć wskazania woltomierzy, jeżeli częstotliwość wzrosła czterokrotnie, a wartość prądu w obwodzie nie uległa zmianie.



Rys. 1.19

ROZWIĄZANIE

a) Dla częstotliwości $f = 50 \text{ Hz}$ wartości rezystancji i reaktancji wynoszą odpowiednio

$$R = \frac{U_{V1}}{I} = 6 \Omega; \quad X_L = \frac{U_{V2}}{I} = 20 \Omega; \quad X_C = \frac{U_{V3}}{I} = 12 \Omega$$

Impedancja obwodu

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = 6 + j8 = 10e^{j53^\circ} \Omega$$

Wskazanie woltomierza na zaciskach wejściowych dwójnika RLC , zgodnie z wykresem wektorowym przedstawionym na rys. 1.19b, wynosi

$$U_V = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ V}$$

lub

$$U_V = ZI = 10 \cdot 5 = 50 \text{ V}$$

b) Czterokrotny wzrost częstotliwości powoduje czterokrotny wzrost reaktancji indukcyjnej oraz czterokrotne zmniejszenie reaktancji pojemnościowej, a wartość rezystancji nie ulega zmianie. Zatem

$$R = 6 \Omega; \quad X'_L = 4X_L = 80 \Omega; \quad X'_C = \frac{X_C}{4} = 3 \Omega$$

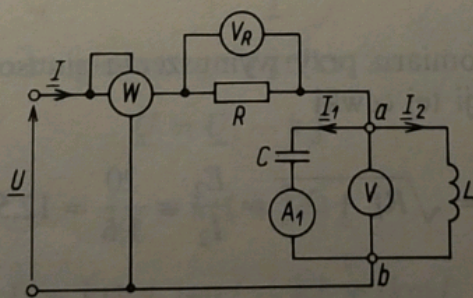
Ponieważ wartość prądu nie uległa zmianie, to wskazania wynoszą

$$U_{V1} = RI = 30 \text{ V}; \quad U_{V2} = X'_L I = 400 \text{ V}; \quad U_{V3} = X'_C I = 15 \text{ V}$$

oraz

$$U_V = \sqrt{U_R^2 + (U'_L - U'_C)^2} = \sqrt{30^2 + 385^2} = 386 \text{ V}$$

1.20. Jak zmienia się wskazania przyrządów w obwodzie przedstawionym na rys. 1.20, jeżeli przy niezmienionym napięciu zasilania do cewki powietrznej zostanie wprowadzony rdzeń ferromagnetyczny (cewka pozostaje nadal liniowa)? W rozważaniach pominąć straty w rdzeniu oraz przyjąć, że bez rdzenia i po jego wprowadzeniu $X_C > X_L$.



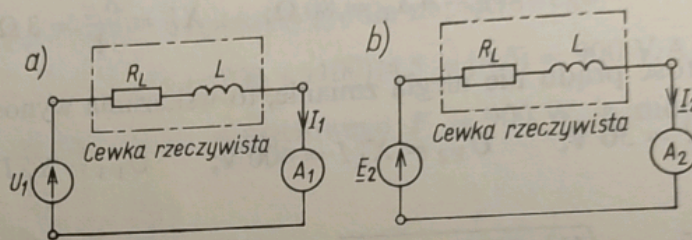
Rys. 1.20

ROZWIĄZANIE. Po wprowadzeniu do cewki powietrznej rdzenia ferromagnetycznego zwiększa się indukcyjność, a zatem i reaktancja indukcyjna X_L . Susceptancja gałęzi $a-b$ zmniejsza się, co wynika z wyrażenia

$$B_{ab} = |B_C - B_L|$$

Zatem zarówno impedancja gałęzi $Z_{ab} = \frac{1}{Y_{ab}} = \frac{1}{B_{ab}}$, jak i impedancja całego obwodu $Z = \sqrt{R^2 + Z_{ab}^2}$ zwiększają się. Wskutek tego zmienia się prąd w obwodzie oraz zmniejszają się wskazania woltomierza V_R , gdyż $U_{VR} = RI$, i watomierza W , ponieważ $P = RI^2$. Z zależności $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_{ab}$ wynika, że jeśli $\underline{U} = \text{const}$, to obniżenie napięcia U_R powoduje wzrost napięcia U_{ab} , a w konsekwencji i zwiększenie wskazań amperomierza A_1 .

1.21. W celu wyznaczenia rezystancji i reaktancji cewki rzeczywistej włączono ją do źródła napięcia stałego $U_1 = 20 \text{ V}$ i wówczas popłynął prąd $I_1 = 8 \text{ A}$ (rys. 1.21a). Następnie włączono tę cewkę do źródła napięcia sinusoidalnego o wartości skutecznej $E_2 = 20 \text{ V}$, częstotliwości $f = 50 \text{ Hz}$ i wówczas popłynął prąd o wartości skutecznej $I_2 = 1,6 \text{ A}$ (rys. 1.21b). Obliczyć wartość rezystancji R_L oraz indukcyjność L tej cewki.



Rys. 1.21

ROZWIĄZANIE

a) Przy wymuszeniu napięciem stałym indukcyjność jest zwarta, zatem możemy obliczyć rezystancję tej cewki z prawa Ohma

$$R_L = \frac{U_1}{I_1} = \frac{20}{8} = 2,5 \Omega$$

b) Na podstawie pomiaru przy wymuszeniu sinusoidalnym możemy obliczyć moduł impedancji tej cewki

$$Z_L = \sqrt{R_L^2 + X_L^2} = \frac{E_2}{I_2} = \frac{20}{1,6} = 12,5 \Omega$$

Zatem

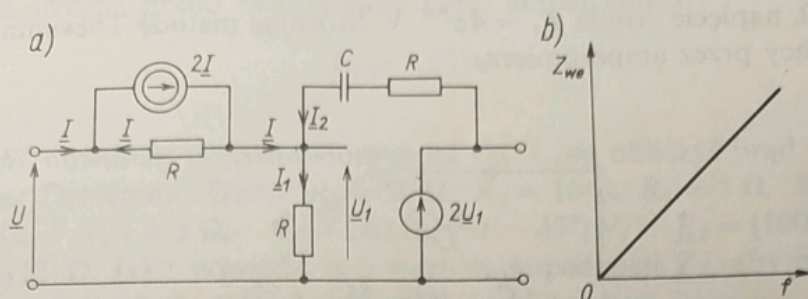
$$X_L = \sqrt{Z_L^2 - R_L^2} = \sqrt{12,5^2 - 2,5^2} = \sqrt{150} = 12,24 \Omega$$

$$X_L = 2\pi fL \quad \text{stad} \quad L = \frac{12,24}{314} = 39 \text{ mH}$$

Impedancja cewki

$$\underline{Z}_L = (2,5 + j12,24) \Omega$$

1.22. Obliczyć impedancję wejściową obwodu o parametrach: $R = k \Omega$, $C = 1/k \text{ F}$ (gdzie k jest dowolną liczbą naturalną), przedstawionego na rys. 1.22a. Wykreślić moduł tej impedancji w funkcji częstotliwości.



Rys. 1.22

ROZWIĄZANIE. Obwód z rys. 1.22a opisujemy równaniem wynikającym z pierwszego prawa Kirchhoffa

$$\underline{I} = \underline{I}_1 - \underline{I}_2$$

przy czym

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{k}; \quad \underline{I}_2 = -\frac{\underline{U}_1}{k + \frac{k}{j\omega}}$$

Otrzymujemy zatem

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_1}{k} - \frac{\underline{U}_1 j\omega}{k(1 + j\omega)} = \frac{\underline{U}_1}{k(1 + j\omega)}$$

Impedancję wejściową obliczamy z zależności

$$\underline{Z}_{we} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

Z bilansu napięć dla oczka pierwszego wynika, że

$$\underline{U} = \underline{U}_1 - k \underline{I}$$

Podstawiając

$$\underline{U}_1 = k(1 + j\omega) \underline{I}$$

otrzymujemy

$$\underline{U} = k(1 + j\omega) \underline{I} - k \underline{I} = jk\omega \underline{I}$$

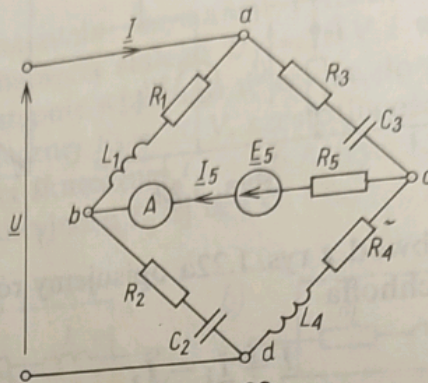
Zatem impedancja wejściowa

$$\underline{Z}_{we} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{jk\omega \underline{I}}{\underline{I}} = jk\omega = jk2\pi f$$

Wykres impedancji wejściowej układu w funkcji częstotliwości przedstawiono na rys. 1.22b.

1.3. Przekształcenia równoważne

1.23. Napięcie $\underline{U} = 10 \text{ V}$ przyłożono do obwodu (rys. 1.23) o parametrach: $R_1 = R_3 = R_5 = 1 \Omega$, $R_2 = R_4 = 2 \Omega$, $X_{L1} = 1 \Omega$, $X_{L4} = 2 \Omega$, $X_{C2} = 2 \Omega$, $X_{C3} = 1 \Omega$, napięcie źródła $\underline{E}_5 = 4e^{j90^\circ} \text{ V}$. Stosując metodę Thévenina obliczyć prąd płynący przez amperomierz.



Rys. 1.23

ROZWIĄZANIE. Napięcie zastępcze $\underline{E}_{cb}$ obliczymy jako napięcie na zaciskach $c-b$ w stanie jałowym, tzn. przy przerwie w gałęzi $c-b$. W takim stanie pracy prąd płynący w gałęzi o elementach R_1 , L_1 , R_2 , C_2 wynika ze wzoru

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{10}{3 - j1} = (3 + j1) \text{ A}$$

a prąd płynący w gałęzi o elementach R_3 , C_3 , R_4 , L_4

$$\underline{I}_{34} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \frac{10}{3 + j1} = (3 - j1) \text{ A}$$

Wyznamy napięcie $\underline{U}_{ab}$ na zaciskach gałęzi o impedancji $\underline{Z}_1$ oraz napięcie $\underline{U}_{ac}$ na gałęzi o impedancji $\underline{Z}_3$

$$\underline{U}_{ab} = \underline{Z}_1 \underline{I}_{12} = (1 + j1)(3 + j1) = (2 + j4) \text{ V}$$

$$\underline{U}_{ac} = \underline{Z}_3 \underline{I}_{34} = (1 - j1)(3 - j1) = (2 - j4) \text{ V}$$

Napięcie na zaciskach $c-b$ w stanie jałowym

$$\underline{E}_{cb} = \underline{U}_{ab} - \underline{U}_{ac} = j8 \text{ V}$$

Wyznamy impedancję zastępczą widzianą z zacisków $c-b$ przy zwarciu źródła zasilania

$$\underline{Z}_z = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \frac{(1 + j1)(2 - j2)}{3 - j1} + \frac{(1 - j1)(2 + j2)}{3 + j1} = 2,4 \Omega$$

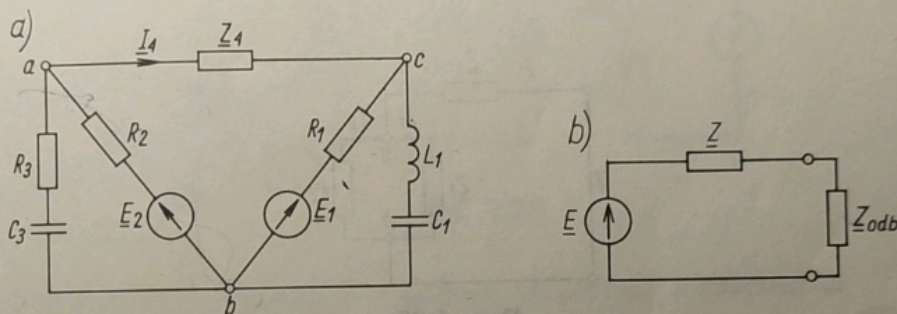
Prąd w gałęzi amperomierza wynosi

$$I_5 = \frac{\underline{E}_{cb} + \underline{E}_5}{\underline{Z}_z + R_5} = \frac{j8 + j4}{2,4 + 1} = \frac{j12}{3,4} = j3,53 \text{ A}$$

Wartość skuteczna prądu wskazywana przez amperomierz

$$I_A = 3,53 \text{ A}$$

1.24. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.24a obliczyć prąd $\underline{I}_4$ stosując twierdzenie Thevenina. Dane: $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$, $X_{C1} = 15 \Omega$, $X_{L1} = 15 \Omega$, $X_{C3} = 5 \Omega$, $e_1 = 282 \cos(\omega t - 45^\circ) \text{ V}$, $\underline{E}_2 = (100 + j100) \text{ V}$, $\underline{Z}_4 = (6 + j12) \Omega$. Jaka powinna być wartość impedancji $\underline{Z}_4$, aby moc czynna wydzielona na niej była maksymalna? Obliczyć tę moc.



Rys. 1.24

ROZWIĄZANIE. Impedancja widziana z zacisków $a-c$ jest równa impedancji gałęzi $a-b$, gdyż $X_{C1} = X_{L1}$ i wobec tego impedancja gałęzi $b-c$ jest równa zero, zatem

$$\underline{Z}_{ac} = \frac{R_2(R_3 - jX_{C3})}{R_2 + R_3 - jX_{C3}} = (4 - j2) \Omega$$

Ze względu na zwarcie gałęzi $b-c$, napięcie $\underline{U}_{ac}$ od źródła $\underline{E}_1$ jest równe zero, natomiast napięcie na zaciskach $a-c$ w stanie jałowym od źródła $\underline{E}_2$ wynosi

OHMA $\left\{ \underline{U}_{ac} = \frac{\underline{E}_2(R_3 - jX_{C3})}{R_2 + R_3 - jX_{C3}} = \frac{100(1 + j1)(5 - j5)}{15 - j5} = (60 + j20) = 63,2 e^{j18^\circ} \text{ V} \right.$

Prąd $\underline{I}_4$ w postaci zespolonej, wynikający z dwójnika zastępczego Thevenina

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{U}_{ac}}{\underline{Z}_{ac} + \underline{Z}_4} = \frac{60 + j20}{4 - j2 + 6 + j12} = (4 - j2) = \sqrt{20} e^{-j26^\circ} \text{ A}$$

i w postaci czasowej

$$i_4(t) = 6,32 \sin(\omega t - 26^\circ) \text{ A}$$

Warunkiem, aby $P = P_{\max}$ jest $\underline{Z}_{odb} = \underline{Z}^*$ (rys. 1.24b).

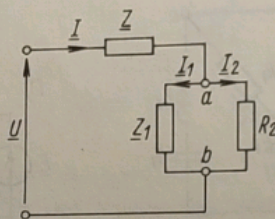
W rozpatrywanym przypadku oznacza to, że impedancja $\underline{Z}_4 = 4 + j2 = \underline{Z}_4^*$, a wówczas moc maksymalna

$$P_{\max} = \frac{U_{ac}^2}{4 \operatorname{Re} \underline{Z}_{ac}} = \frac{63,2^2}{16} = 249,6 \text{ W}$$

oraz prąd

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{U}_{ac}}{\underline{Z}_{ac} + \underline{Z}_4} = \frac{60 + j20}{4 - j2 + 4 + j2} = \frac{60 + j20}{8} = 7,5 + j2,5 = 7,9 e^{j18^\circ} \text{ A}$$

1.25. Jaką wartość powinna mieć rezystancja R_2 , aby w obwodzie przedstawionym na rys. 1.25 prąd $\underline{I}_1$ był w fazie z napięciem zasilającym. Dane: $\underline{Z}_1 = (10 + j25) \Omega$, $\underline{Z} = (5 - j16) \Omega$.



Rys. 1.25

ROZWIĄZANIE. W celu obliczenia prądu $\underline{I}_1$ korzystamy z twierdzenia Thevenina. Impedancja widziana z zacisków $a-b$ (przy zwartym źródle zasilającym $\underline{U}$ i odłączonej impedancji $\underline{Z}_1$)

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{R_2 \underline{Z}}{R_2 + \underline{Z}}$$

Napięcie w stanie jałowym (przy odłączonej impedancji $\underline{Z}_1$)

$$\underline{U}_{ab0} = \frac{\underline{U} R_2}{\underline{Z} + R_2}$$

Zatem prąd $\underline{I}_1$ wyraża się zależnością

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{ab0}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{ab}} = \frac{\underline{U}}{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}}{R_2} + \underline{Z}_1 + \underline{Z}}$$

Aby prąd $\underline{I}_1$ był w fazie z napięciem $\underline{U}$, część urojona mianownika powinna być równa zero. Zatem

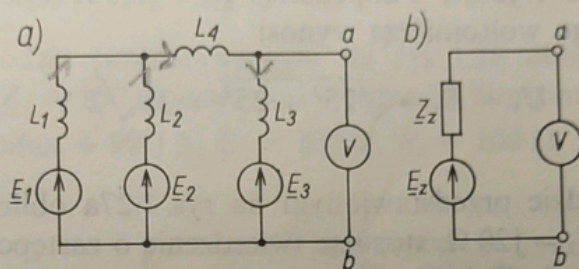
$$\operatorname{Im} \left(\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}}{R_2} \right) + \operatorname{Im} \underline{Z}_1 + \operatorname{Im} \underline{Z} = 0$$

Podstawiając dane, otrzymamy

$$\frac{-160 + 125}{R_2} + 25 - 16 = 0$$

$$\frac{-35}{R_2} = -9 \quad \text{stąd} \quad R_2 = \frac{35}{9} = 3,888 \, \Omega$$

1.26. Obliczyć napięcie na zaciskach $a-b$ w obwodzie przedstawionym na rys. 1.26. Parametry obwodu są następujące: $X_1 = X_2 = X_3 = 1 \, \Omega$, $X_4 = 0,5 \, \Omega$, $\underline{E}_1 = 100 \, \text{V}$, $\underline{E}_2 = j50 \, \text{V}$, $\underline{E}_3 = j25 \, \text{V}$.



Rys. 1.26

ROZWIĄZANIE. Napięcie zastępcze obliczamy z zależności

$$\underline{E}_{12} = \frac{\underline{Y}_1 \underline{E}_1 + \underline{Y}_2 \underline{E}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \frac{(-j1)100 + (-j1)(j50)}{-j2} = (50 + j25) \, \text{V}$$

Admitancja $\underline{Y}_{12}$ wynosi

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = -j2 \, \text{S}$$

skąd

$$\underline{Z}_{12} = \frac{1}{\underline{Y}_{12}} = j0,5 \, \Omega$$

Szeregowo z impedancją $\underline{Z}_{12}$ jest połączona impedancja $\underline{Z}_4 = jX_4 = j0,5 \, \Omega$.
Zatem

$$\underline{Z}_{124} = \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_4 = j0,5 + j0,5 = j1 \, \Omega$$

Napięcie na zaciskach $a-b$ obliczamy jako napięcie zastępcze dwóch gałęzi aktywnych, połączonych równolegle: gałęzi o napięciu $\underline{E}_{12}$ i impedancji $\underline{Z}_{124}$, oraz gałęzi o napięciu $\underline{E}_3$ i impedancji $\underline{Z}_3$. Admitancje zespolone tych gałęzi wynoszą odpowiednio

$$\underline{Y}_{124} = \frac{1}{\underline{Z}_{124}} = -j1 \, \text{S}; \quad \underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = -j1 \, \text{S}$$

Ponownie korzystamy z pierwszego wzoru i obliczamy

$$\underline{E}_z = \frac{\underline{Y}_{124} \underline{E}_{12} + \underline{Y}_3 \underline{E}_3}{\underline{Y}_{124} + \underline{Y}_3} = \frac{(-j1)(50 + j25) + (-j1)(j25)}{-j2} = (25 + j25) \text{ V}$$

Admitancję zastępczą obliczamy na podstawie wzoru

$$\underline{Y}_z = \underline{Y}_{124} + \underline{Y}_3 = -j2 \text{ S}$$

wówczas impedancja zastępcza

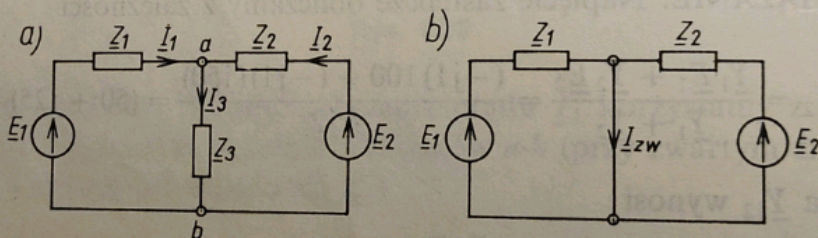
$$\underline{Z}_z = j0,5 \Omega$$

Rozpatrywany obwód można więc zastąpić dwójnikiem aktywnym o napięciu źródłowym $\underline{E}_z = (25 + j25) \text{ V}$ i impedancji $\underline{Z}_z = j0,5 \Omega$ (rys. 1.26b).

Wskazanie idealnego woltomierza wynosi

$$U_V = E_z = \sqrt{25^2 + 25^2} = 25\sqrt{2} \text{ V}$$

1.27. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.27a obliczyć prąd płynący przez impedancję $\underline{Z}_3 = j20 \Omega$, stosując twierdzenie o zastępczym źródle prądu (twierdzenie Nortona). Źródła zasilania wynoszą: $\underline{E}_1 = j200 \text{ V}$, $\underline{E}_2 = 200 \text{ V}$, a impedancje $\underline{Z}_1 = (20 + j20) \Omega$, $\underline{Z}_2 = -j40 \Omega$.



Rys. 1.27

ROZWIĄZANIE. Stosujemy twierdzenie Nortona. Obliczamy prąd zwarcia gałęzi $a-b$. Prąd ten przepływa przez gałąź $a-b$ po zwarcu zacisków $a-b$ (zgodnie z rys. 1.27b)

WIRCH.
$$\underline{I}_{zw} = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{j200}{20 + j20} + \frac{200}{-j40} = 5 + j5 + j5 = (5 + j10) \text{ A}$$

Napięcie na gałęzi $a-b$ wynosi

TW. NORTONA

$$\underline{U}_{ab} = \frac{\underline{I}_{zw}}{\underline{Y}_z + \underline{Y}_g} = \frac{5 + j10}{\frac{1}{40} - j\frac{1}{20}} = (-120 + j160) \text{ V}$$

gdzie: $\underline{Y}_z$ — admitancja zastępcza obwodu widzianego z zacisków $a-b$ przy przerwie w gałęzi $a-b$ oraz zwartych źródłach $\underline{E}_1$ i $\underline{E}_2$, wyrażona wzorem

$$\underline{Y}_z = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{20 + j20} + \frac{1}{-j40} = \frac{1}{40} - j\frac{1}{40} + j\frac{1}{40} = \frac{1}{40} \text{ S}$$

oraz $\underline{Y}_g$ — admitancja gałęzi $a-b$

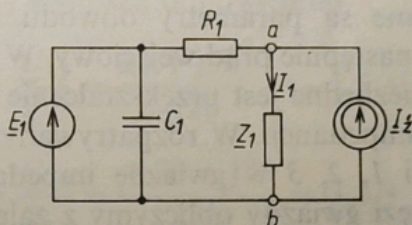
$$\underline{Y}_g = \underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{j20} = -j\frac{1}{20} \text{ S}$$

Prąd płynący przez impedancję $\underline{Z}_3$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{Y}_3 \underline{I}_{zw}}{\underline{Y}_z + \underline{Y}_3} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_3} = \frac{-120 + j160}{j20} = (8 + j6) \text{ A}$$

1.28. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.28 obliczyć prąd płynący przez impedancję $\underline{Z}_1 = 100 \Omega$ stosując twierdzenie Nortona.

Dane: $i_z = 2\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ A}$, $\underline{E}_1 = 200 \text{ V}$, $R_1 = 100 \Omega$, $X_{C1} = 100 \Omega$.



Rys. 1.28

ROZWIĄZANIE. Obliczamy prąd zwarciový w gałęzi $a-b$

$$\underline{I}_{zw} = \underline{I}_z + \frac{\underline{E}_1}{R_1} = j2 + \frac{200}{100} = (2 + j2) \text{ A}$$

Napięcie na gałęzi $a-b$

$$\underline{U}_{ab} = \frac{\underline{I}_{zw}}{\underline{Y}_z + \underline{Y}_g} = \frac{2 + j2}{\frac{1}{100} + \frac{1}{100}} = \frac{2 + j2}{\frac{2}{100}} = (100 + j100) \text{ V}$$

gdzie: $\underline{Y}_z = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{100} \text{ S}$; $\underline{Y}_g = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{100} \text{ S}$

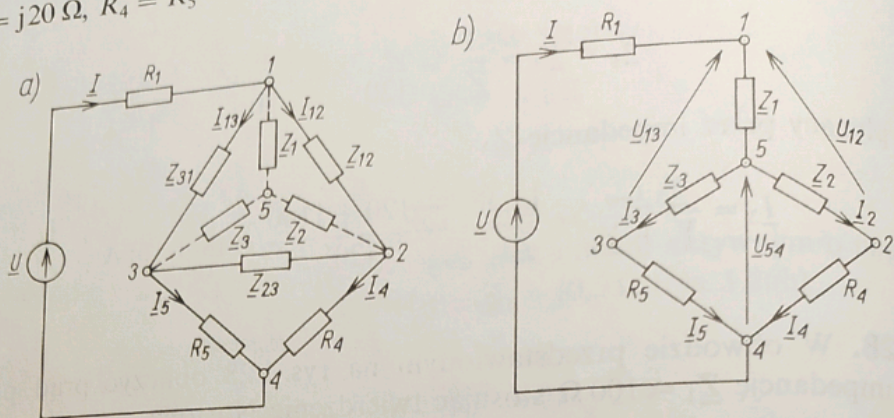
Prąd $\underline{I}_1$ w postaci zespolonej

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_1} = \frac{100 + j100}{100} = (1 + j1) \text{ A}$$

i w postaci czasowej

$$i_1(t) = 2 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ A}$$

1.29. Obliczyć rozpyły prądów w obwodzie przedstawionym na rys. 1.29a.
Dane: napięcie źródła $\underline{U} = j100 \text{ V}$, $R_1 = 15 \Omega$, $\underline{Z}_{12} = -j20 \Omega$, $\underline{Z}_{23} = 40 \Omega$,
 $\underline{Z}_{31} = j20 \Omega$, $R_4 = R_5 = 40 \Omega$.



Rys. 1.29

ROZWIĄZANIE. Dane są parametry obwodu, a więc można obliczyć impedancję zastępczą, a następnie prąd wejściowy. W celu obliczenia impedancji zastępczej obwodu, niezbędne jest przekształcenie trójkąta impedancji 1, 2, 3 lub 2, 3, 4 w gwiazdę impedancji. W rozpatrywanym przypadku przekształcono trójkąt impedancji 1, 2, 3 w gwiazdę impedancji 1, 2, 3 (rys. 1.29b). Wartości impedancji gałęzi gwiazdy obliczymy z zależności

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12} \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} = \frac{-j20 \cdot j20}{40} = 10 \Omega$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{12} \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} = \frac{-j20 \cdot 40}{40} = -j20 \Omega$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{23} \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} = \frac{40 \cdot j20}{40} = j20 \Omega$$

Impedancja zastępcza obwodu

$$\begin{aligned} \underline{Z}_z &= R_1 + \underline{Z}_1 + \frac{(\underline{Z}_3 + R_5)(\underline{Z}_2 + R_4)}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + R_4 + R_5} = \\ &= 15 + 10 + \frac{(40 + j20)(40 - j20)}{80} = 50 \Omega \end{aligned}$$

Impedancja $\underline{Z}_z$ ma tylko część rzeczywistą, zatem cały obwód ma charakter rezystancyjny.
Prąd wejściowy jest w fazie z napięciem zasilania

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_z} = \frac{j100}{50} = j2 \text{ A}$$

Napięcie $\underline{U}_{54}$ na gałęziach równoległych

$$\underline{U}_{54} = \underline{Z}_{54} \underline{I} = \underline{U} - (R_1 + \underline{Z}_1) \underline{I} = j100 - j50 = j50 \text{ V}$$

Prądy gałęziowe $\underline{I}_2$ oraz $\underline{I}_3$ obliczymy zgodnie z prawem Ohma

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_4 = \frac{\underline{U}_{54}}{\underline{Z}_2 + R_4} = \frac{j50}{40 - j20} = (-0,5 + j1) \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_5 = \frac{\underline{U}_{54}}{\underline{Z}_3 + R_5} = \frac{j50}{40 + j20} = (0,5 + j1) \text{ A}$$

Aby obliczyć prądy $\underline{I}_{12}$ i $\underline{I}_{13}$ w obwodzie z rys. 1.29a, należy obliczyć napięcia $\underline{U}_{12}$ oraz $\underline{U}_{13}$ w obwodzie z rys. 1.29b

$$\underline{U}_{12} = \underline{Z}_1 \underline{I} + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = 10 \cdot j2 + (-j20)(-0,5 + j1) = (20 + j30) \text{ V}$$

$$\underline{U}_{13} = \underline{Z}_1 \underline{I} + \underline{Z}_3 \underline{I}_3 = 10 \cdot j2 + (j20)(0,5 + j1) = (-20 + j30) \text{ V}$$

Prądy gałęziowe $\underline{I}_{12}$ i $\underline{I}_{13}$ wynoszą odpowiednio

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} = \frac{20 + j30}{-j20} = (-1,5 + j1) \text{ A}$$

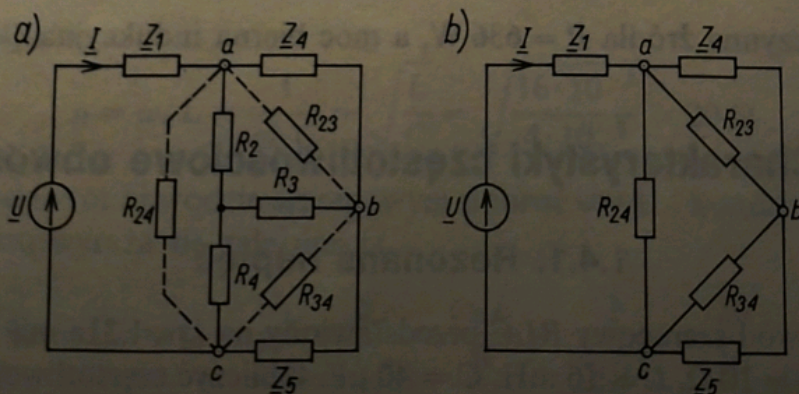
$$\underline{I}_{13} = \frac{\underline{U}_{13}}{\underline{Z}_{13}} = \frac{-20 + j30}{j20} = (1,5 + j1) \text{ A}$$

Pozostałe prądy w obwodzie z rys. 1.29a są równe

$$\underline{I}_4 = (-0,5 + j1) \text{ A}; \quad \underline{I}_5 = (0,5 + j1) \text{ A}$$

$$\underline{I}_{23} = \underline{I}_{12} - \underline{I}_4 = \underline{I}_5 - \underline{I}_{13} = 0,5 + j1 - 1,5 - j1 = -1 \text{ A}$$

1.30. Źródło napięcia $\underline{U} = j200 \text{ V}$ dołączono do obwodu (rys. 1.30a) o parametrach: $\underline{Z}_1 = (10 + j30) \Omega$, $\underline{Z}_4 = j100 \Omega$, $\underline{Z}_5 = -j100 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = R_4 = 60 \Omega$. Obliczyć moc pozorną w postaci zespolonej źródła zasilania.



Rys. 1.30

ROZWIĄZANIE. W celu obliczenia impedancji zastępczej zamieniamy gwiazdę rezystancji abc w równoważny trójkąt rezystancji abc (rys. 1.30b).
Rezystancje gałęzi trójkąta wynoszą odpowiednio

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_4} = 100 \Omega$$

$$R_{34} = R_3 + R_4 + \frac{R_3 R_4}{R_2} = 300 \Omega$$

$$R_{24} = R_2 + R_4 + \frac{R_2 R_4}{R_3} = 100 \Omega$$

Impedancja zastępcza

$$\underline{Z}_z = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_{ac}(\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc})}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{ac} + \underline{Z}_{bc}} = 10 + j30 + \frac{100(80 - j40)}{180 - j40} = (57 + j18,24) \Omega$$

przy czym

$$\underline{Z}_{ac} = R_{24} = 100 \Omega$$

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{\underline{Z}_4 R_{23}}{\underline{Z}_4 + R_{23}} = \frac{j100 \cdot 100}{100 + j100} = (50 + j50) \Omega$$

$$\underline{Z}_{bc} = \frac{\underline{Z}_5 R_{34}}{\underline{Z}_5 + R_{34}} = \frac{-j100 \cdot 300}{300 - j100} = (30 - j90) \Omega$$

Prąd wejściowy

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_z} = \frac{j200}{57 + j18,24} = \frac{j200(57 - j18,24)}{3581} = \\ &= \frac{3648 + j11400}{3581} = (1,02 + j3,18) \text{ A} \end{aligned}$$

Moc pozorna w postaci zespolonej źródła napięcia

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = j200(1,02 - j3,18) = (636 + j204) \text{ V} \cdot \text{A}$$

Zatem moc czynna źródła $P = 636 \text{ W}$, a moc bierna indukcyjna $Q = 204 \text{ var}$.

1.4. Charakterystyki częstotliwościowe obwodów

1.4.1. Rezonans napięć

1.31. Obwód szeregowy RLC przedstawiony na rys. 1.31a ma następujące parametry: $R = 10 \Omega$, $L = 16 \text{ mH}$, $C = 40 \mu\text{F}$. Obliczyć częstotliwość i pulsację rezonansową, impedancję falową, dobroć, współczynnik tłumienia, rozstrojenie