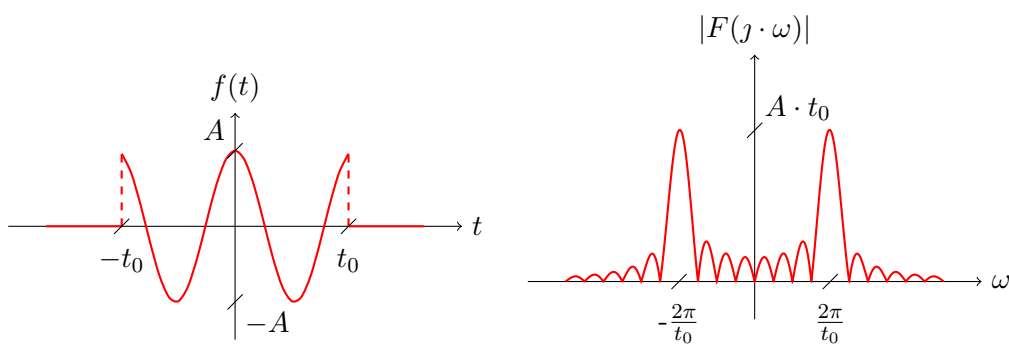


Teoria Sygnałów w zadaniach



$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right)$$

$$F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot [Sa(\omega \cdot t_0 + 2\pi) - Sa(\omega \cdot t_0 - 2\pi)]$$

Tomasz Grajek, Krzysztof Wegner

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Instytut Telekomunikacji Multimedialnej

pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

www.et.put.poznan.pl
www.multimedia.edu.pl

Copyright © Krzysztof Wegner, 2019

Wszelkie prawa zastrzeżone

ISBN 978-83-939620-1-3

Wydrukowano w Polsce

Rozdział 1

Podstawowe własności sygnałów

Zadanie 1. Przedstaw poniższe sygnały jako funkcję liniową sinusów i kosinusów wykorzystując wzory Eulera.

$$f_1(t) = \sin^5(t) - \sin^3(t)$$

$$f_2(t) = \cos^6(t) - \cos^4(t)$$

Wzory Eulera:

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2 \cdot j}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

Dwumian Newtona:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k \quad (1.1)$$

gdzie współczynniki $\binom{n}{k}$ określone są jako:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (1.2)$$

Współczynniki dwumianu Newtona $\binom{n}{k}$ są k -tym elementem w n -tym wierszu trójkąta Pascala (liczymy od 0). Każdy element trójkąta jest sumą dwóch elementów nad nim. Poniżej przedstawiono przykład dla $n = 6$:

$$\left\{ \begin{array}{l} n=0: \\ n=1: \\ n=2: \\ n=3: \\ n=4: \\ n=5: \\ n=6: \end{array} \begin{array}{cccccccc} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

$$f_1(t) = \sin^5(t) - \sin^3(t) =$$

$$= \left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2 \cdot j} \right)^5 - \left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2 \cdot j} \right)^3 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(e^{jt} - e^{-jt})^5}{(2 \cdot j)^5} - \frac{(e^{jt} - e^{-jt})^3}{(2 \cdot j)^3} = \\
&= \frac{1 \cdot (e^{jt})^5 \cdot (-e^{-jt})^0 + 5 \cdot (e^{jt})^4 \cdot (-e^{-jt})^1 + 10 \cdot (e^{jt})^3 \cdot (-e^{-jt})^2 +}{(2 \cdot j)^5} + \\
&+ \frac{10 \cdot (e^{jt})^2 \cdot (-e^{-jt})^3 + 5 \cdot (e^{jt})^1 \cdot (-e^{-jt})^4 + 1 \cdot (e^{jt})^0 \cdot (-e^{-jt})^5}{(2 \cdot j)^5} - \\
&- \left(\frac{1 \cdot (e^{jt})^3 \cdot (-e^{-jt})^0 + 3 \cdot (e^{jt})^2 \cdot (-e^{-jt})^1 + 3 \cdot (e^{jt})^1 \cdot (-e^{-jt})^2 + 1 \cdot (e^{jt})^0 \cdot (-e^{-jt})^3}{(2 \cdot j)^3} \right) = \\
&= \frac{1 \cdot e^{jt \cdot 5} \cdot 1 + 5 \cdot e^{jt \cdot 4} \cdot (-e^{-jt \cdot 1}) + 10 \cdot e^{jt \cdot 3} \cdot e^{-jt \cdot 2}}{(2 \cdot j)^5} + \\
&+ \frac{10 \cdot e^{jt \cdot 2} \cdot (-e^{-jt \cdot 3}) + 5 \cdot e^{jt \cdot 1} \cdot e^{-jt \cdot 4} + 1 \cdot 1 \cdot (-e^{-jt \cdot 5})}{(2 \cdot j)^5} - \\
&- \left(\frac{1 \cdot e^{jt \cdot 3} \cdot 1 + 3 \cdot e^{jt \cdot 2} \cdot (-e^{-jt \cdot 1}) + 3 \cdot e^{jt \cdot 1} \cdot e^{-jt \cdot 2} + 1 \cdot 1 \cdot (-e^{-jt \cdot 3})}{(2 \cdot j)^3} \right) = \\
&= \frac{e^{jt \cdot 5} - 5 \cdot e^{jt \cdot 3} + 10 \cdot e^{jt} - 10 \cdot e^{-jt} + 5 \cdot e^{-jt \cdot 3} - e^{-jt \cdot 5}}{(2 \cdot j)^5} - \\
&- \left(\frac{e^{jt \cdot 3} - 3 \cdot e^{jt} + 3 \cdot e^{-jt} - e^{-jt \cdot 3}}{(2 \cdot j)^3} \right) = \\
&= \frac{e^{jt \cdot 5} - e^{-jt \cdot 5} - 5 \cdot e^{jt \cdot 3} + 5 \cdot e^{-jt \cdot 3} + 10 \cdot e^{jt} - 10 \cdot e^{-jt}}{(2 \cdot j)^5} - \\
&- \left(\frac{e^{jt \cdot 3} - e^{-jt \cdot 3} - 3 \cdot e^{jt} + 3 \cdot e^{-jt}}{(2 \cdot j)^3} \right) = \\
&= \frac{e^{jt \cdot 5} - e^{-jt \cdot 5} - 5 \cdot (e^{jt \cdot 3} - e^{-jt \cdot 3}) + 10 \cdot (e^{jt} - e^{-jt})}{(2 \cdot j)^4 \cdot (2 \cdot j)} - \\
&- \left(\frac{e^{jt \cdot 3} - e^{-jt \cdot 3} - 3 \cdot (e^{jt} - e^{-jt})}{(2 \cdot j)^2 \cdot (2 \cdot j)} \right) = \\
&= \frac{\sin(5 \cdot t) - 5 \cdot \sin(3 \cdot t) + 10 \cdot \sin(t)}{(2 \cdot j)^4} - \\
&- \left(\frac{\sin(3 \cdot t) - 3 \cdot \sin(t)}{(2 \cdot j)^2} \right) = \\
&= \frac{\sin(5 \cdot t) - 5 \cdot \sin(3 \cdot t) + 10 \cdot \sin(t)}{16} + \left(\frac{\sin(3 \cdot t) - 3 \cdot \sin(t)}{4} \right) = \\
&= \frac{\sin(5 \cdot t) - 5 \cdot \sin(3 \cdot t) + 10 \cdot \sin(t)}{16} + \frac{4 \cdot \sin(3 \cdot t) - 12 \cdot \sin(t)}{16} = \\
&= \frac{\sin(5 \cdot t) - \sin(3 \cdot t) - 2 \cdot \sin(t)}{16}
\end{aligned}$$

Podsumowując:

$$f_1(t) = \sin^5(t) - \sin^3(t) = \frac{\sin(5 \cdot t) - \sin(3 \cdot t) - 2 \cdot \sin(t)}{16}$$

$$f_2(t) = \cos^6(t) - \cos^4(t) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} \right)^6 - \left(\frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} \right)^4 = \\
&= \frac{(e^{jt} + e^{-jt})^6}{2^6} - \frac{(e^{jt} + e^{-jt})^4}{2^4} = \\
&= \frac{1 \cdot (e^{jt})^6 \cdot (e^{-jt})^0 + 6 \cdot (e^{jt})^5 \cdot (e^{-jt})^1 + 15 \cdot (e^{jt})^4 \cdot (e^{-jt})^2 + 20 \cdot (e^{jt})^3 \cdot (e^{-jt})^3 +}{2^6} + \\
&+ \frac{15 \cdot (e^{jt})^2 \cdot (e^{-jt})^4 + 6 \cdot (e^{jt})^1 \cdot (e^{-jt})^5 + 1 \cdot (e^{jt})^0 \cdot (e^{-jt})^6}{2^6} - \\
&- \left(\frac{1 \cdot (e^{jt})^4 \cdot (e^{-jt})^0 + 4 \cdot (e^{jt})^3 \cdot (e^{-jt})^1 + 6 \cdot (e^{jt})^2 \cdot (e^{-jt})^2 + 4 \cdot (e^{jt})^1 \cdot (e^{-jt})^3 + 1 \cdot (e^{jt})^0 \cdot (e^{-jt})^4}{2^4} \right) = \\
&= \frac{1 \cdot e^{jt \cdot 6} \cdot 1 + 6 \cdot e^{jt \cdot 5} \cdot e^{-jt \cdot 1} + 15 \cdot e^{jt \cdot 4} \cdot e^{-jt \cdot 2} + 20 \cdot e^{jt \cdot 3} \cdot e^{-jt \cdot 3}}{2^6} + \\
&+ \frac{15 \cdot e^{jt \cdot 2} \cdot e^{-jt \cdot 4} + 6 \cdot e^{jt \cdot 1} \cdot e^{-jt \cdot 5} + 1 \cdot 1 \cdot e^{-jt \cdot 6}}{2^6} - \\
&- \left(\frac{1 \cdot e^{jt \cdot 4} \cdot 1 + 4 \cdot e^{jt \cdot 3} \cdot e^{-jt \cdot 1} + 6 \cdot e^{jt \cdot 2} \cdot e^{-jt \cdot 2} + 4 \cdot e^{jt \cdot 1} \cdot e^{-jt \cdot 3} + 1 \cdot 1 \cdot e^{-jt \cdot 4}}{2^4} \right) = \\
&= \frac{e^{jt \cdot 6} + 6 \cdot e^{jt \cdot 4} + 15 \cdot e^{jt \cdot 2} + 20 \cdot e^{jt \cdot 0} + 15 \cdot e^{-jt \cdot 2} + 6 \cdot e^{-jt \cdot 4} + e^{-jt \cdot 6}}{2^6} - \\
&- \left(\frac{e^{jt \cdot 4} + 4 \cdot e^{jt \cdot 2} + 6 \cdot e^{jt \cdot 0} + 4 \cdot e^{-jt \cdot 2} + e^{-jt \cdot 4}}{2^4} \right) = \\
&= \frac{e^{jt \cdot 6} + e^{-jt \cdot 6} + 6 \cdot e^{jt \cdot 4} + 6 \cdot e^{-jt \cdot 4} + 15 \cdot e^{jt \cdot 2} + 15 \cdot e^{-jt \cdot 2} + 20}{2^6} - \\
&- \left(\frac{e^{jt \cdot 4} + e^{-jt \cdot 4} + 4 \cdot e^{jt \cdot 2} + 4 \cdot e^{-jt \cdot 2} + 6}{2^4} \right) = \\
&= \frac{e^{jt \cdot 6} + e^{-jt \cdot 6} + 6 \cdot (e^{jt \cdot 4} + e^{-jt \cdot 4}) + 15 \cdot (e^{jt \cdot 2} + e^{-jt \cdot 2}) + 20}{2^5 \cdot 2} - \\
&- \left(\frac{e^{jt \cdot 4} + e^{-jt \cdot 4} + 4 \cdot (e^{jt \cdot 2} + e^{-jt \cdot 2}) + 6}{2^3 \cdot 2} \right) = \\
&= \frac{\cos(6 \cdot t) + 6 \cdot \cos(4 \cdot t) + 15 \cdot \cos(2 \cdot t) + 10}{2^5} - \\
&- \left(\frac{\cos(4 \cdot t) + 4 \cdot \cos(2 \cdot t) + 3}{2^3} \right) = \\
&= \frac{\cos(6 \cdot t) + 6 \cdot \cos(4 \cdot t) + 15 \cdot \cos(2 \cdot t) + 10 - 4 \cdot \cos(4 \cdot t) - 16 \cdot \cos(2 \cdot t) - 12}{2^5} = \\
&= \frac{\cos(6 \cdot t) + 2 \cdot \cos(4 \cdot t) - \cos(2 \cdot t) - 2}{2^5} = \\
&= \frac{\cos(6 \cdot t) + 2 \cdot \cos(4 \cdot t) - \cos(2 \cdot t) - 2}{32}
\end{aligned}$$

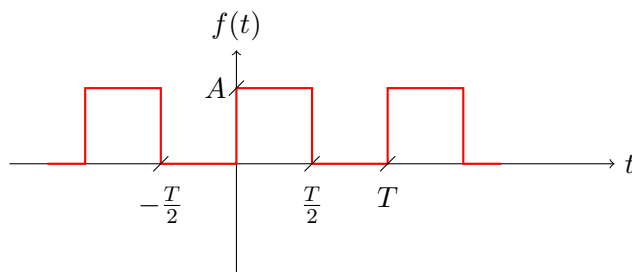
Podsumowując:

$$f_2(t) = \cos^6(t) - \cos^4(t) = \frac{\cos(6 \cdot t) + 2 \cdot \cos(4 \cdot t) - \cos(2 \cdot t) - 2}{32}$$

1.1 Podstawowe parametry i miary sygnałów ciągłych

1.1.1 Wartość średnia

Zadanie 1. Oblicz wartość średnią okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku:



Zaczynamy od zapisania wzoru funkcji przedstawionej na rysunku:

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (1.4)$$

Wartość średnią sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru:

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (1.5)$$

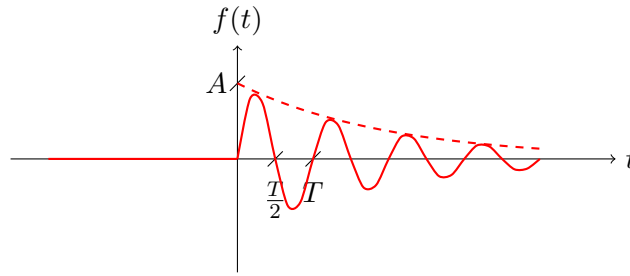
Podstawiamy do wzoru na wartość średnią wzór naszej funkcji dla pierwszego okresu $k = 0$:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Średnia wartość sygnału wynosi $\frac{A}{2}$.

Zadanie 2.

Oblicz wartość średnią sygnału $f(t) = \mathbf{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ przedstawionego na rysunku :



Wartość średnią sygnału wyznaczamy ze wzoru:

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \cdot dt \quad (1.7)$$

Podstawiamy do wzoru na wartość średnią wzór naszej funkcji:

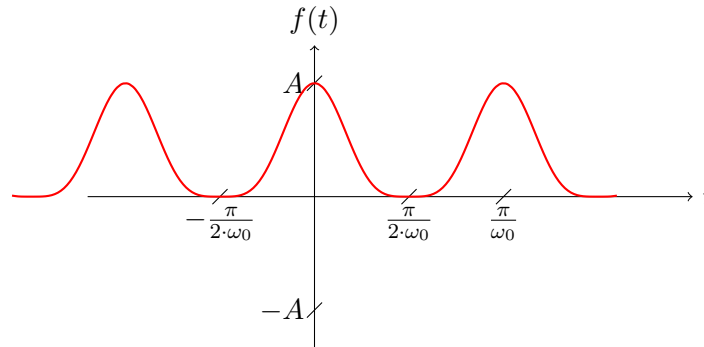
$$\begin{aligned} \bar{f} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) \cdot dt = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \mathbf{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 0 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} 1 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 0 \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(0 + \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad dv = e^{-a \cdot t} \cdot dt \\ du = \frac{2\pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \quad v = -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \end{array} \right\} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right) \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} - \int_0^{\frac{\tau}{2}} -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot 0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad dv = e^{-a \cdot t} \cdot dt \\ du = -\frac{2\pi}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \quad v = -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \end{array} \right\} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot 0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right) \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} - \int_0^{\frac{\tau}{2}} -\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a} \cdot 1 \cdot 0 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot 0} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) \right) = \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + 0 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a} \cdot 1 \cdot 1 \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) \right) = \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{aligned} &-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \\ &-\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} + \\ &+ \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt = \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \end{aligned} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{aligned} &-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} = \\ &= \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \end{aligned} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{aligned} &-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \right) \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \end{aligned} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{aligned} &\frac{-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi}}{\left(1 - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \right)} = \\ &= \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \end{aligned} \right\} = \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left(\frac{-\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot e^{-a \cdot \frac{\tau}{2}} \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T}{2\pi}}{\left(1 - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \right)} \right) = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Średnia wartość sygnału wynosi 0.

Zadanie 3.

Oblicz wartość średnią okresowego sygnału $f(t) = A \cdot \cos^4(\omega_0 \cdot t)$ przedstawionego na rysunku:



Wartość średnią sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru:

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (1.8)$$

Pierwszym krokiem jest ustalenie okresu funkcji. W naszym przypadku: $T = \frac{\pi}{\omega_0}$.

Podstawiamy do wzoru na wartość średnią wzór naszej funkcji dla zakresu $t \in \left(-\frac{\pi}{2\omega_0}; \frac{\pi}{2\omega_0}\right)$:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{\frac{\pi}{\omega_0}} \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} A \cdot \cos^4(\omega_0 \cdot t) \cdot dt = \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} A \cdot \cos^4(\omega_0 \cdot t) \cdot dt = \\ &= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} = \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} A \cdot \left(\frac{e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} \right)^4 \cdot dt = \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\left(\frac{e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} \right)^2 \right)^2 \cdot dt = \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\frac{(e^{j \cdot \omega_0 \cdot t})^2 + 2 \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} + (e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t})^2}{2^2} \right)^2 \cdot dt = \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\frac{e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t - j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t}}{4} \right)^2 \cdot dt = \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\frac{e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 \cdot e^0 + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t}}{4} \right)^2 \cdot dt = \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\frac{e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t}}{4} \right)^2 \cdot dt = \\ &= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \left(\frac{e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2}{4} \right)^2 \cdot dt = \end{aligned}$$

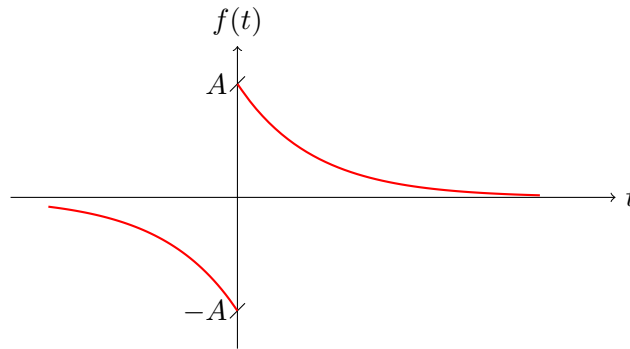
$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} \frac{(e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t})^2 + 2 \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t}) \cdot 2 + 2^2}{4^2} \cdot dt = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} \frac{(e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t})^2 + 2 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + (e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t})^2 + 2 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot 2 + 2 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot 2 + 4}{16} \cdot dt = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} \frac{e^{j \cdot 2 \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t - j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4}{16} \cdot dt = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} \frac{e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 \cdot e^0 + e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4}{16} \cdot dt = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot A \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} \frac{e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 + e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4}{16} \cdot dt = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} (e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 4 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} + 6) \cdot dt = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} 4 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt + \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} 4 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} 6 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{llll} z_1 = j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t & z_2 = -j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t & z_3 = j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t & z_4 = -j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t \\ dz_1 = j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_2 = -j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_3 = j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_4 = -j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot dt \\ dt = \frac{dz_1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} & dt = \frac{dz_2}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} & dt = \frac{dz_3}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} & dt = \frac{dz_4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} e^{z_1} \cdot \frac{dz_1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} + \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} e^{z_2} \cdot \frac{dz_2}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} + \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} 4 \cdot e^{z_3} \cdot \frac{dz_3}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} 4 \cdot e^{z_4} \cdot \frac{dz_4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} + \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} 6 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} e^{z_2} \cdot dz_2 + \frac{4}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} e^{z_3} \cdot dz_3 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} e^{z_4} \cdot dz_4 + 6 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} dt \right) = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot e^{z_1} \Big|_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} + \frac{1}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot e^{z_2} \Big|_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} + \frac{4}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot e^{z_3} \Big|_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot e^{z_4} \Big|_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} + 6 \cdot t \Big|_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} \right) = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} \Big|_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} + \frac{1}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot t} \Big|_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} + \frac{4}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \Big|_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t} \Big|_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} + 6 \cdot t \Big|_{-\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}^{\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} \right) = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (e^{j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} - e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}) + \frac{1}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (e^{-j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} - e^{+j \cdot 4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} - e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}) + \frac{4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (e^{-j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}} - e^{j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0}}) + \right. \\
&\quad \left. + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} + \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} \right) \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (e^{j \cdot 2 \cdot \pi} - e^{-j \cdot 2 \cdot \pi}) + \frac{1}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (e^{-j \cdot 2 \cdot \pi} - e^{j \cdot 2 \cdot \pi}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (e^{j \cdot \pi} - e^{-j \cdot \pi}) + \frac{4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (e^{-j \cdot \pi} - e^{j \cdot \pi}) + 6 \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \omega_0} \right) \right) = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (1 - 1) + \frac{1}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (1 - 1) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (-1 - (-1)) + \frac{4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (-1 - (-1)) + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right) = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{1}{-j \cdot 4 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{4}{j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (0) + \frac{4}{-j \cdot 2 \cdot \omega_0} \cdot (0) + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right) = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot \left(0 + 0 + 0 + 0 + 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) \right) = \\
&= \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{A}{16} \cdot 6 \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \right) = \\
&= \frac{A}{16} \cdot 6 = \\
&= \frac{A}{8} \cdot 3 = \\
&= \frac{3}{8} \cdot A
\end{aligned}$$

Średnia wartość sygnału wynosi $\frac{3}{8} \cdot A$.

1.1.2 Energia sygnału

Zadanie 4. Oblicz energię sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku:



$$f(t) = \begin{cases} -A \cdot e^{a \cdot t} & \text{dla } t \in (-\infty; 0) \\ A \cdot e^{-a \cdot t} & \text{dla } t \in (0; \infty) \end{cases} \quad (1.9)$$

Energię sygnału nieokresowego wyznaczamy ze wzoru:

$$E = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 \cdot dt \quad (1.10)$$

Podstawiamy do wzoru na energię wzór naszej funkcji

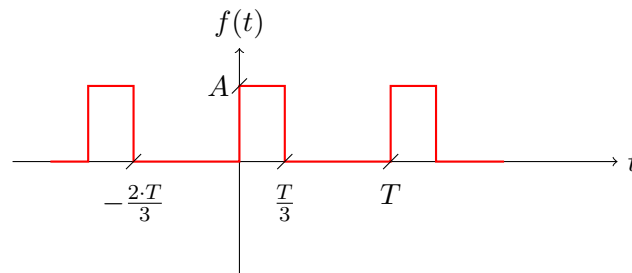
$$\begin{aligned} E &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} |f(t)|^2 \cdot dt = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 |-A \cdot e^{a \cdot t}|^2 \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} |A \cdot e^{-a \cdot t}|^2 \cdot dt \right) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 (-A \cdot e^{a \cdot t})^2 \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} (A \cdot e^{-a \cdot t})^2 \cdot dt \right) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 (-A)^2 \cdot (e^{a \cdot t})^2 \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} (A)^2 \cdot (e^{-a \cdot t})^2 \cdot dt \right) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 A^2 \cdot e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} A^2 \cdot e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(A^2 \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^0 e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + A^2 \cdot \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} A^2 \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 e^{2 \cdot a \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt \right) = \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} z = 2 \cdot a \cdot t & w = -2 \cdot a \cdot t \\ dz = 2 \cdot a \cdot dt & dw = -2 \cdot a \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{2 \cdot a} & dt = \frac{dw}{-2 \cdot a} \end{array} \right\} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} A^2 \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 e^z \cdot \frac{dz}{2 \cdot a} + \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^w \cdot \frac{dw}{-2 \cdot a} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 e^z \cdot dz - \int_0^{\frac{\tau}{2}} e^w \cdot dw \right) = \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(e^z \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^0 - e^w \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} \right) = \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(e^{2 \cdot a \cdot t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^0 - e^{-2 \cdot a \cdot dt} \Big|_0^{\frac{\tau}{2}} \right) = \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(\left(e^{2 \cdot a \cdot 0} - e^{-2 \cdot a \cdot \frac{\tau}{2}} \right) - \left(e^{-2 \cdot a \cdot \frac{\tau}{2}} - e^{-2 \cdot a \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot \left(\left(e^0 - e^{-a \cdot \tau} \right) - \left(e^{-a \cdot \tau} - e^0 \right) \right) = \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot (1 - e^{-a \cdot \tau} - e^{-a \cdot \tau} + 1) = \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot (2 - 2 \cdot e^{-a \cdot \tau}) = \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot a} \cdot 2 \cdot (1 - e^{-a \cdot \tau}) = \\
&= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A^2}{a} \cdot (1 - e^{-a \cdot \tau}) = \\
&= \frac{A^2}{a}
\end{aligned}$$

Energia sygnału wynosi $\frac{A^2}{a}$.

1.1.3 Moc i wartość skuteczna sygnału

Zadanie 5. Oblicz moc okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku:



Zaczynamy od zapisania wzoru funkcji przedstawionej na rysunku:

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{3} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{3} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (1.11)$$

Moc sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (1.12)$$

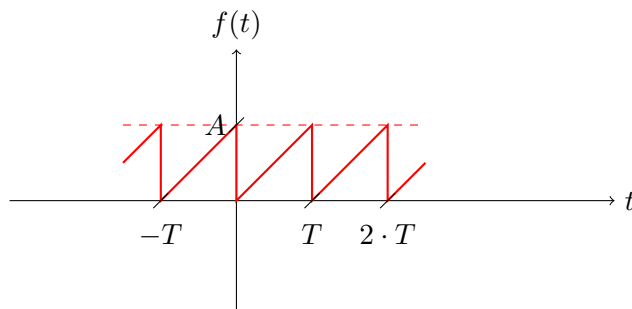
Podstawiamy do wzoru na moc wzór naszej funkcji dla pierwszego okresu $k = 0$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{3}} |A|^2 \cdot dt + \int_{\frac{T}{3}}^T |0|^2 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{3}} A^2 \cdot dt + \int_{\frac{T}{3}}^T 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^{\frac{T}{3}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{3}} = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \left(\frac{T}{3} - 0 \right) = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \frac{T}{3} = \\ &= \frac{A^2}{3} \end{aligned}$$

Moc sygnału wynosi $\frac{A^2}{3}$.

Zadanie 6.

Oblicz moc sygnału okresowego $f(t)$ przedstawionego na rysunku:



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \quad (1.13)$$

W pierwszym okresie, wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A) . Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i znaleźć nieznane parametry a i b :

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszym okresie można opisać wzorem:

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej, całą funkcję można wyrazić następującym wzorem:

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in \mathbb{Z}$$

Moc sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru:

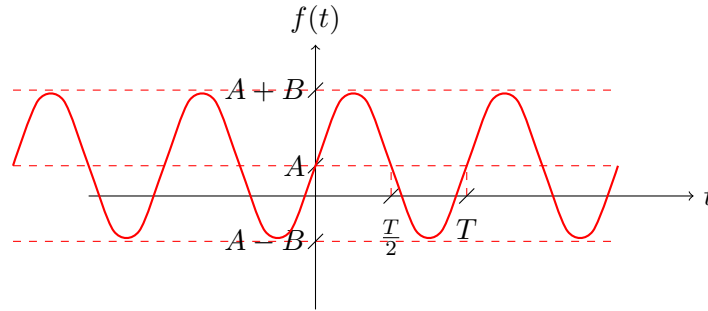
$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (1.14)$$

Podstawiamy do wzoru na moc wzór naszej funkcji:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left| \frac{A}{T} \cdot t \right|^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(\frac{A}{T} \cdot t \right)^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{A^2}{T^2} \cdot t^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \frac{A^2}{T^2} \cdot \int_0^T t^2 \cdot dt = \\ &= \frac{A^2}{T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \Big|_0^T \right) = \\ &= \frac{A^2}{T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) = \\ &= \frac{A^2}{T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - 0 \right) = \\ &= \frac{A^2}{T^3} \cdot \frac{1}{3} \cdot T^3 = \\ &= \frac{A^2}{3} \end{aligned}$$

Moc sygnału równa się $\frac{A^2}{3}$.

Zadanie 7. Oblicz moc sygnału okresowego $f(t) = A + B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ przedstawionego na rysunku:



Moc sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (1.15)$$

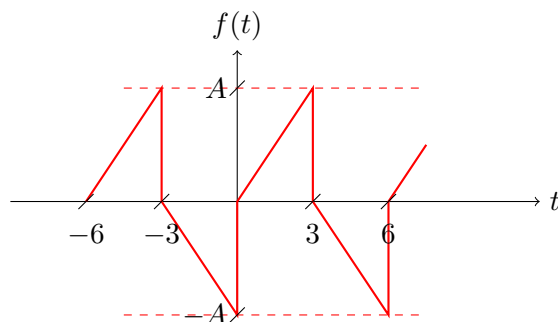
Podstawiamy do wzoru na moc wzór naszej funkcji :

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left| A + B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right|^2 \cdot dt = \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(A + B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right)^2 \cdot dt = \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(A^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + B^2 \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right) \cdot dt = \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^T A^2 \cdot dt + \int_0^T 2 \cdot A \cdot B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_0^T B^2 \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
 &= \frac{A^2}{T} \cdot \int_0^T dt + \frac{2 \cdot A \cdot B}{T} \cdot \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{B^2}{T} \cdot \int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
 &= \left\{ z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \quad dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \quad dt = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{2\pi} \cdot dz \right\} = \\
 &= \frac{A^2}{T} \cdot t \Big|_0^T + \frac{2 \cdot A \cdot B}{T} \cdot \int_0^T \sin(z) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot dz + \frac{B^2}{T} \cdot \int_0^T \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right) \cdot dt = \\
 &= \frac{A^2}{T} \cdot (T - 0) + \frac{2 \cdot A \cdot B}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \int_0^T \sin(z) \cdot dz + \frac{B^2}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^T \left(1 - \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right) \cdot dt = \\
 &= \frac{A^2}{T} \cdot T + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot \left(-\cos(z) \Big|_0^T \right) + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^T 1 \cdot dt - \int_0^T \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
 &= \left\{ w = 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \quad dw = 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \quad dt = \frac{dw}{\frac{4\pi}{T}} = \frac{T}{4\pi} \cdot dw \right\} = \\
 &= A^2 + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot \left(-\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^T \right) + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(t \Big|_0^T - \int_0^T \cos(w) \cdot \frac{T}{4\pi} \cdot dw \right) = \\
 &= A^2 + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot \left(-\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left((T - 0) - \frac{T}{4\pi} \cdot \int_0^T \cos(w) \cdot dw \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A^2 + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot (-\cos(2\pi) + \cos(0)) + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(T - \frac{T}{4\pi} \cdot -\sin(w) \Big|_0^T \right) = \\
&= A^2 + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot (-1 + 1) + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^T \right) = \\
&= A^2 + \frac{A \cdot B}{\pi} \cdot 0 + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot \left(\sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - \sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \right) = \\
&= A^2 + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot (\sin(4\pi) - \sin(0)) \right) = \\
&= A^2 + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot \left(T + \frac{T}{4\pi} \cdot (0 - 0) \right) = \\
&= A^2 + \frac{B^2}{2 \cdot T} \cdot (T) = \\
&= A^2 + \frac{B^2}{2}
\end{aligned}$$

Moc sygnału wynosi $A^2 + \frac{B^2}{2}$.

Zadanie 8. Oblicz moc i wartość skuteczną sygnału okresowego $f(t)$ przedstawionego na rysunku:



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać za pomocą dwóch prostych. Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = a \cdot t + b \quad (1.16)$$

W pierwszym okresie, w pierwszej części, wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0,0)$ oraz $(3,A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i znaleźć nieznanne parametry a i b .

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot 3 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot 3 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot 3 + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{3} = a \end{cases}$$

Podsumowując, pierwszy odcinek funkcji przedstawionej na rysunku, w pierwszym okresie można opisać wzorem:

$$f(t) = \frac{A}{3} \cdot t$$

Drugi odcinek funkcji jest prostą przechodzącą przez następujące dwa punkty: $(3,0)$ oraz $(6,-A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i znaleźć nieznanne parametry a i b .

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 3 + b \\ -A = a \cdot 6 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \cdot a = b \\ -A = 6 \cdot a - 3 \cdot a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \cdot a = b \\ -A = 3 \cdot a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \cdot a = b \\ -\frac{A}{3} = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \cdot \left(-\frac{A}{3}\right) = b \\ -\frac{A}{3} = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = b \\ -\frac{A}{3} = a \end{cases}$$

A więc drugi odcinek funkcji przedstawionej na rysunku w pierwszym okresie, można opisać wzorem:

$$f(t) = -\frac{A}{3} \cdot t + A$$

W związku z tym, całą funkcję w pierwszym okresie można zapisać jako funkcję przedziałową:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{3} \cdot t & \text{for } t \in (0; 3) \\ -\frac{A}{3} \cdot t + A & \text{for } t \in (3; 6) \end{cases}$$

I ogólniej, całą funkcję można wyrazić następującym wzorem:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{3} \cdot (t - k \cdot 6) & \text{for } t \in (0 + k \cdot 6; 3 + k \cdot 6) \\ -\frac{A}{3} \cdot (t - k \cdot 6) + A & \text{for } t \in (3 + k \cdot 6; 6 + k \cdot 6) \end{cases} \wedge k \in I$$

Moc sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (1.17)$$

Podstawiamy do wzoru na moc wzór naszej funkcji:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\int_0^3 \left| \frac{A}{3} \cdot t \right|^2 \cdot dt + \int_3^6 \left| -\frac{A}{3} \cdot t + A \right|^2 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \int_0^3 \left(\frac{A}{3} \cdot t \right)^2 \cdot dt + \frac{1}{6} \cdot \int_3^6 \left(-\frac{A}{3} \cdot t + A \right)^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \int_0^3 \frac{A^2}{9} \cdot t^2 \cdot dt + \frac{1}{6} \cdot \int_3^6 \left(\left(-\frac{A}{3} \cdot t \right)^2 - 2 \cdot \frac{A}{3} \cdot t \cdot A + A^2 \right) \cdot dt = \\ &= \frac{A^2}{54} \cdot \int_0^3 t^2 \cdot dt + \frac{1}{6} \cdot \int_3^6 \frac{A^2}{9} \cdot t^2 \cdot dt - \frac{1}{6} \cdot \int_3^6 \frac{2 \cdot A^2}{3} \cdot t \cdot dt + \frac{1}{6} \cdot \int_3^6 A^2 \cdot dt = \\ &= \frac{A^2}{54} \cdot \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^3 + \frac{A^2}{54} \cdot \int_3^6 t^2 \cdot dt - \frac{2 \cdot A^2}{18} \cdot \int_3^6 t^2 \cdot dt + \frac{A^2}{6} \cdot \int_3^6 dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A^2}{162} \cdot (3^3 - 0^3) + \frac{A^2}{54} \cdot \left. \frac{t^3}{3} \right|_3^6 - \frac{2 \cdot A^2}{18} \cdot \left. \frac{t^2}{2} \right|_3^6 + \frac{A^2}{6} \cdot t|_3^6 = \\
&= \frac{A^2}{162} \cdot 27 + \frac{A^2}{162} \cdot (6^3 - 3^3) - \frac{2 \cdot A^2}{36} \cdot (6^2 - 3^2) + \frac{A^2}{6} \cdot (6 - 3) = \\
&= \frac{A^2}{6} + \frac{A^2}{162} \cdot 189 - \frac{2 \cdot A^2}{36} \cdot 27 + \frac{A^2}{6} \cdot 3 = \\
&= \frac{A^2}{6} + \frac{7 \cdot A^2}{6} - \frac{9 \cdot A^2}{6} + \frac{3 \cdot A^2}{6} = \\
&= \frac{2 \cdot A^2}{6} = \\
&= \frac{A^2}{3}
\end{aligned}$$

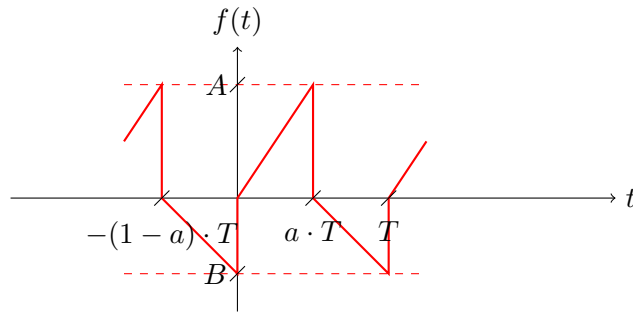
Moc sygnału równa się $\frac{A^2}{3}$.

Wzór na obliczenie wartości skutecznej to:

$$RMS = \sqrt{P} \quad (1.18)$$

Wartość skuteczna sygnału to $\frac{A}{\sqrt{3}}$.

Zadanie 9. Oblicz moc sygnału okresowego $f(t)$ przedstawionego na rysunku:



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać za pomocą dwóch prostych. Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \quad (1.19)$$

W pierwszym okresie, w pierwszej części, wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz $(a \cdot T, A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i znaleźć nieznane parametry m i b :

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 0 + b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{a \cdot T} = m \end{cases}$$

Podsumowując, pierwszy odcinek funkcji przedstawionej na rysunku, w pierwszym okresie można opisać wzorem:

$$f(t) = \frac{A}{a \cdot T} \cdot t$$

Drugi odcinek funkcji jest prostą przechodzącą przez następujące dwa punkty: $(a \cdot T, 0)$ oraz $(T, -B)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i znaleźć nieznane parametry m i b :

$$\begin{cases} 0 = m \cdot a \cdot T + b \\ -B = m \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -B = m \cdot T - m \cdot a \cdot T \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -B = m \cdot (T - a \cdot T) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{T-a \cdot T} \cdot a \cdot T = b \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{1-a} \cdot a = b \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} = m \end{cases}$$

A więc drugi odcinek funkcji przedstawionej na rysunku w pierwszym okresie, można opisać wzorem:

$$f(t) = -\frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a$$

W związku z tym, całą funkcję w pierwszym okresie można zapisać jako funkcję przedziałową:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a \cdot T} \cdot t & \text{dla } t \in (0; a \cdot T) \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a & \text{dla } t \in (a \cdot T; T) \end{cases}$$

I ogólniej, całą funkcję można wyrazić następującym wzorem:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a \cdot T} \cdot (t - k \cdot T) & \text{dla } t \in (0 + k \cdot T; a \cdot T + k \cdot T) \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} \cdot (t - k \cdot T) + \frac{B}{1-a} \cdot a & \text{dla } t \in (a \cdot T + k \cdot T; T + k \cdot T) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{C}$$

Moc sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (1.20)$$

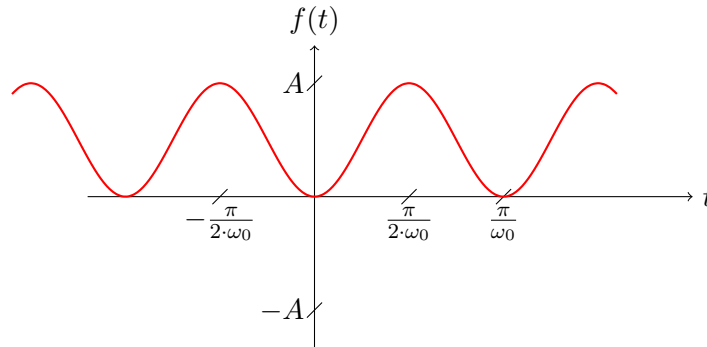
Podstawiamy do wzoru na moc wzór naszej funkcji:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{a \cdot T} \left| \frac{A}{a \cdot T} \cdot t \right|^2 \cdot dt + \int_{a \cdot T}^T \left| \frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t - \frac{B}{1-a} \cdot a \right|^2 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^{a \cdot T} \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot t \right)^2 \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_{a \cdot T}^T \left(\frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t - \frac{B}{1-a} \cdot a \right)^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^{a \cdot T} \frac{A^2}{a^2 \cdot T^2} \cdot t^2 \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_{a \cdot T}^T \left(\left(\frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t \right)^2 - 2 \cdot \frac{B}{T-a \cdot T} \cdot t \cdot \frac{B}{1-a} \cdot a + \left(\frac{B}{1-a} \cdot a \right)^2 \right) \cdot dt = \\ &= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^3} \cdot \int_0^{a \cdot T} t^2 \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_{a \cdot T}^T \left(\frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot t^2 - 2 \cdot \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot t \cdot a + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \right) \cdot dt = \\ &= \frac{A^2}{a^2 \cdot T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \Big|_0^{a \cdot T} \right) + \frac{1}{T} \cdot \int_{a \cdot T}^T \frac{B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot t^2 \cdot dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{T} \cdot \int_{a \cdot T}^T 2 \cdot \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot t \cdot a \cdot dt + \frac{1}{T} \cdot \int_{a \cdot T}^T \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot a^2 \cdot dt = \\
& = \frac{A^2}{a^2 \cdot T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \Big|_0^{a \cdot T} \right) + \frac{B^2}{T^3 \cdot (1-a)^2} \cdot \int_{a \cdot T}^T t^2 \cdot dt + \\
& - \frac{2 \cdot B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \int_{a \cdot T}^T t \cdot dt + \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a^2 \cdot \int_{a \cdot T}^T dt = \\
& = \frac{A^2}{a^2 \cdot T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (a \cdot T)^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) + \frac{B^2}{T^3 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot t^3 \Big|_{a \cdot T}^T \right) + \\
& - \frac{2 \cdot B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot t^2 \Big|_{a \cdot T}^T \right) + \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a^2 \cdot \left(t \Big|_{a \cdot T}^T \right) = \\
& = \frac{A^2}{a^2 \cdot T^3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot T^3 - 0 \right) + \frac{B^2}{T^3 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - \frac{1}{3} \cdot (a \cdot T)^3 \right) + \\
& - \frac{2 \cdot B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot T^2 - \frac{1}{2} \cdot (a \cdot T)^2 \right) + \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a^2 \cdot (T - a \cdot T) = \\
& = \frac{A^2}{a^2 \cdot T^3} \cdot \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot T^3 + \frac{B^2}{T^3 \cdot (1-a)^2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot T^3 - \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot T^3 \right) + \\
& - \frac{2 \cdot B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot T^2 - \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot T^2 \right) + \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a^2 \cdot (1-a) \cdot T = \\
& = \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{T^3 \cdot (1-a)^2} \cdot (1-a^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot T^3 + \\
& - \frac{2 \cdot B^2}{T^2 \cdot (1-a)^2} \cdot a \cdot (1-a^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot T^2 + \frac{B^2}{T \cdot (1-a)^2} \cdot a^2 \cdot (1-a) \cdot T = \\
& = \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{(1-a)^2} \cdot (1-a) \cdot (1+a+a^2) \cdot \frac{1}{3} + \\
& - \frac{2 \cdot B^2}{(1-a)^2} \cdot a \cdot (1-a) \cdot (1+a) \cdot \frac{1}{2} + \frac{B^2}{1-a} \cdot a^2 = \\
& = \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot (1+a+a^2) \cdot \frac{1}{3} - \frac{2 \cdot B^2}{1-a} \cdot a \cdot (1+a) \cdot \frac{1}{2} + \frac{B^2}{1-a} \cdot a^2 = \\
& = \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot \left((1+a+a^2) \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot a \cdot (1+a) \cdot \frac{1}{2} + a^2 \right) = \\
& = \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot \left((1+a+a^2) \cdot \frac{2}{6} - 2 \cdot a \cdot (1+a) \cdot \frac{3}{6} + a^2 \cdot \frac{6}{6} \right) = \\
& = \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left((1+a+a^2) \cdot 2 - 2 \cdot a \cdot (1+a) \cdot 3 + a^2 \cdot 6 \right) = \\
& = \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot \frac{1}{6} \cdot (2 + 2 \cdot a + 2 \cdot a^2 - 6 \cdot a - 6 \cdot a^2 + 6 \cdot a^2) = \\
& = \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot \frac{1}{6} \cdot (2 - 4 \cdot a + 2 \cdot a^2) = \\
& = \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot \frac{1}{3} \cdot (1 - 2 \cdot a + a^2) = \\
& = \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{1-a} \cdot \frac{1}{3} \cdot (1-a)^2 = \\
& = \frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{3} \cdot (1-a)
\end{aligned}$$

Moc sygnału równa się $\frac{A^2}{3} \cdot a + \frac{B^2}{3} \cdot (1-a)$.

Zadanie 10. Oblicz moc sygnału okresowego $f(t) = A \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t)$ przedstawionego na rysunku.



Moc sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (1.21)$$

Podstawiamy do wzoru na moc wzór naszej funkcji :

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T |A \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot t)|^2 \cdot dt = \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \sin^4(\omega_0 \cdot t) \cdot dt = \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \left\{ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2 \cdot j} \right\} = \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \left(\frac{e^{j\omega_0 \cdot t} - e^{-j\omega_0 \cdot t}}{2 \cdot j} \right)^4 \cdot dt = \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \frac{(e^{j\omega_0 \cdot t} - e^{-j\omega_0 \cdot t})^4}{(2 \cdot j)^4} \cdot dt = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} n=0: \quad \quad \quad 1 \\ n=1: \quad \quad \quad 1 \quad 1 \\ n=2: \quad \quad \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ n=3: \quad \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ n=4: \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array} \right\} = \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \left(\frac{1 \cdot (e^{j\omega_0 \cdot t})^4 \cdot (-e^{-j\omega_0 \cdot t})^0 + 4 \cdot (e^{j\omega_0 \cdot t})^3 \cdot (-e^{-j\omega_0 \cdot t})^1 + 6 \cdot (e^{j\omega_0 \cdot t})^2 \cdot (-e^{-j\omega_0 \cdot t})^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4 \cdot (e^{j\omega_0 \cdot t})^1 \cdot (-e^{-j\omega_0 \cdot t})^3 + 1 \cdot (e^{j\omega_0 \cdot t})^0 \cdot (-e^{-j\omega_0 \cdot t})^4}{(2 \cdot j)^4} \right) \cdot dt = \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \left(\frac{e^{4 \cdot j\omega_0 \cdot t} \cdot e^{-0 \cdot j\omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{3 \cdot j\omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j\omega_0 \cdot t} + 6 \cdot e^{2 \cdot j\omega_0 \cdot t} \cdot e^{-2 \cdot j\omega_0 \cdot t} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{-4 \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} \cdot e^{-3 \cdot j\omega_0 \cdot t} + e^{0 \cdot j\omega_0 \cdot t} \cdot e^{-4 \cdot j\omega_0 \cdot t}}{2^4 \cdot j^4} \right) \cdot dt = \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4 \cdot j\omega_0 \cdot t - 0 \cdot j\omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{3 \cdot j\omega_0 \cdot t - j\omega_0 \cdot t} + 6 \cdot e^{2 \cdot j\omega_0 \cdot t - 2 \cdot j\omega_0 \cdot t} - 4 \cdot e^{j\omega_0 \cdot t - 3 \cdot j\omega_0 \cdot t} + e^{0 \cdot j\omega_0 \cdot t - 4 \cdot j\omega_0 \cdot t}}{16 \cdot 1} \cdot dt =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4j\omega_0 t} - 4 \cdot e^{2j\omega_0 t} + 6 \cdot e^{0j\omega_0 t} - 4 \cdot e^{-2j\omega_0 t} + e^{-4j\omega_0 t}}{16} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4j\omega_0 t} + e^{-4j\omega_0 t} - 4 \cdot e^{2j\omega_0 t} - 4 \cdot e^{-2j\omega_0 t} + 6 \cdot e^0}{16} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T A^2 \cdot \frac{e^{4j\omega_0 t} + e^{-4j\omega_0 t} - 4 \cdot e^{2j\omega_0 t} - 4 \cdot e^{-2j\omega_0 t} + 6}{16} \cdot dt = \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \int_0^T \left(e^{4j\omega_0 t} + e^{-4j\omega_0 t} - 4 \cdot e^{2j\omega_0 t} - 4 \cdot e^{-2j\omega_0 t} + 6 \right) dt = \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\int_0^T e^{4j\omega_0 t} \cdot dt + \int_0^T e^{-4j\omega_0 t} \cdot dt - 4 \cdot \int_0^T e^{2j\omega_0 t} \cdot dt - 4 \cdot \int_0^T e^{-2j\omega_0 t} \cdot dt + 6 \cdot \int_0^T dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{cccc} z_1 = 4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t & z_2 = -4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t & z_3 = 2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t & z_4 = -2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t \\ dz_1 = 4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_2 = -4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_3 = 2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot dt & dz_4 = -2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot dt \\ dt = \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_1 & dt = \frac{1}{-4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_2 & dt = \frac{1}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_3 & dt = \frac{1}{-2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_4 \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\int_0^T e^{z_1} \cdot \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_1 + \int_0^T e^{z_2} \cdot \frac{1}{-4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_2 + \right. \\
&\quad \left. - 4 \cdot \int_0^T e^{z_3} \cdot \frac{1}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_3 - 4 \cdot \int_0^T e^{z_4} \cdot \frac{1}{-2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot dz_4 + 6 \cdot \int_0^T dt \right) = \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \int_0^T e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \int_0^T e^{z_2} \cdot dz_2 + \right. \\
&\quad \left. - 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \int_0^T e^{z_3} \cdot dz_3 - 4 \cdot \frac{1}{-2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \int_0^T e^{z_4} \cdot dz_4 + 6 \cdot \int_0^T dt \right) = \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{z_1} \Big|_0^T - \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{z_2} \Big|_0^T - \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{z_3} \Big|_0^T + \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{z_4} \Big|_0^T + \right. \\
&\quad \left. + 6 \cdot t \Big|_0^T \right) = \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{4j\omega_0 T} \Big|_0^T - \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{-4j\omega_0 T} \Big|_0^T - \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{2j\omega_0 T} \Big|_0^T + \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot e^{-2j\omega_0 T} \Big|_0^T + \right. \\
&\quad \left. + 6 \cdot t \Big|_0^T \right) = \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{4j\omega_0 T} - e^{4j\omega_0 \cdot 0} \right) - \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-4j\omega_0 T} - e^{-4j\omega_0 \cdot 0} \right) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{2j\omega_0 T} - e^{2j\omega_0 \cdot 0} \right) + \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-2j\omega_0 T} - e^{-2j\omega_0 \cdot 0} \right) + 6 \cdot (T - 0) \right) = \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{4j\omega_0 T} - e^0 \right) - \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-4j\omega_0 T} - e^0 \right) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{2j\omega_0 T} - e^0 \right) + \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-2j\omega_0 T} - e^0 \right) + 6 \cdot T \right) = \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{4j\omega_0 T} - 1 \right) - \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-4j\omega_0 T} - 1 \right) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{2j\omega_0 T} - 1 \right) + \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} \cdot \left(e^{-2j\omega_0 T} - 1 \right) + 6 \cdot T \right) = \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{e^{4j\omega_0 T}}{4 \cdot j \cdot \omega_0} - \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} - \frac{e^{-4j\omega_0 T}}{4 \cdot j \cdot \omega_0} + \frac{1}{4 \cdot j \cdot \omega_0} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{4 \cdot e^{2j\omega_0 T}}{2 \cdot j \cdot \omega_0} + \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} + \frac{4 \cdot e^{-2j\omega_0 T}}{2 \cdot j \cdot \omega_0} - \frac{4}{2 \cdot j \cdot \omega_0} + 6 \cdot T \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{4 \cdot j \cdot \omega_0} - \frac{e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{4 \cdot j \cdot \omega_0} - \frac{4 \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot j \cdot \omega_0} + \frac{4 \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot j \cdot \omega_0} + 6 \cdot T \right) = \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{4 \cdot j \cdot \omega_0} - \frac{4 \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - 4 \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot j \cdot \omega_0} + 6 \cdot T \right) = \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot \frac{e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot j} - \frac{4}{\omega_0} \cdot \frac{e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T} - e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot T}}{2 \cdot j} + 6 \cdot T \right) = \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \right\} = \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot \sin(4 \cdot \omega_0 \cdot T) - \frac{4}{\omega_0} \cdot \sin(2 \cdot \omega_0 \cdot T) + 6 \cdot T \right) = \\
&= \left\{ T = \frac{2\pi}{\omega_0} \right\} = \\
&= \frac{A^2}{16 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}\right) - \frac{4}{\omega_0} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0}\right) + 6 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} \right) = \\
&= \frac{A^2 \cdot \omega_0}{32\pi} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot \sin(8\pi) - \frac{4}{\omega_0} \cdot \sin(4\pi) + 6 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} \right) = \\
&= \frac{A^2 \cdot \omega_0}{32\pi} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot 0 - \frac{4}{\omega_0} \cdot 0 + 6 \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} \right) = \\
&= \frac{A^2 \cdot \omega_0}{32\pi} \cdot \frac{12\pi}{\omega_0} = \\
&= \frac{3 \cdot A^2}{8}
\end{aligned}$$

Moc sygnału równa się $\frac{3 \cdot A^2}{8}$.

Zadanie 11. Oblicz moc sygnału $f(t) = A \cdot \sin(k \cdot t) + B \cdot \cos(n \cdot t)$.

Pierwszym krokiem jest ustalenie czy sygnał $f(t)$ jest sygnałem okresowym czy nie. Nasz sygnał jest sumą dwóch funkcji okresowych $f_1(t) = A \cdot \sin(k \cdot t)$ i $f_2(t) = B \cdot \cos(n \cdot t)$.

Suma funkcji okresowych jest funkcją okresową, wtedy i tylko wtedy gdy stosunek okresów funkcji składowych jest liczbą wymierną

$$\frac{T_1}{T_2} \in \mathcal{W}$$

W naszym przypadku

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{k} \\ T_2 &= \frac{2\pi}{n} \\ \frac{T_1}{T_2} &= \frac{\frac{2\pi}{k}}{\frac{2\pi}{n}} = \frac{n}{k} \end{aligned}$$

W ogólności liczby n i k mogą być dowolnymi liczbami rzeczywistymi $n, k \in \mathcal{R}$. Załóżmy jednak iż ułamek $\frac{n}{k}$ jest pewną liczbą wymierną $\frac{a}{b}$ gdzie $a, b \in \mathcal{Z}$ są liczbami całkowitymi.

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi}{k}}{\frac{2\pi}{n}} = \frac{n}{k} = \frac{a}{b} \quad a, b \in \mathcal{Z}$$

W takim przypadku okres naszego sygnału jest Najmniejszą Wspólną Wielokrotnością okresów funkcji składowych. Stwórzmy więc tabelę z kolejnymi wielokrotnościami okresów funkcji $f_1(t)$ i $f_2(t)$. Zgodnie z przyjętym przez nas założeniem

Wielokrotność okresu	1	2	3	...	a	...	b	...
T_1	$\frac{2\pi}{k}$	$2 \cdot \frac{2\pi}{k}$	$3 \cdot \frac{2\pi}{k}$	...	$a \cdot \frac{2\pi}{k}$	...	$b \cdot \frac{2\pi}{k}$	...
T_2	$\frac{2\pi}{n}$	$2 \cdot \frac{2\pi}{n}$	$3 \cdot \frac{2\pi}{n}$	...	$a \cdot \frac{2\pi}{n}$	...	$b \cdot \frac{2\pi}{n}$	...

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{a}{b} \Rightarrow b \cdot T_1 = a \cdot T_2$$

a więc a -ta wielokrotność okresu pierwszej funkcji jest równa b -tej wielokrotności okresu drugiej funkcji, a więc jest ona poszukiwaną przez nas Najmniejszą Wspólną Wielokrotnością. Związku z tym okresem naszego sygnału jest $T = b \cdot T_1 = a \cdot T_2$. Aby obliczyć moc należy wybrać przedział o długości jednego okresu. Przedział może być dowolnie położony, przyjmijmy więc przedział $t \in (0; T)$

Moc sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (1.22)$$

Podstawiamy do wzoru na moc wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T |A \cdot \sin(k \cdot t) + B \cdot \cos(n \cdot t)|^2 \cdot dt = \end{aligned}$$

Ponieważ mamy doczynienia z sygnałem o wartościach rzeczywistych możemy pominąć obliczenie modułu.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T (A \cdot \sin(k \cdot t) + B \cdot \cos(n \cdot t))^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T ((A \cdot \sin(k \cdot t))^2 + 2 \cdot A \cdot \sin(k \cdot t) \cdot B \cdot \cos(n \cdot t) + (B \cdot \cos(n \cdot t))^2) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (A^2 \cdot \sin^2(k \cdot t) + 2 \cdot A \cdot B \cdot \sin(k \cdot t) \cdot \cos(n \cdot t) + B^2 \cdot \cos^2(n \cdot t)) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^T A^2 \cdot \sin^2(k \cdot t) \cdot dt + \int_0^T 2 \cdot A \cdot B \cdot \sin(k \cdot t) \cdot \cos(n \cdot t) \cdot dt + \int_0^T B^2 \cdot \cos^2(n \cdot t) \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^T \sin^2(k \cdot t) \cdot dt + 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T \sin(k \cdot t) \cdot \cos(n \cdot t) \cdot dt + B^2 \cdot \int_0^T \cos^2(n \cdot t) \cdot dt \right) = \\ &= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \quad \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^T \left(\frac{e^{j \cdot k \cdot t} - e^{-j \cdot k \cdot t}}{2 \cdot j} \right)^2 \cdot dt + \right. \\ &\quad + 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T \frac{e^{j \cdot k \cdot t} - e^{-j \cdot k \cdot t}}{2 \cdot j} \cdot \frac{e^{j \cdot n \cdot t} + e^{-j \cdot n \cdot t}}{2} \cdot dt + \\ &\quad \left. + B^2 \cdot \int_0^T \left(\frac{e^{j \cdot n \cdot t} + e^{-j \cdot n \cdot t}}{2} \right)^2 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^T \frac{(e^{j \cdot k \cdot t})^2 - 2 \cdot e^{j \cdot k \cdot t} \cdot e^{-j \cdot k \cdot t} + (e^{-j \cdot k \cdot t})^2}{(2 \cdot j)^2} \cdot dt + \right. \\ &\quad + 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T \frac{e^{j \cdot k \cdot t} \cdot e^{j \cdot n \cdot t} + e^{j \cdot k \cdot t} \cdot e^{-j \cdot n \cdot t} - e^{-j \cdot k \cdot t} \cdot e^{j \cdot n \cdot t} - e^{-j \cdot k \cdot t} \cdot e^{-j \cdot n \cdot t}}{2 \cdot j \cdot 2} \cdot dt + \\ &\quad \left. + B^2 \cdot \int_0^T \frac{(e^{j \cdot n \cdot t})^2 + 2 \cdot e^{j \cdot n \cdot t} \cdot e^{-j \cdot n \cdot t} + (e^{-j \cdot n \cdot t})^2}{2^2} \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^T \frac{e^{2 \cdot j \cdot k \cdot t} - 2 \cdot e^{j \cdot k \cdot t - j \cdot k \cdot t} + e^{-2 \cdot j \cdot k \cdot t}}{-4} \cdot dt + \right. \\ &\quad + 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T \frac{e^{j \cdot k \cdot t + j \cdot n \cdot t} + e^{j \cdot k \cdot t - j \cdot n \cdot t} - e^{-j \cdot k \cdot t + j \cdot n \cdot t} - e^{-j \cdot k \cdot t - j \cdot n \cdot t}}{4 \cdot j} \cdot dt + \\ &\quad \left. + B^2 \cdot \int_0^T \frac{e^{2 \cdot j \cdot n \cdot t} + 2 \cdot e^{j \cdot n \cdot t - j \cdot n \cdot t} + e^{-2 \cdot j \cdot n \cdot t}}{4} \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^T \frac{e^{2 \cdot j \cdot k \cdot t} - 2 \cdot e^0 + e^{-2 \cdot j \cdot k \cdot t}}{-4} \cdot dt + \right. \\ &\quad + 2 \cdot A \cdot B \cdot \int_0^T \frac{e^{j \cdot (k+n) \cdot t} + e^{j \cdot (k-n) \cdot t} - e^{-j \cdot (k-n) \cdot t} - e^{-j \cdot (k+n) \cdot t}}{4 \cdot j} \cdot dt + \\ &\quad \left. + B^2 \cdot \int_0^T \frac{e^{2 \cdot j \cdot n \cdot t} + 2 \cdot e^0 + e^{-2 \cdot j \cdot n \cdot t}}{4} \cdot dt \right) = \end{aligned}$$

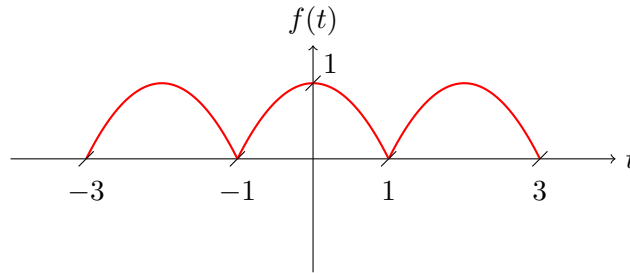
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \int_0^T \left(e^{2 \cdot j \cdot k \cdot t} - 2 \cdot 1 + e^{-2 \cdot j \cdot k \cdot t} \right) \cdot dt + \right. \\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot j} \cdot \int_0^T \left(e^{j \cdot (k+n) \cdot t} + e^{j \cdot (k-n) \cdot t} - e^{-j \cdot (k-n) \cdot t} - e^{-j \cdot (k+n) \cdot t} \right) \cdot dt + \\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \int_0^T \left(e^{2 \cdot j \cdot n \cdot t} + 2 \cdot 1 + e^{-2 \cdot j \cdot n \cdot t} \right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\int_0^T e^{2 \cdot j \cdot k \cdot t} \cdot dt - \int_0^T 2 \cdot dt + \int_0^T e^{-2 \cdot j \cdot k \cdot t} \cdot dt \right) + \right. \\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot j} \cdot \left(\int_0^T e^{j \cdot (k+n) \cdot t} \cdot dt + \int_0^T e^{j \cdot (k-n) \cdot t} \cdot dt - \int_0^T e^{-j \cdot (k-n) \cdot t} \cdot dt - \int_0^T e^{-j \cdot (k+n) \cdot t} \cdot dt \right) + \\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\int_0^T e^{2 \cdot j \cdot n \cdot t} \cdot dt + \int_0^T 2 \cdot dt + \int_0^T e^{-2 \cdot j \cdot n \cdot t} \cdot dt \right) \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{llll} z_1 = 2 \cdot j \cdot k \cdot t & z_2 = -2 \cdot j \cdot k \cdot t & z_3 = 2 \cdot j \cdot n \cdot t & z_4 = -2 \cdot j \cdot n \cdot t \\ dz_1 = 2 \cdot j \cdot k \cdot dt & dz_2 = -2 \cdot j \cdot k \cdot dt & dz_3 = 2 \cdot j \cdot n \cdot dt & dz_4 = -2 \cdot j \cdot n \cdot dt \\ dt = \frac{dz_1}{2 \cdot j \cdot k} & dt = \frac{dz_2}{-2 \cdot j \cdot k} & dt = \frac{dz_3}{2 \cdot j \cdot n} & dt = \frac{dz_4}{-2 \cdot j \cdot n} \\ z_5 = 2 \cdot j \cdot (k+n) \cdot t & z_6 = -2 \cdot j \cdot (k+n) \cdot t & z_7 = 2 \cdot j \cdot (k-n) \cdot t & z_8 = -2 \cdot j \cdot (k-n) \cdot t \\ dz_5 = j \cdot (k+n) \cdot dt & dz_6 = -j \cdot (k+n) \cdot dt & dz_7 = j \cdot (k-n) \cdot dt & dz_8 = -j \cdot (k-n) \cdot dt \\ dt = \frac{dz_5}{j \cdot (k+n)} & dt = \frac{dz_6}{-j \cdot (k+n)} & dt = \frac{dz_7}{j \cdot (k-n)} & dt = \frac{dz_8}{-j \cdot (k-n)} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\int_0^T e^{z_1} \cdot \frac{dz_1}{2 \cdot j \cdot k} - 2 \cdot \int_0^T dt + \int_0^T e^{z_2} \cdot \frac{dz_2}{-2 \cdot j \cdot k} \right) + \right. \\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot j} \cdot \left(\int_0^T e^{z_5} \cdot \frac{dz_5}{j \cdot (k+n)} + \int_0^T e^{z_7} \cdot \frac{dz_7}{j \cdot (k-n)} + \right. \\
&- \left. \int_0^T e^{z_8} \cdot \frac{dz_8}{-j \cdot (k-n)} - \int_0^T e^{z_6} \cdot \frac{dz_6}{-j \cdot (k+n)} \right) + \\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\int_0^T e^{z_3} \cdot \frac{dz_3}{2 \cdot j \cdot n} + 2 \cdot \int_0^T dt + \int_0^T e^{z_4} \cdot \frac{dz_4}{-2 \cdot j \cdot n} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \int_0^T e^{z_1} \cdot dz_1 - 2 \cdot \int_0^T dt + \frac{1}{-2 \cdot j \cdot k} \cdot \int_0^T e^{z_2} \cdot dz_2 \right) + \right. \\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot (k+n)} \cdot \int_0^T e^{z_5} \cdot dz_5 + \frac{1}{j \cdot (k-n)} \cdot \int_0^T e^{z_7} \cdot dz_7 + \right. \\
&- \frac{1}{-j \cdot (k-n)} \cdot \int_0^T e^{z_8} \cdot dz_8 - \frac{1}{-j \cdot (k+n)} \cdot \int_0^T e^{z_6} \cdot dz_6 \Big) + \\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot j \cdot n} \cdot \int_0^T e^{z_3} \cdot dz_3 + 2 \cdot \int_0^T dt + \frac{1}{-2 \cdot j \cdot n} \cdot \int_0^T e^{z_4} \cdot dz_4 \right) \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot e^{z_1} \Big|_0^T - 2 \cdot t \Big|_0^T - \frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot e^{z_2} \Big|_0^T \right) + \right. \\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot (k+n)} \cdot e^{z_5} \Big|_0^T + \frac{1}{j \cdot (k-n)} \cdot e^{z_7} \Big|_0^T + \right. \\
&+ \frac{1}{j \cdot (k-n)} \cdot e^{z_8} \Big|_0^T + \frac{1}{j \cdot (k+n)} \cdot e^{z_6} \Big|_0^T \Big) + \\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot j \cdot n} \cdot e^{z_3} \Big|_0^T + 2 \cdot t \Big|_0^T - \frac{1}{2 \cdot j \cdot n} \cdot e^{z_4} \Big|_0^T \right) \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot e^{2 \cdot j \cdot k \cdot t} \Big|_0^T - 2 \cdot t \Big|_0^T - \frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot e^{-2 \cdot j \cdot k \cdot t} \Big|_0^T \right) + \right. \\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot (k+n)} \cdot e^{j \cdot (k+n) \cdot t} \Big|_0^T + \frac{1}{j \cdot (k-n)} \cdot e^{j \cdot (k-n) \cdot t} \Big|_0^T + \right. \\
&+ \frac{1}{j \cdot (k-n)} \cdot e^{-j \cdot (k-n) \cdot t} \Big|_0^T + \frac{1}{j \cdot (k+n)} \cdot e^{-j \cdot (k+n) \cdot t} \Big|_0^T \Big) + \\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot j \cdot n} \cdot e^{2 \cdot j \cdot n \cdot t} \Big|_0^T + 2 \cdot t \Big|_0^T - \frac{1}{2 \cdot j \cdot n} \cdot e^{-2 \cdot j \cdot n \cdot t} \Big|_0^T \right) \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot (e^{2 \cdot j \cdot k \cdot T} - e^{2 \cdot j \cdot k \cdot 0}) - 2 \cdot (T - 0) - \frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot (e^{-2 \cdot j \cdot k \cdot T} - e^{-2 \cdot j \cdot k \cdot 0}) \right) + \right. \\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot (k+n)} \cdot (e^{j \cdot (k+n) \cdot T} - e^{j \cdot (k+n) \cdot 0}) + \frac{1}{j \cdot (k-n)} \cdot (e^{j \cdot (k-n) \cdot T} - e^{j \cdot (k-n) \cdot 0}) + \right. \\
&+ \frac{1}{j \cdot (k-n)} \cdot (e^{-j \cdot (k-n) \cdot T} - e^{-j \cdot (k-n) \cdot 0}) + \frac{1}{j \cdot (k+n)} \cdot (e^{-j \cdot (k+n) \cdot T} - e^{-j \cdot (k+n) \cdot 0}) \Big) + \\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot j \cdot n} \cdot (e^{2 \cdot j \cdot n \cdot T} - e^{2 \cdot j \cdot n \cdot 0}) + 2 \cdot (T - 0) - \frac{1}{2 \cdot j \cdot n} \cdot (e^{-2 \cdot j \cdot n \cdot T} - e^{-2 \cdot j \cdot n \cdot 0}) \right) \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} T = b \cdot T_1 = a \cdot T_2 \\ T = b \cdot \frac{2\pi}{k} = a \cdot \frac{2\pi}{n} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot (e^{2 \cdot j \cdot k \cdot b \cdot \frac{2\pi}{k}} - e^0) - 2 \cdot T - \frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot (e^{-2 \cdot j \cdot k \cdot b \cdot \frac{2\pi}{k}} - e^0) \right) + \right. \\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot (k+n)} \cdot (e^{j \cdot k \cdot T} \cdot e^{j \cdot n \cdot T} - e^0) + \frac{1}{j \cdot (k-n)} \cdot (e^{j \cdot k \cdot T} \cdot e^{-j \cdot n \cdot T} - e^0) + \right. \\
&+ \frac{1}{j \cdot (k-n)} \cdot (e^{-j \cdot k \cdot T} \cdot e^{j \cdot n \cdot T} - e^0) + \frac{1}{j \cdot (k+n)} \cdot (e^{-j \cdot k \cdot T} \cdot e^{-j \cdot n \cdot T} - e^0) \Big) + \\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot j \cdot n} \cdot (e^{2 \cdot j \cdot n \cdot a \cdot \frac{2\pi}{n}} - e^0) + 2 \cdot T - \frac{1}{2 \cdot j \cdot n} \cdot (e^{-2 \cdot j \cdot n \cdot a \cdot \frac{2\pi}{n}} - e^0) \right) \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot (e^{2 \cdot j \cdot b \cdot 2\pi} - 1) - 2 \cdot T - \frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot (e^{-2 \cdot j \cdot b \cdot 2\pi} - 1) \right) + \right. \\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot (k+n)} \cdot (e^{j \cdot k \cdot b \cdot \frac{2\pi}{k}} \cdot e^{j \cdot n \cdot a \cdot \frac{2\pi}{n}} - 1) + \frac{1}{j \cdot (k-n)} \cdot (e^{j \cdot k \cdot b \cdot \frac{2\pi}{k}} \cdot e^{-j \cdot n \cdot a \cdot \frac{2\pi}{n}} - 1) + \right. \\
&+ \frac{1}{j \cdot (k-n)} \cdot (e^{-j \cdot k \cdot b \cdot \frac{2\pi}{k}} \cdot e^{j \cdot n \cdot a \cdot \frac{2\pi}{n}} - 1) + \frac{1}{j \cdot (k+n)} \cdot (e^{-j \cdot k \cdot b \cdot \frac{2\pi}{k}} \cdot e^{-j \cdot n \cdot a \cdot \frac{2\pi}{n}} - 1) \Big) + \\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot j \cdot n} \cdot (e^{2 \cdot j \cdot a \cdot 2\pi} - 1) + 2 \cdot T - \frac{1}{2 \cdot j \cdot n} \cdot (e^{-2 \cdot j \cdot a \cdot 2\pi} - 1) \right) \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot (e^{2 \cdot j \cdot b \cdot 2\pi} - 1) - 2 \cdot T - \frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot (e^{-2 \cdot j \cdot b \cdot 2\pi} - 1) \right) + \right. \\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot (k+n)} \cdot (e^{j \cdot b \cdot 2\pi} \cdot e^{j \cdot a \cdot 2\pi} - 1) + \frac{1}{j \cdot (k-n)} \cdot (e^{j \cdot b \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot a \cdot 2\pi} - 1) + \right. \\
&+ \frac{1}{j \cdot (k-n)} \cdot (e^{-j \cdot b \cdot 2\pi} \cdot e^{j \cdot a \cdot 2\pi} - 1) + \frac{1}{j \cdot (k+n)} \cdot (e^{-j \cdot b \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot a \cdot 2\pi} - 1) \Big) + \\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot j \cdot n} \cdot (e^{2 \cdot j \cdot a \cdot 2\pi} - 1) + 2 \cdot T - \frac{1}{2 \cdot j \cdot n} \cdot (e^{-2 \cdot j \cdot a \cdot 2\pi} - 1) \right) \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{ll} \forall_{a \in \mathcal{Z}} e^{j \cdot a \cdot 2\pi} = 1 & \forall_{a \in \mathcal{Z}} e^{2 \cdot j \cdot a \cdot 2\pi} = 1 \\ \forall_{a \in \mathcal{Z}} e^{-j \cdot a \cdot 2\pi} = 1 & \forall_{a \in \mathcal{Z}} e^{-2 \cdot j \cdot a \cdot 2\pi} = 1 \\ \forall_{b \in \mathcal{Z}} e^{j \cdot b \cdot 2\pi} = 1 & \forall_{b \in \mathcal{Z}} e^{2 \cdot j \cdot b \cdot 2\pi} = 1 \\ \forall_{b \in \mathcal{Z}} e^{-j \cdot b \cdot 2\pi} = 1 & \forall_{b \in \mathcal{Z}} e^{-2 \cdot j \cdot b \cdot 2\pi} = 1 \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot (1 - 1) - 2 \cdot T - \frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot (1 - 1) \right) + \right. \\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot (k + n)} \cdot (1 \cdot 1 - 1) + \frac{1}{j \cdot (k - n)} \cdot (1 \cdot 1 - 1) + \right. \\
&+ \frac{1}{j \cdot (k - n)} \cdot (1 \cdot 1 - 1) + \frac{1}{j \cdot (k + n)} \cdot (1 \cdot 1 - 1) \Big) + \\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot j \cdot n} \cdot (1 - 1) + 2 \cdot T - \frac{1}{2 \cdot j \cdot n} \cdot (1 - 1) \right) \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot 0 - 2 \cdot T - \frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot 0 \right) + \right. \\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot (k + n)} \cdot 0 + \frac{1}{j \cdot (k - n)} \cdot 0 + \right. \\
&+ \frac{1}{j \cdot (k - n)} \cdot 0 + \frac{1}{j \cdot (k + n)} \cdot 0 \Big) + \\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot j \cdot n} \cdot 0 + 2 \cdot T - \frac{1}{2 \cdot j \cdot n} \cdot 0 \right) \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot (0 - 2 \cdot T - 0) + \right. \\
&+ \frac{2 \cdot A \cdot B}{4 \cdot j} \cdot (0 + 0 + 0 + 0) + \\
&+ \left. \frac{B^2}{4} \cdot (0 + 2 \cdot T - 0) \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{-4} \cdot (-2 \cdot T) + \frac{B^2}{4} \cdot 2 \cdot T \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A^2}{2} \cdot T + \frac{B^2}{2} \cdot T \right) = \\
&= \frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}
\end{aligned}$$

Ostatecznie moc sygnału wynosi $\frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}$

Zadanie 12. Oblicz moc sygnału okresowego $f(t)$ przedstawionego na rysunku:



Dla zakresu $t \in (-1; 1)$ sygnał opisany jest wzorem:

$$f(t) = 1 - t^2 \quad (1.23)$$

Moc sygnału okresowego wyznaczamy ze wzoru:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (1.24)$$

Dla tego sygnału okres T równa się 2.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 |1 - t^2|^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 (1 - t^2)^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 (1 - 2 \cdot t^2 + t^4) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\int_{-1}^1 1 \cdot dt + \int_{-1}^1 (-2) \cdot t^2 \cdot dt + \int_{-1}^1 t^4 \cdot dt \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[t \Big|_{-1}^1 - 2 \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^1 + \frac{t^5}{5} \Big|_{-1}^1 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[(1 - (-1)) - \frac{2}{3} \cdot (1 - (-1)) + \frac{1}{5} \cdot (1 - (-1)) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{30}{15} - \frac{20}{15} + \frac{6}{15} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{15} = \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

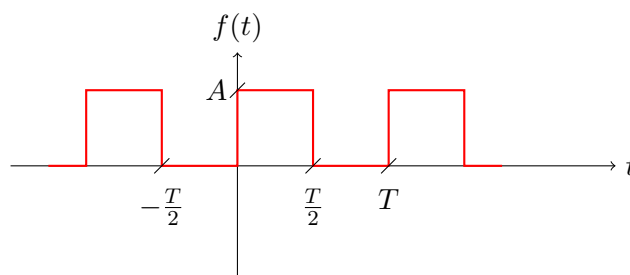
Moc sygnału równa się $\frac{8}{15}$.

Rozdział 2

Analiza sygnałów okresowych za pomocą szeregów ortogonalnych

2.1 Trygonometryczny szereg Fouriera

Zadanie 1. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (2.2)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{T} \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{2}$.

Współczynniki a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \tag{2.4}$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt = \\
&= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt = \\
&= \frac{2 \cdot A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{T \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot dz = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \sin(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \left(\sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \right) - \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} (\sin(k \cdot \pi) - \sin(0)) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{k \cdot \pi} (\sin(k \cdot \pi) - 0) = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \sin(k \cdot \pi) = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \quad (2.5)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \frac{2 \cdot A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{T \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot dz = \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} \cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} \left(\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) = \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} (\cos(k \cdot \pi) - \cos(0)) = \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi} (\cos(k \cdot \pi) - 1) = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} (1 - \cos(k \cdot \pi))
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $\frac{A}{k \cdot \pi} (1 - \cos(k \cdot \pi))$.

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{A}{2} \\
 a_k &= 0 \\
 b_k &= \frac{A}{k \cdot \pi} (1 - \cos(k \cdot \pi))
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

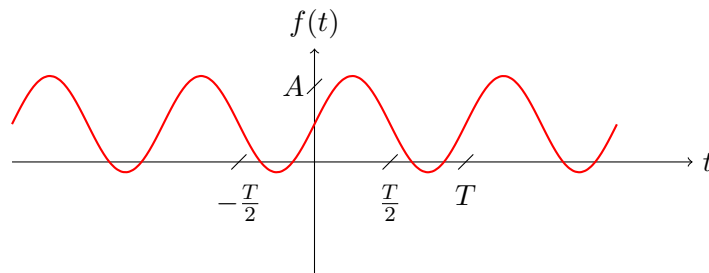
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$\frac{2 \cdot A}{\pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{5 \cdot \pi}$	0

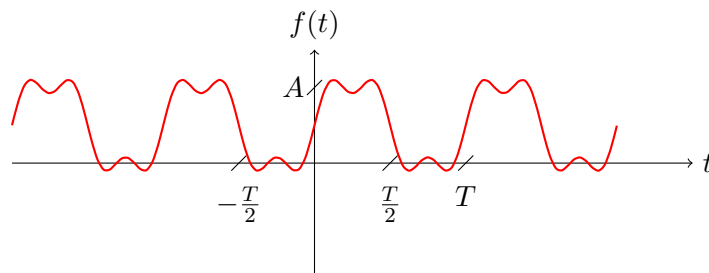
Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$\begin{aligned}
 f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right] \\
 f(t) &= \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{A}{k \cdot \pi} (1 - \cos(k \cdot \pi)) \right) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

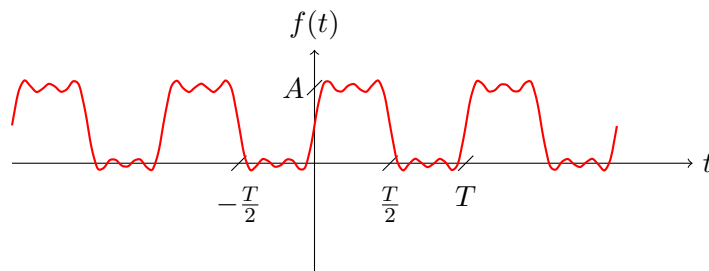
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



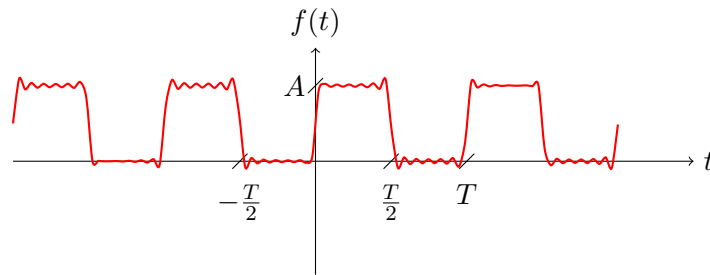
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



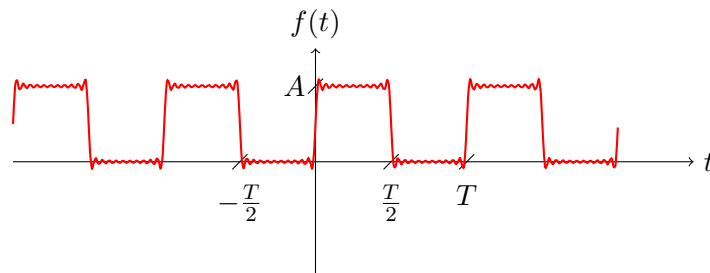
W przypadku sumowania do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

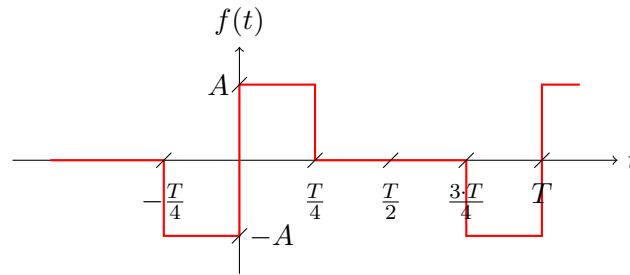


W przypadku sumowania do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 2. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -A & t \in \left(-\frac{T}{4} + k \cdot T; 0 + k \cdot T\right) \\ A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{3T}{4} + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{C} \quad (2.8)$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (2.9)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot t \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 + A \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \left(0 - \left(-\frac{T}{4} \right) \right) + A \cdot \left(\frac{T}{4} - 0 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \frac{T}{4} + A \cdot \frac{T}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{T} (0) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi 0

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \quad (2.10)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
 &= \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
 &= \frac{2}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0 \cdot dt \right) = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
 &= \frac{2}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \cos(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \cos(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} + 0 \right) = \\
 &= \frac{2}{T} \left(-\frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \cos(z) \cdot dz + \frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \cos(z) \cdot dz \right) = \\
 &= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(-\sin(z) \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 + \sin(z) \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\
 &= \frac{2 \cdot A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(-\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 + \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\
 &= \frac{2 \cdot A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(-\left(\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) - \sin\left(-k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right)\right) + \left(\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) - \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) \right) = \\
 &= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(-\left(\sin(0) - \sin\left(-k \cdot \frac{2\pi}{4}\right)\right) + \left(\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{4}\right) - \sin(0)\right) \right) = \\
 &= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(-\left(0 - \sin\left(-k \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - 0\right) \right) = \\
 &= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\sin\left(-k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) = \\
 &= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(-\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) = \\
 &= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot (0) = \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \quad (2.11)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
 &= \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3\cdot T}{4}} 0 \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{2}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \sin(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} + 0 \right) = \\
&= \frac{2}{T} \left(-\frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 \sin(z) \cdot dz + \frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \sin(z) \cdot dz \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(-\int_{-\frac{T}{4}}^0 \sin(z) \cdot dz + \int_0^{\frac{T}{4}} \sin(z) \cdot dz \right) = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\cos(z) \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 - \cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 - \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\left(\cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) - \cos \left(-k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} \right) \right) - \left(\cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} \right) - \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) \right) = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\left(\cos(0) - \cos \left(-k \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right) - \left(\cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \cos(0) \right) \right) = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\cos(0) - \cos \left(-k \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) + \cos(0) \right) = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) + 1 \right) = \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(2 - 2 \cdot \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $\frac{2 \cdot A}{k \cdot \pi} \cdot (1 - \cos(k \cdot \frac{\pi}{2}))$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$a_0 = 0$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{2 \cdot A}{k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

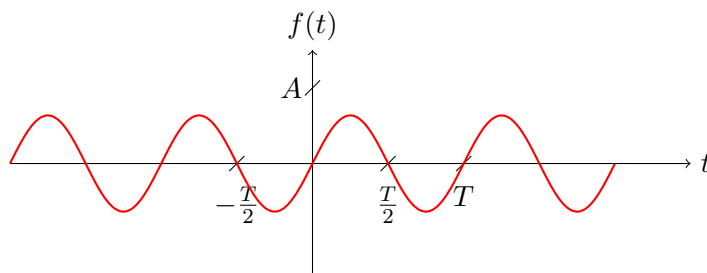
k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$\frac{2 \cdot A}{\pi}$	$\frac{2 \cdot A}{\pi}$	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{5 \cdot \pi}$	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$

Podstawiając do wzoru aproksymacyjnego funkcję $f(t)$ możemy wyrazić jako:

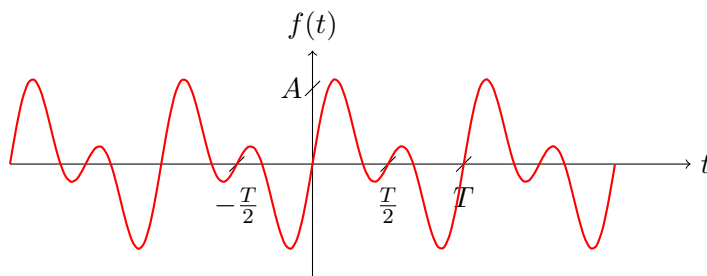
$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) + b_k \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right]$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2 \cdot A}{k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right) \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right]$$

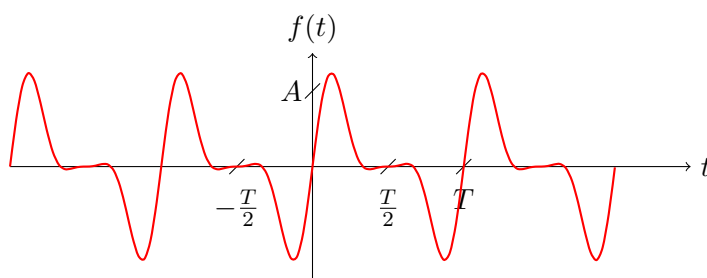
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



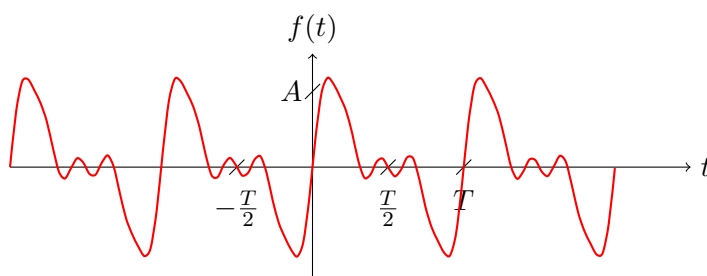
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy:



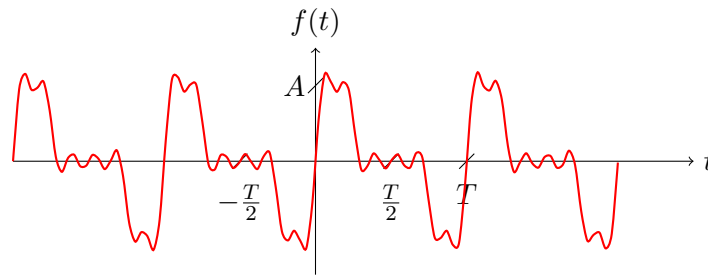
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy:



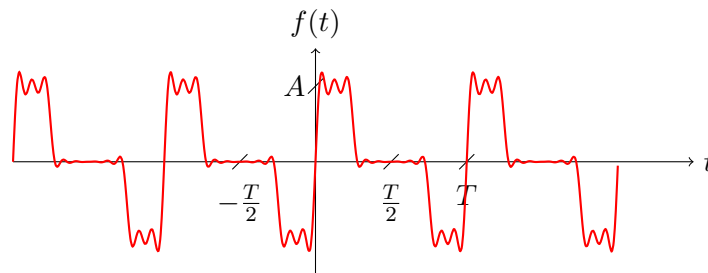
W przypadku sumowania do $k_{max} = 5$ otrzymujemy:



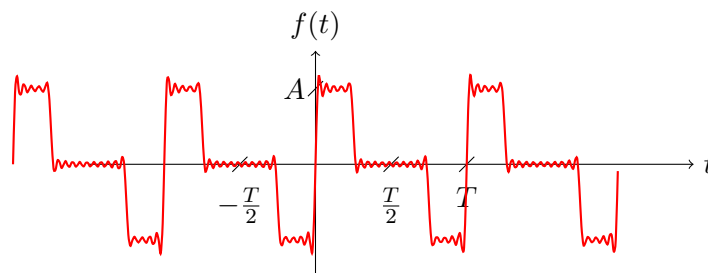
W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy:

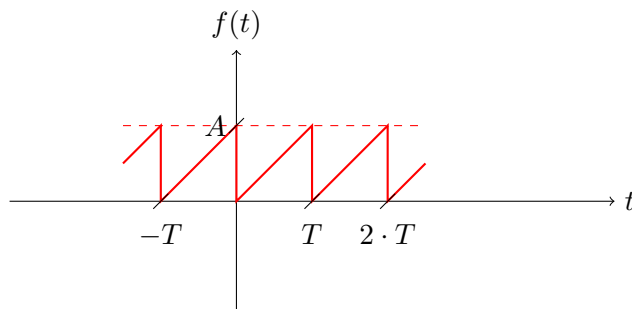


W przypadku sumowania do $k_{max} = 21$ otrzymujemy:



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 3. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \quad (2.12)$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A) . Możemy więc napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nieznane parametry a i b .

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszy okresie można opisać wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \wedge k \in \mathbb{Z}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (2.13)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T^2} \int_0^T t \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \Big|_0^T = \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (T^2 - 0^2) = \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot T^2 = \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{2}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \quad (2.14)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt = \\
&= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt = \\
&= \frac{2 \cdot A}{T^2} \int_0^T t \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = t \quad dv = \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \\ du = dt \quad v = \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \end{array} \right\} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(t \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^T - \int_0^T \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(\left(T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T \right) - 0 \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) + \frac{T^2}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^T \right) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(\frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T \right) + \frac{T^2}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \left(\cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T \right) - \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) \right) = \\
&= 2 \cdot A \cdot \left(\frac{1}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi) + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (\cos(k \cdot 2\pi) - \cos(0)) \right) = \\
&= 2 \cdot A \cdot \left(\frac{1}{k \cdot 2\pi} \cdot 0 + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (1 - 1) \right) = \\
&= 2 \cdot A \cdot \left(0 + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot 0 \right) = \\
&= 2 \cdot A \cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_k wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \quad (2.15)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\ &= \frac{2 \cdot A}{T^2} \int_0^T t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = t \quad dv = \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\ du = dt \quad v = -\frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \end{array} \right\} = \\ &= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(-t \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^T + \int_0^T \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\ &= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(-\left(T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - 0 \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) + \frac{T^2}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^T \right) = \\ &= \frac{2 \cdot A}{T^2} \cdot \left(-\left(\frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi)\right) + \frac{T^2}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot \left(\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right)\right) \right) = \\ &= 2 \cdot A \cdot \left(-\left(\frac{1}{k \cdot 2\pi} \cdot 1\right) + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (\sin(k \cdot 2\pi) - \sin(0)) \right) = \\ &= 2 \cdot A \cdot \left(-\frac{1}{k \cdot 2\pi} + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (0 - 0) \right) = \\ &= 2 \cdot A \cdot \left(-\frac{1}{k \cdot 2\pi} + \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot 0 \right) = \\ &= 2 \cdot A \cdot \left(-\frac{1}{k \cdot 2\pi} \right) = \\ &= -\frac{2 \cdot A}{k \cdot 2\pi} = \\ &= -\frac{A}{k \cdot \pi} \end{aligned}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $-\frac{A}{k \cdot \pi}$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{A}{2} \\ a_k &= 0 \\ b_k &= -\frac{A}{k \cdot \pi} \end{aligned}$$

Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

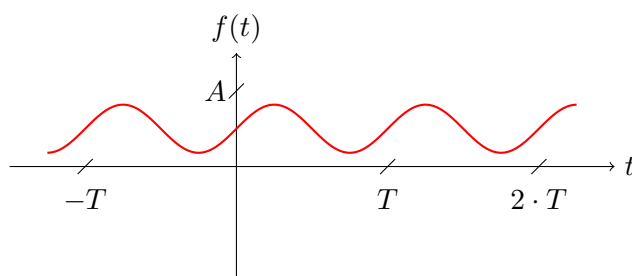
k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	0	0	0
b_k	$-\frac{A}{\pi}$	$-\frac{A}{2 \cdot \pi}$	$-\frac{A}{3 \cdot \pi}$	$-\frac{A}{4 \cdot \pi}$	$-\frac{A}{5 \cdot \pi}$	$-\frac{A}{6 \cdot \pi}$

Podstawiając do wzoru aproksymacyjnego funkcję $f(t)$ możemy wyrazić jako

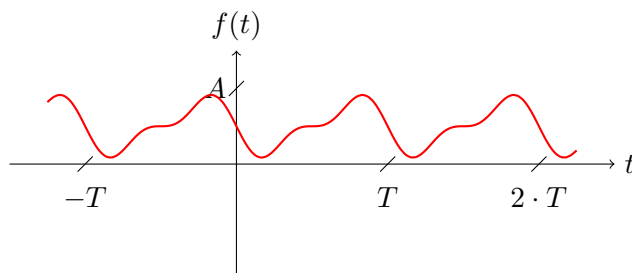
$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) + b_k \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right] \quad (2.16)$$

$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(-\frac{A}{k \cdot \pi} \right) \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right]$$

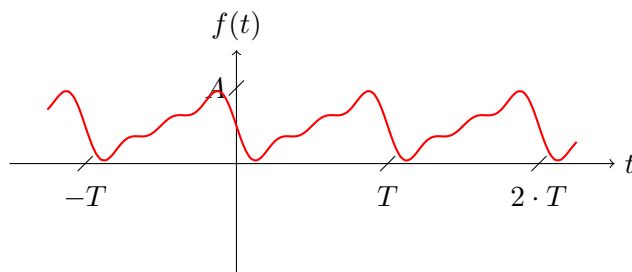
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



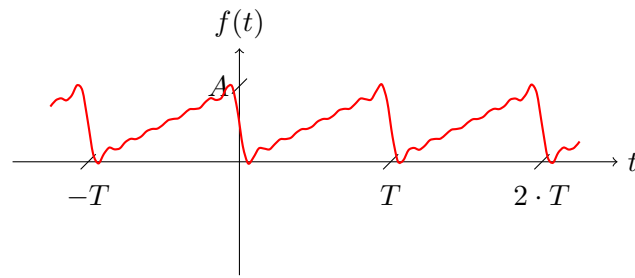
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy



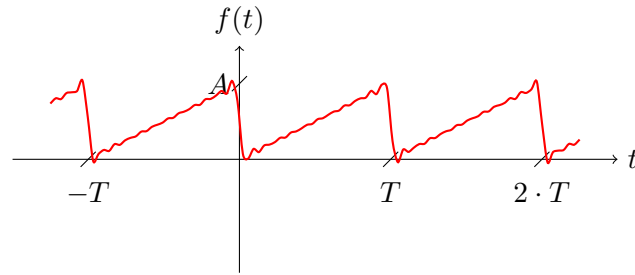
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 7$ otrzymujemy

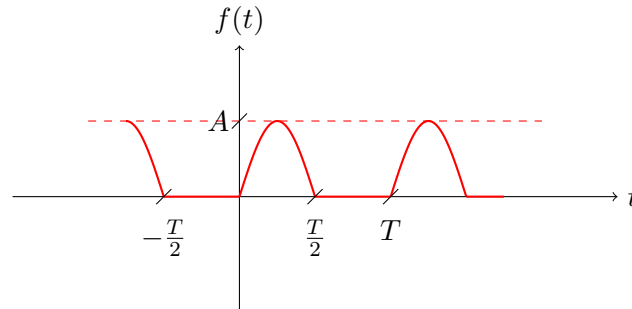


W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 4. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (2.17)$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (2.18)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{A}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} = \\ &= \frac{A}{T \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot dz = \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(-\cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (\cos(\pi) - \cos(0)) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-1 - 1) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-2) = \\
&= \frac{A}{\pi}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{A}{\pi}$

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \quad (2.19)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{aligned} \cos(x) &= \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \\ \sin(x) &= \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \end{aligned} \right\} = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot \frac{e^{jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2 \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2 \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t + jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t - jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t + jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t - jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)}}{2j} + \frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)}}{2j} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{aligned} z_1 &= \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) & z_2 &= \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \\ dz_1 &= \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt & dz_2 &= \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt \\ dt &= \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \wedge k \neq -1 & dt &= \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \wedge k \neq 1 \end{aligned} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z_1) \cdot \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} + \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z_2) \cdot \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \right) = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z_1) \cdot dz_1 + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z_2) \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(-\cos(z_1) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) + \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(-\cos(z_2) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) + \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1+k)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1+k)\right) \right) \right) = \\
&+ \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1-k)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1-k)\right) \right) \Bigg) = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (\cos(\pi \cdot (1+k)) - \cos(0)) + \right. \\
&+ \left. \frac{-1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (\cos(\pi \cdot (1-k)) - \cos(0)) \right) = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (\cos(0) - \cos(\pi \cdot (1+k))) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (\cos(0) - \cos(\pi \cdot (1-k))) \right) = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{1+k} \cdot (1 - \cos(\pi \cdot (1+k))) + \frac{1}{1-k} \cdot (1 - \cos(\pi \cdot (1-k))) \right) = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1-k}{(1+k) \cdot (1-k)} \cdot (1 - \cos(\pi \cdot (1+k))) + \frac{1+k}{(1+k) \cdot (1-k)} \cdot (1 - \cos(\pi \cdot (1-k))) \right) = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1 - \cos(\pi \cdot (1+k)) - k + k \cdot \cos(\pi \cdot (1+k))}{(1+k) \cdot (1-k)} + \frac{1 - \cos(\pi \cdot (1-k)) + k - k \cdot \cos(\pi \cdot (1-k))}{(1+k) \cdot (1-k)} \right) = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1 - \cos(\pi \cdot (1+k)) - k + k \cdot \cos(\pi \cdot (1+k)) + 1 - \cos(\pi \cdot (1-k)) + k - k \cdot \cos(\pi \cdot (1-k))}{(1+k) \cdot (1-k)} \right) = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 - \cos(\pi \cdot (1+k)) + k \cdot \cos(\pi \cdot (1+k)) - \cos(\pi \cdot (1-k)) - k \cdot \cos(\pi \cdot (1-k))}{1 - k^2} = \\
&= \left\{ \begin{aligned} \cos(\pi \cdot (1+k)) &= \cos(\pi + k \cdot \pi) = -\cos(k \cdot \pi) \\ \cos(\pi \cdot (1-k)) &= \cos(\pi - k \cdot \pi) = -\cos(-k \cdot \pi) = -\cos(k \cdot \pi) \end{aligned} \right\} = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 + \cos(k \cdot \pi) - k \cdot \cos(k \cdot \pi) + \cos(k \cdot \pi) + k \cdot \cos(k \cdot \pi)}{1 - k^2} = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot \frac{2 + 2 \cdot \cos(k \cdot \pi)}{1 - k^2} = \\
&= \frac{A}{\pi} \cdot \frac{1 + \cos(k \cdot \pi)}{1 - k^2}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_k wynosi $\frac{A}{\pi} \cdot \frac{1 + \cos(k \cdot \pi)}{1 - k^2}$ dla $k \neq 1$

Współczynnik a_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji a_1 :

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot \cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \begin{cases} \cos(x) &= \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \\ \sin(x) &= \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \end{cases} = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2 \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2 \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} + e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^0 - e^0 \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2}}{2j} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2\right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \begin{cases} z &= \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz &= \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \end{cases} = \\
&= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} = \\
&= \frac{A}{T \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot dz = \\
&= \frac{A}{4\pi} \cdot \left(-\cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{4\pi} \cdot \left(-\cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0\right) \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot (\cos(2\pi) - \cos(0)) = \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot (1 - 1) = \\
&= -\frac{A}{4\pi} \cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_1 wynosi 0

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \quad (2.20)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot \frac{e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)}}{2} - \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)}}{2} \right) \cdot dt = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \right) \cdot dt = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z_1 = \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k) & z_2 = \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k) \\ dz_1 = \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt & dz_2 = \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt \\ dt = \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \wedge k \neq -1 & dt = \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \wedge k \neq 1 \end{array} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z_1) \cdot \frac{dz_1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} - \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z_2) \cdot \frac{dz_2}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z_1) \cdot dz_1 - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z_2) \cdot dz_2 \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(\sin(z_1) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(\sin(z_2) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1+k)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1+k)\right) \right) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \cdot (1-k)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot (1-k)\right) \right) \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (\sin(\pi \cdot (1+k)) - \sin(0)) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (\sin(\pi \cdot (1-k)) - \sin(0)) \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot (0 - 0) = \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot (0 - 0) \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot 0 - \frac{1}{\frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot 0 \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot (0 - 0) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi 0 dla $k \neq 1$

Współczynnik b_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji b_1 :

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot \sin\left(1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \right\} = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot \frac{e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j\frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot dt + 0 \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{2j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} - e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} - e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - e^0 - e^0 \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot j \cdot j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2}}{2} - \frac{1+1}{2} \right) \cdot dt = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2 \right) - 1 \right) \cdot dt = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \cos \left(\frac{4\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} - t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot dz - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \sin(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{T}{2} \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \sin \left(\frac{4\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{T}{2} \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} \left(\sin \left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \right) - \sin \left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) - \frac{T}{2} \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} (\sin(2\pi) - \sin(0)) - \frac{T}{2} \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(\frac{1}{\frac{4\pi}{T}} (0 - 0) - \frac{T}{2} \right) = \\
&= -\frac{A}{T} \cdot \left(-\frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika b_1 wynosi $\frac{A}{2}$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{A}{\pi} \\
 a_1 &= 0 \\
 a_k &= \frac{A}{\pi} \cdot \frac{1 + \cos(k \cdot \pi)}{1 - k^2} \\
 b_1 &= \frac{A}{2} \\
 b_k &= 0
 \end{aligned}$$

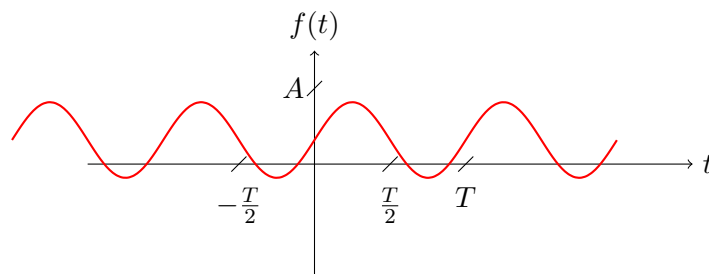
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k :

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	$-\frac{2}{3} \frac{A}{\pi}$	0	$-\frac{2}{15} \frac{A}{\pi}$	0	$-\frac{2}{35} \frac{A}{\pi}$
b_k	$\frac{A}{2}$	0	0	0	0	0

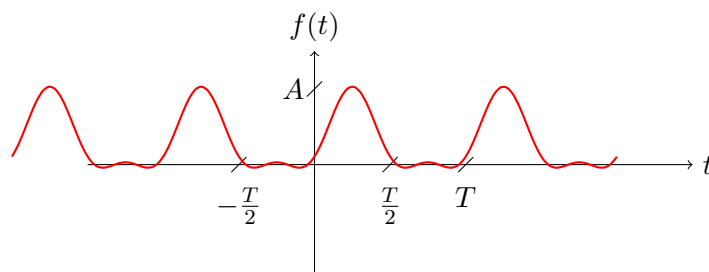
Podstawiając do wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right] \quad (2.21)$$

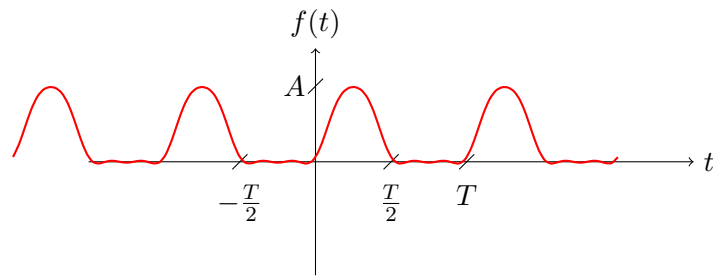
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



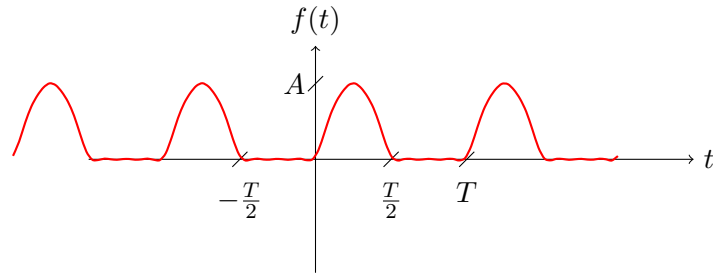
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy:



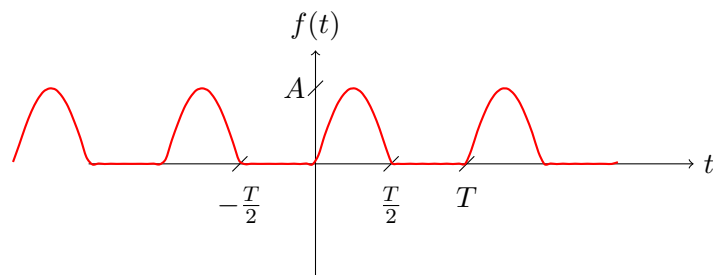
W przypadku sumowania do $k_{max} = 4$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy:

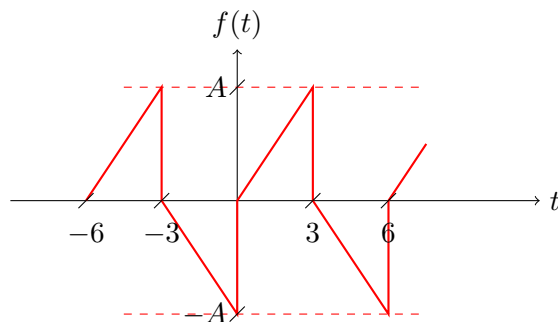


W przypadku sumowania do $k_{max} = 12$ otrzymujemy:



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 5. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku.



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać za pomocą dwóch prostych. Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = a \cdot t + b \quad (2.22)$$

W pierwszym okresie, w pierwszej części, wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz $(3, A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i znaleźć nieznanne parametry a i b .

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot 3 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot 3 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot 3 + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{3} = a \end{cases}$$

Podsumowując, pierwszy odcinek funkcji przedstawionej na rysunku, w pierwszym okresie można opisać wzorem:

$$f(t) = \frac{A}{3} \cdot t$$

Drugi odcinek funkcji jest prostą przechodzącą przez następujące dwa punkty: $(3, 0)$ oraz $(6, -A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i znaleźć nieznanne parametry a i b .

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 3 + b \\ -A = a \cdot 6 + b \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} -3 \cdot a = b \\ -A = 6 \cdot a - 3 \cdot a \end{cases} \\
&\begin{cases} -3 \cdot a = b \\ -A = 3 \cdot a \end{cases} \\
&\begin{cases} -3 \cdot a = b \\ -\frac{A}{3} = a \end{cases} \\
&\begin{cases} -3 \cdot (-\frac{A}{3}) = b \\ -\frac{A}{3} = a \end{cases} \\
&\begin{cases} A = b \\ -\frac{A}{3} = a \end{cases}
\end{aligned}$$

A więc drugi odcinek funkcji przedstawionej na rysunku w pierwszym okresie, można opisać wzorem:

$$f(t) = -\frac{A}{3} \cdot t + A$$

W związku z tym, całą funkcję w pierwszym okresie można zapisać jako funkcję przedziałową:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{3} \cdot t & \text{for } t \in (0; 3) \\ -\frac{A}{3} \cdot t + A & \text{for } t \in (3; 6) \end{cases}$$

I ogólniej, całą funkcję można wyrazić następującym wzorem:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{3} \cdot (t - k \cdot 6) & \text{for } t \in (0 + k \cdot 6; 3 + k \cdot 6) \\ -\frac{A}{3} \cdot (t - k \cdot 6) + A & \text{for } t \in (3 + k \cdot 6; 6 + k \cdot 6) \end{cases} \wedge k \in I$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (2.23)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \\
&= \frac{1}{6} \cdot \left[\int_0^3 \frac{A}{3} \cdot t \cdot dt + \int_3^6 \left(-\frac{A}{3} \cdot t + A \right) \cdot dt \right] = \\
&= \frac{A}{18} \cdot \int_0^3 t \cdot dt - \frac{A}{18} \cdot \int_3^6 t \cdot dt + \frac{A}{6} \cdot \int_3^6 dt = \\
&= \frac{A}{18} \cdot \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^3 - \frac{A}{18} \cdot \left. \frac{t^2}{2} \right|_3^6 + \frac{A}{6} \cdot t \Big|_3^6 = \\
&= \frac{A}{36} \cdot (3^2 - 0^2) - \frac{A}{36} \cdot (6^2 - 3^2) + \frac{A}{6} \cdot (6 - 3) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{36} \cdot 9 - \frac{A}{36} \cdot 27 + \frac{A}{6} \cdot 3 = \\
&= \frac{9 \cdot A}{36} - \frac{27 \cdot A}{36} + \frac{18 \cdot A}{36} = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi 0

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \quad (2.24)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{6} \cdot \left[\int_0^3 \frac{A}{3} \cdot t \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot t \right) \cdot dt + \int_3^6 \left(-\frac{A}{3} \cdot t + A \right) \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot t \right) \cdot dt \right] = \\
&= \frac{A}{9} \cdot \int_0^3 t \cdot \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t \right) \cdot dt - \frac{A}{9} \cdot \int_3^6 t \cdot \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t \right) \cdot dt + \frac{A}{3} \cdot \int_3^6 \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t \right) \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = t \quad dv = \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t \right) \cdot dt \\ du = dt \quad v = \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t \right) \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{9} \cdot \left[t \cdot \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t \right) \Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t \right) \cdot dt \right] - \\
&- \frac{A}{9} \cdot \left[t \cdot \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t \right) \Big|_3^6 - \int_3^6 \frac{3}{k \cdot 3\pi} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t \right) \cdot dt \right] + \\
&+ \frac{A}{3} \cdot \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t \right) \Big|_3^6 = \\
&= \frac{3 \cdot A}{9 \cdot k \cdot \pi} \cdot \left[3 \cdot \sin \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 3 \right) - 0 \cdot \sin \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 0 \right) + \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t \right) \Big|_0^3 \right] - \\
&- \frac{3 \cdot A}{9 \cdot k \cdot \pi} \cdot \left[6 \cdot \sin \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 6 \right) - 3 \cdot \sin \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 3 \right) + \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t \right) \Big|_3^6 \right] + \\
&+ \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left[\sin \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 6 \right) - \sin \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 3 \right) \right] = \\
&= \frac{A}{3 \cdot k \cdot \pi} \cdot \left[3 \cdot \sin(k \cdot \pi) - 0 + \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 3 \right) - \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 0 \right) \right] - \\
&- \frac{A}{3 \cdot k \cdot \pi} \cdot \left[6 \cdot \sin(k \cdot 2\pi) - 3 \cdot \sin(k\pi) + \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 6 \right) - \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 3 \right) \right] + \\
&+ \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot [\sin(k \cdot 2\pi) - \sin(k \cdot \pi)] = \\
&= \frac{A}{3 \cdot k \cdot \pi} \cdot \left[3 \cdot 0 + \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot \pi) - \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \cos(0) \right] - \\
&- \frac{A}{3 \cdot k \cdot \pi} \cdot \left[6 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi) - \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot \pi) \right] + \\
&+ \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot [0 - 0] = \\
&= \frac{A}{3 \cdot k \cdot \pi} \cdot \left[\frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot \pi) - \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot 1 \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{A}{3 \cdot k \cdot \pi} \cdot \left[\frac{3}{k \cdot \pi} \cdot 1 - \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot \pi) \right] = \\
& = \frac{A}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot \cos(k \cdot \pi) - \frac{A}{k^2 \cdot \pi^2} - \frac{A}{k^2 \cdot \pi^2} + \frac{A}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot \cos(k \cdot \pi) = \\
& = \frac{2 \cdot A}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot (\cos(k \cdot \pi) - 1) = \\
& = \frac{2 \cdot A}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot ((-1)^k - 1)
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_k wynosi $\frac{2 \cdot A}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot ((-1)^k - 1)$

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \quad (2.25)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \\
&= \frac{2}{6} \cdot \left[\int_0^3 \frac{A}{3} \cdot t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot t\right) \cdot dt + \int_3^6 \left(-\frac{A}{3} \cdot t + A\right) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{6} \cdot t\right) \cdot dt \right] = \\
&= \frac{A}{9} \cdot \int_0^3 t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{A}{9} \cdot \int_3^6 t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{A}{3} \cdot \int_3^6 \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = t \quad dv = \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t\right) \cdot dt \\ du = dt \quad v = -\frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t\right) \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{9} \cdot \left[t \cdot \frac{-3}{k \cdot \pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t\right) \Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{-3}{k \cdot \pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t\right) \cdot dt \right] - \\
&- \frac{A}{9} \cdot \left[t \cdot \frac{-3}{k \cdot \pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t\right) \Big|_3^6 - \int_3^6 \frac{-3}{k \cdot 3\pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t\right) \cdot dt \right] + \\
&+ \frac{A}{3} \cdot \frac{-3}{k \cdot \pi} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t\right) \Big|_3^6 = \\
&= \frac{-3 \cdot A}{9 \cdot k \cdot \pi} \cdot \left[3 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 3\right) - 0 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 0\right) - \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t\right) \Big|_0^3 \right] + \\
&+ \frac{3 \cdot A}{9 \cdot k \cdot \pi} \cdot \left[6 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 6\right) - 3 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 3\right) - \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot t\right) \Big|_3^6 \right] - \\
&- \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left[\cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 6\right) - \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 3\right) \right] = \\
&= \frac{-A}{3 \cdot k \cdot \pi} \cdot \left[3 \cdot \cos(k \cdot \pi) - 0 - \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 3\right) + \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 0\right) \right] + \\
&+ \frac{A}{3 \cdot k \cdot \pi} \cdot \left[6 \cdot \cos(k \cdot 2\pi) - 3 \cdot \cos(k \cdot \pi) - \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 6\right) + \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 3\right) \right] - \\
&- \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot [\cos(k \cdot 2\pi) - \cos(k \cdot \pi)] = \\
&= \frac{-A}{3 \cdot k \cdot \pi} \cdot \left[3 \cdot \cos(k \cdot \pi) - \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \sin(k \cdot \pi) + \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \sin(0) \right] + \\
&+ \frac{A}{3 \cdot k \cdot \pi} \cdot \left[6 \cdot 1 - 3 \cdot \cos(k \cdot \pi) - \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi) + \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot \sin(k \cdot \pi) \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{A}{k \cdot \pi} \cdot [1 - \cos(k \cdot \pi)] = \\
& = \frac{-A}{3 \cdot k \cdot \pi} \cdot \left[3 \cdot \cos(k \cdot \pi) - \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot 0 + \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot 0 \right] + \\
& + \frac{A}{3 \cdot k \cdot \pi} \cdot \left[6 - 3 \cdot \cos(k \cdot \pi) - \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot 0 + \frac{3}{k \cdot \pi} \cdot 0 \right] - \\
& - \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot [1 - \cos(k \cdot \pi)] = \\
& = \frac{-A}{3 \cdot k \cdot \pi} \cdot [3 \cdot \cos(k \cdot \pi)] + \frac{A}{3 \cdot k \cdot \pi} \cdot [6 - 3 \cdot \cos(k \cdot \pi)] - \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot [1 - \cos(k \cdot \pi)] = \\
& = \frac{-A}{k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot \pi) + \frac{2 \cdot A}{k \cdot \pi} - \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot \pi) - \frac{A}{k \cdot \pi} + \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot \pi) = \\
& = \frac{-A}{k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot \pi) + \frac{A}{k \cdot \pi} = \\
& = \frac{-A}{k \cdot \pi} \cdot (-1)^k + \frac{A}{k \cdot \pi} = \\
& = \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot (1 - (-1)^k)
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $\frac{A}{k \cdot \pi} \cdot (1 - (-1)^k)$

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_k &= \frac{2 \cdot A}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot ((-1)^k - 1) \\
b_k &= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot (1 - (-1)^k)
\end{aligned}$$

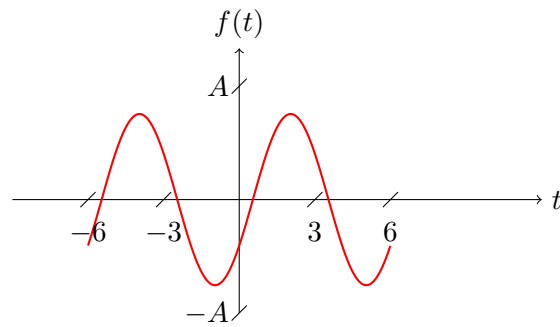
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k

k	1	2	3	4	5	6
a_k	$\frac{-4 \cdot A}{\pi^2}$	0	$\frac{-4 \cdot A}{9 \cdot \pi^2}$	0	$\frac{-4 \cdot A}{25 \cdot \pi^2}$	0
b_k	$\frac{2 \cdot A}{\pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{5 \cdot \pi}$	0

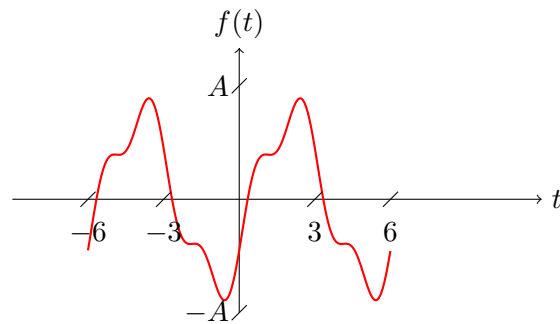
Podstawiając do wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right] \\
f(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2 \cdot A}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot ((-1)^k - 1) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + \left(\frac{A}{k \cdot \pi} \cdot (1 - (-1)^k)\right) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right] \quad (2.26)
\end{aligned}$$

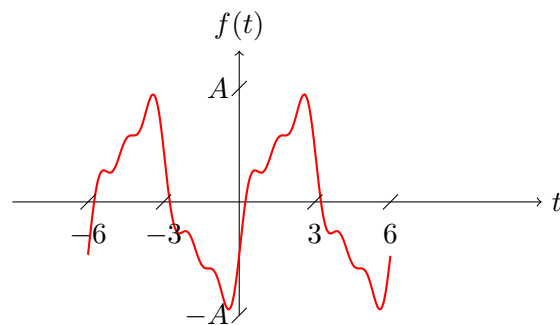
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy



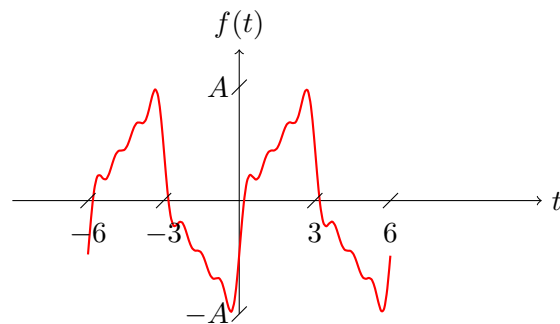
W przypadku sumowania do $k_{max} = 3$ otrzymujemy



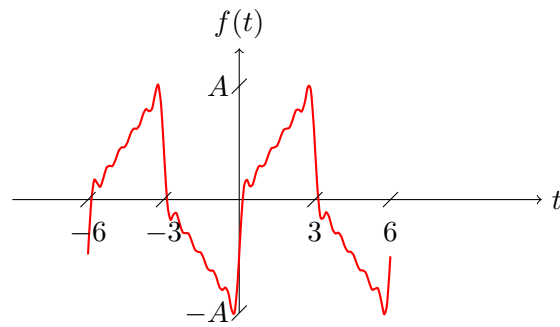
W przypadku sumowania do $k_{max} = 5$ otrzymujemy



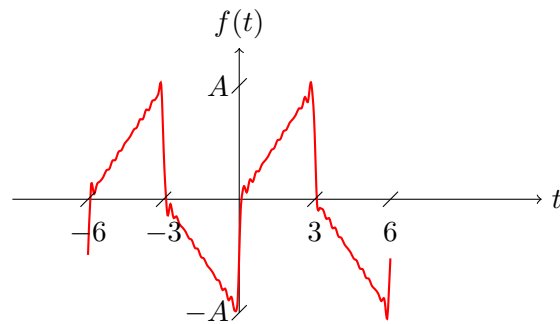
W przypadku sumowania do $k_{max} = 7$ otrzymujemy



W przypadku sumowania do $k_{max} = 11$ otrzymujemy

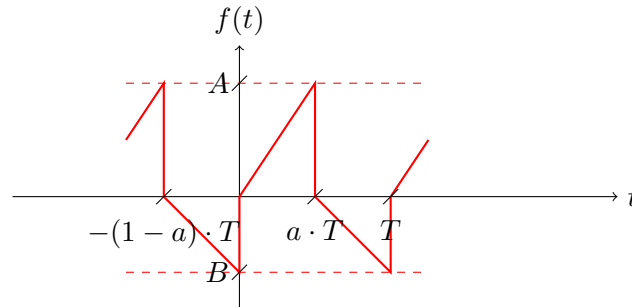


W przypadku sumowania do $k_{max} = 21$ otrzymujemy



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 6. Wyznacz współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku.



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać za pomocą dwóch prostych. Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \quad (2.27)$$

W pierwszym okresie, w pierwszej części, wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz $(a \cdot T, A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i znaleźć nieznane parametry m i b :

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 0 + b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = m \cdot a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{a \cdot T} = m \end{cases}$$

Podsumowując, pierwszy odcinek funkcji przedstawionej na rysunku, w pierwszym okresie można opisać wzorem:

$$f(t) = \frac{A}{a \cdot T} \cdot t$$

Drugi odcinek funkcji jest prostą przechodzącą przez następujące dwa punkty: $(a \cdot T, 0)$ oraz $(T, -B)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i znaleźć nieznane parametry m i b :

$$\begin{cases} 0 = m \cdot a \cdot T + b \\ -B = m \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -B = m \cdot T - m \cdot a \cdot T \end{cases} \\
&\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -B = m \cdot (T - a \cdot T) \end{cases} \\
&\begin{cases} -m \cdot a \cdot T = b \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} = m \end{cases} \\
&\begin{cases} \frac{B}{T-a \cdot T} \cdot a \cdot T = b \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} = m \end{cases} \\
&\begin{cases} \frac{B}{1-a} \cdot a = b \\ -\frac{B}{T-a \cdot T} = m \end{cases} \\
&\begin{cases} \frac{B}{1-a} \cdot a = b \\ -\frac{B}{T \cdot (1-a)} = m \end{cases}
\end{aligned}$$

A więc drugi odcinek funkcji przedstawionej na rysunku w pierwszym okresie, można opisać wzorem:

$$f(t) = -\frac{B}{T \cdot (1-a)} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a$$

W związku z tym, całą funkcję w pierwszym okresie można zapisać jako funkcję przedziałową:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a \cdot T} \cdot t & dla \quad t \in (0; a \cdot T) \\ -\frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a & dla \quad t \in (a \cdot T; T) \end{cases}$$

I ogólniej, całą funkcję można wyrazić następującym wzorem:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a \cdot T} \cdot (t - k \cdot T) & dla \quad t \in (0 + k \cdot T; a \cdot T + k \cdot T) \\ -\frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot (t - k \cdot T) + \frac{B}{1-a} \cdot a & dla \quad t \in (a \cdot T + k \cdot T; T + k \cdot T) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z}$$

Współczynnik a_0 wyznaczamy ze wzoru

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (2.28)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{a \cdot T} \frac{A}{a \cdot T} \cdot t \cdot dt + \int_{a \cdot T}^T \left(-\frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a \right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{a \cdot T} \frac{A}{a \cdot T} \cdot t \cdot dt + \int_{a \cdot T}^T -\frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot t \cdot dt + \int_{a \cdot T}^T \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot dt \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^T t \cdot dt + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \int_{a \cdot T}^T dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^{a \cdot T} - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_{a \cdot T}^T + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot t \Big|_{a \cdot T}^T \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(\frac{(a \cdot T)^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(\frac{T^2}{2} - \frac{(a \cdot T)^2}{2} \right) + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot (T - a \cdot T) \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(\frac{a^2 \cdot T^2}{2} - \frac{0}{2} \right) - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(\frac{T^2}{2} - \frac{a^2 \cdot T^2}{2} \right) + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot T \cdot (1-a) \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(\frac{a^2 \cdot T^2}{2} \right) - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot T^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{2} \right) + B \cdot a \cdot T \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \left(\frac{a \cdot T}{2} \right) - \frac{B}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-a^2) + B \cdot a \cdot T \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \frac{a \cdot T}{2} - \frac{B}{1-a} \cdot T \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-a) \cdot (1+a) + B \cdot a \cdot T \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot a \cdot T \cdot \frac{1}{2} - B \cdot T \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+a) + B \cdot a \cdot T \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot a \cdot T \cdot \frac{1}{2} - B \cdot T \cdot \frac{1}{2} - B \cdot T \cdot \frac{1}{2} \cdot a + B \cdot a \cdot T \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot a \cdot T \cdot \frac{1}{2} - B \cdot T \cdot \frac{1}{2} + B \cdot T \cdot \frac{1}{2} \cdot a \right) = \\
&= A \cdot a \cdot \frac{1}{2} - B \cdot \frac{1}{2} + B \cdot \frac{1}{2} \cdot a = \\
&= A \cdot a \cdot \frac{1}{2} - B \cdot \frac{1}{2} (1-a) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot A \cdot a - \frac{1}{2} \cdot B \cdot (1-a)
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_0 wynosi $\frac{1}{2} \cdot A \cdot a - \frac{1}{2} \cdot B \cdot (1-a)$.

Współczynnik a_k wyznaczamy ze wzoru

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \quad (2.29)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{a \cdot T} \frac{A}{a \cdot T} \cdot t \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt + \int_{a \cdot T}^T \left(-\frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a \right) \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{a \cdot T} \frac{A}{a \cdot T} \cdot t \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt + \int_{a \cdot T}^T -\frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot t \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt + \right. \\
&\quad \left. + \int_{a \cdot T}^T \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^T t \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt + \right. \\
&\quad \left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \int_{a \cdot T}^T \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} = dt \end{array} \right\} = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^T t \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt + \right. \\
&\quad \left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \int_{a \cdot T}^T \cos(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^T t \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt + \right. \\
&\quad \left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_{a \cdot T}^T \cos(z) \cdot dz \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^T t \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt + \right. \\
&\quad \left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \sin(z) \Big|_{a \cdot T}^T \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^T t \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt + \right. \\
&\quad \left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_{a \cdot T}^T \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^T t \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt + \right. \\
&\quad \left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \left(\sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T \right) - \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T \right) \right) \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = t \quad dv = \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \\ du = dt \quad v = \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \end{array} \right\} = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^{a \cdot T} - \int_0^{a \cdot T} \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) + \right. \\
&\quad - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_{a \cdot T}^T - \int_{a \cdot T}^T \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) + \\
&\quad \left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \left(\sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T \right) - \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T \right) \right) \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^{a \cdot T} - \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{a \cdot T} \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) + \right. \\
&\quad - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_{a \cdot T}^T - \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{a \cdot T}^T \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) + \\
&\quad \left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \left(\sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T \right) - \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T \right) \right) \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} = dt \end{array} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right) \Big|_0^{a \cdot T} - \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{a \cdot T} \sin(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \right) + \\
&- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right) \Big|_{a \cdot T}^T - \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{a \cdot T}^T \sin(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \Big) + \\
&+ \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} (\sin(k \cdot 2\pi) - \sin(k \cdot 2\pi \cdot a)) \Big) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(\left(a \cdot T \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T \right) - 0 \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot - \right) \right) + \right. \\
&- \frac{1}{\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \right)^2} \cdot \int_0^{a \cdot T} \sin(z) \cdot dz \Big) + \\
&- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(\left(T \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T \right) - a \cdot T \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T \right) \right) + \right. \\
&- \frac{1}{\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \right)^2} \cdot \int_{a \cdot T}^T \sin(z) \cdot dz \Big) + \\
&+ \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} (0 - \sin(k \cdot 2\pi \cdot a)) \Big) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(\left(a \cdot T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) - 0 \right) + \right. \right. \\
&- \frac{1}{k^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} \cdot (-\cos(z)) \Big|_0^{a \cdot T} \Big) + \\
&- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(\left(T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi) - a \cdot T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) \right) + \right. \\
&- \frac{1}{k^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} \cdot (-\cos(z)) \Big|_{a \cdot T}^T \Big) + \\
&+ \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} (-\sin(k \cdot 2\pi \cdot a)) \Big) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(a \cdot \frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) + \right. \right. \\
&- \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot \left(-\cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right) \Big|_0^{a \cdot T} \Big) + \\
&- \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(\frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot 0 - a \cdot \frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) + \right. \\
&- \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot \left(-\cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right) \Big|_{a \cdot T}^T \Big) + \\
&- \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) \Big) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(a \cdot \frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) + \right. \right. \\
&- \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot \left(-\cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T \right) + \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) \Big) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(0 - a \cdot \frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) + \right. \\
& - \left. \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot \left(-\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) + \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T\right) \right) \right) + \\
& - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) \Big) = \\
& = \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(a \cdot \frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) - \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot (-\cos(k \cdot 2\pi \cdot a) + \cos(0)) \right) + \right. \\
& - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(-a \cdot \frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) - \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot (-\cos(k \cdot 2\pi) + \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) \right) \Big) + \\
& - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) \Big) = \\
& = \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot T^2 \left(a \cdot \frac{1}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) - \frac{1}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot (-\cos(k \cdot 2\pi \cdot a) + 1) \right) + \right. \\
& - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot T^2 \left(-a \cdot \frac{1}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) - \frac{1}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot (-1 + \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) \right) \Big) + \\
& - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) \Big) = \\
& = \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a} \cdot T \left(a \cdot \frac{1}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) - \frac{1}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot (1 - \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) \right) + \right. \\
& + \frac{B}{1-a} \cdot T \left(a \cdot \frac{1}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) - \frac{1}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot (1 - \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) \right) \Big) + \\
& - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) \Big) = \\
& = \frac{2 \cdot A}{a} \left(\frac{a}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) - \frac{1}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot (1 - \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) \right) + \\
& + \frac{2 \cdot B}{1-a} \left(\frac{a}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) - \frac{1}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot (1 - \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) \right) + \\
& - \frac{2 \cdot B}{1-a} \cdot \frac{a}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) = \\
& = \frac{2 \cdot A}{a} \cdot \frac{a}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) - \frac{2 \cdot A}{a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot (1 - \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) + \\
& + \frac{2 \cdot B}{1-a} \cdot \frac{a}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) - \frac{2 \cdot B}{1-a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot (1 - \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) + \\
& - \frac{2 \cdot B}{1-a} \cdot \frac{a}{k \cdot 2\pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) = \\
& = \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) + \\
& - \frac{A}{a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot (1 - \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) + \\
& - \frac{B}{1-a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot (1 - \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) \\
& = \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) + \\
& - \frac{A}{a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) + \\
& - \frac{B}{1-a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) \\
& = \left\{ \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(x)) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) + \\
&- \frac{A}{a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin^2(k \cdot \pi \cdot a) + \\
&- \frac{B}{1-a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin^2(k \cdot \pi \cdot a) \\
&= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) - \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a} \right) \cdot \frac{1}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin^2(k \cdot \pi \cdot a)
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika a_k wynosi $\frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) - \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a} \right) \cdot \frac{1}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin^2(k \cdot \pi \cdot a)$.

Współczynnik b_k wyznaczamy ze wzoru

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \quad (2.30)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T} \int_T f(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{a \cdot T} \frac{A}{a \cdot T} \cdot t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{a \cdot T}^T \left(-\frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot t + \frac{B}{1-a} \cdot a \right) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\int_0^{a \cdot T} \frac{A}{a \cdot T} \cdot t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{a \cdot T}^T -\frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right. \\
&\quad \left. + \int_{a \cdot T}^T \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^T t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right. \\
&\quad \left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \int_{a \cdot T}^T \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} = dt \end{array} \right\} = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^T t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right. \\
&\quad \left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \int_{a \cdot T}^T \sin(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^T t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right. \\
&\quad \left. + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_{a \cdot T}^T \sin(z) \cdot dz \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^T t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right. \\
&\quad \left. - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cos(z) \Big|_{a \cdot T}^T \right) = \\
&= \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^T t \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_{a \cdot T}^T = \\
& = \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \int_0^{a \cdot T} t \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \int_{a \cdot T}^T t \cdot \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt + \right. \\
& - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \left(\cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T \right) - \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T \right) \right) \Big) = \\
& = \left\{ \begin{array}{l} u = t \quad dv = \sin \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \\ du = dt \quad v = -\frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \end{array} \right\} = \\
& = \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(-t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^{a \cdot T} + \int_0^{a \cdot T} \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) + \right. \\
& - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(-t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_{a \cdot T}^T + \int_{a \cdot T}^T \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) + \\
& - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \left(\cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T \right) - \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T \right) \right) \Big) = \\
& = \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(-t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^{a \cdot T} + \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{a \cdot T} \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) + \right. \\
& - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(-t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_{a \cdot T}^T + \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{a \cdot T}^T \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot dt \right) + \\
& - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \left(\cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T \right) - \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T \right) \right) \Big) = \\
& = \left\{ \begin{array}{l} z = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} = dt \end{array} \right\} = \\
& = \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(-t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_0^{a \cdot T} + \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{a \cdot T} \cos(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \right) + \right. \\
& - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(-t \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \Big|_{a \cdot T}^T + \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{a \cdot T}^T \cos(z) \cdot \frac{dz}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \right) + \\
& - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \left(\cos(k \cdot 2\pi) - \cos(k \cdot 2\pi \cdot a) \right) \Big) = \\
& = \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(\left(-a \cdot T \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T \right) + 0 \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \right) \right) + \right. \\
& + \frac{1}{\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \right)^2} \cdot \int_0^{a \cdot T} \cos(z) \cdot dz \Big) + \\
& - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(\left(-T \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T \right) + a \cdot T \cdot \frac{1}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \cos \left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T \right) \right) + \right. \\
& + \frac{1}{\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \right)^2} \cdot \int_{a \cdot T}^T \cos(z) \cdot dz \Big) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot (1 - \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) \Big) = \\
& = \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(\left(-a \cdot T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a) + 0 \right) + \right. \right. \\
& + \left. \frac{1}{k^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} \cdot (\sin(z))|_0^{a \cdot T} \right) + \\
& - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(\left(-T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi) + a \cdot T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a) \right) + \right. \\
& + \left. \frac{1}{k^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} \cdot (\sin(z))|_{a \cdot T}^T \right) + \\
& - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot (1 - \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) \Big) = \\
& = \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(-a \cdot T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a) + \right. \right. \\
& + \left. \frac{1}{k^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} \cdot \left(\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right) \Big|_0^{a \cdot T} \right) + \\
& - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(\left(-T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot 1 + a \cdot T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a) \right) + \right. \\
& + \left. \frac{1}{k^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} \cdot \left(\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right) \Big|_{a \cdot T}^T \right) + \\
& - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot (1 - \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) \Big) = \\
& = \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(-a \cdot T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a) + \right. \right. \\
& + \left. \frac{1}{k^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} \cdot \left(\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T\right) - \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) \right) + \\
& - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(T \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot (-1 + a \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) + \right. \\
& + \left. \frac{1}{k^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}} \cdot \left(\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T\right) - \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot T\right) \right) \right) + \\
& - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot (1 - \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) \Big) = \\
& = \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(-a \cdot \frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a) + \right. \right. \\
& + \left. \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot (\sin(k \cdot 2\pi \cdot a) - \sin(0)) \right) + \\
& - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(\frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot (-1 + a \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) + \right. \\
& + \left. \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot (\sin(k \cdot 2\pi) - \sin(k \cdot 2\pi \cdot a)) \right) + \\
& - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot (1 - \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) \Big) = \\
& = \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(-a \cdot \frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a) + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot (\sin(k \cdot 2\pi \cdot a) - 0) \Big) + \\
& - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(\frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot (-1 + a \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) + \right. \\
& + \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot (0 - \sin(k \cdot 2\pi \cdot a)) \Big) + \\
& - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot (1 - \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) \Big) = \\
& = \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \left(-a \cdot \frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a) + \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) \right) + \right. \\
& - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \left(\frac{T^2}{k \cdot 2\pi} \cdot (-1 + a \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) - \frac{T^2}{k^2 \cdot 4\pi^2} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) \right) + \\
& - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot (1 - \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) \Big) = \\
& = \frac{2}{T} \cdot \left(\frac{A}{a \cdot T} \cdot \frac{T^2}{2} \cdot \left(-a \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a) + \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) \right) + \right. \\
& - \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \frac{T^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{k \cdot \pi} \cdot (-1 + a \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) - \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) \right) + \\
& - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot (1 - \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) \Big) = \\
& = \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{a \cdot T} \cdot \frac{T^2}{2} \cdot \left(-a \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a) + \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) \right) + \\
& - \frac{2}{T} \cdot \frac{B}{(1-a) \cdot T} \cdot \frac{T^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{k \cdot \pi} \cdot (-1 + a \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) - \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) \right) + \\
& - \frac{2}{T} \cdot \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{T}{k \cdot 2\pi} \cdot (1 - \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) = \\
& = \frac{A}{a} \cdot \left(-a \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a) + \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) \right) + \\
& - \frac{B}{1-a} \cdot \left(\frac{1}{k \cdot \pi} \cdot (-1 + a \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) - \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) \right) + \\
& - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot (1 - \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) = \\
& = -\frac{A}{a} \cdot a \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a) + \frac{A}{a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) + \\
& - \frac{B}{1-a} \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot (-1 + a \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) + \frac{B}{1-a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) + \\
& - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot (1 - \cos(k \cdot 2\pi \cdot a)) = \\
& = -\frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a) + \frac{A}{a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) + \\
& + \frac{B}{1-a} \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} - \frac{B}{1-a} \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot a \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a) + \frac{B}{1-a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) + \\
& - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} + \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a) = \\
& = -\frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a) + \frac{A}{a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) + \\
& + \frac{B}{1-a} \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{B}{1-a} \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} - \frac{B}{1-a} \cdot a \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} = \\
& = -\frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a) + \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) + \\
& + \frac{B}{1-a} \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot (1-a) = \\
& = -\frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a) + \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) + \frac{B}{k \cdot \pi}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika b_k wynosi $\frac{B}{k \cdot \pi} - \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a) + \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a)$.

Ostatecznie współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2} \cdot A \cdot a - \frac{1}{2} \cdot B \cdot (1-a) \\
a_k &= \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a) - \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot \sin^2(k \cdot \pi \cdot a) \\
b_k &= \frac{B}{k \cdot \pi} - \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi \cdot a) + \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{k^2 \cdot 2\pi^2} \cdot \sin(k \cdot 2\pi \cdot a)
\end{aligned}$$

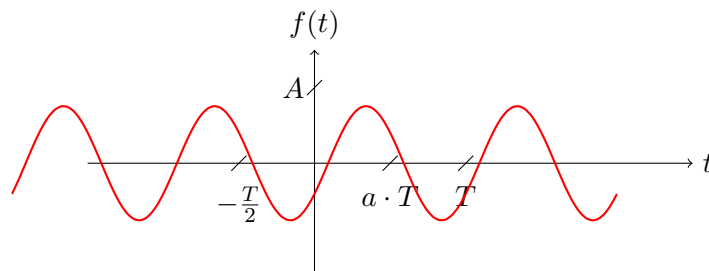
Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników a_k i b_k :

k	a_k	b_k
1	$\frac{A}{\pi} \cdot \sin(2\pi \cdot a) - \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot \sin^2(\pi \cdot a)$	$\frac{B}{\pi} - \frac{A}{\pi} \cdot \cos(2\pi \cdot a) + \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{2\pi^2} \cdot \sin(2\pi \cdot a)$
2	$\frac{A}{2\pi} \cdot \sin(4\pi \cdot a) - \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{4\pi^2} \cdot \sin^2(2\pi \cdot a)$	$\frac{B}{2\pi} - \frac{A}{2\pi} \cdot \cos(4\pi \cdot a) + \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{8\pi^2} \cdot \sin(4\pi \cdot a)$
3	$\frac{A}{3\pi} \cdot \sin(6\pi \cdot a) - \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{9\pi^2} \cdot \sin^2(3\pi \cdot a)$	$\frac{B}{3\pi} - \frac{A}{3\pi} \cdot \cos(6\pi \cdot a) + \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{18\pi^2} \cdot \sin(6\pi \cdot a)$
4	$\frac{A}{4\pi} \cdot \sin(8\pi \cdot a) - \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{16\pi^2} \cdot \sin^2(4\pi \cdot a)$	$\frac{B}{4\pi} - \frac{A}{4\pi} \cdot \cos(8\pi \cdot a) + \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{32\pi^2} \cdot \sin(8\pi \cdot a)$
5	$\frac{A}{5\pi} \cdot \sin(10\pi \cdot a) - \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{25\pi^2} \cdot \sin^2(5\pi \cdot a)$	$\frac{B}{5\pi} - \frac{A}{5\pi} \cdot \cos(10\pi \cdot a) + \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{50\pi^2} \cdot \sin(10\pi \cdot a)$
6	$\frac{A}{6\pi} \cdot \sin(12\pi \cdot a) - \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{36\pi^2} \cdot \sin^2(6\pi \cdot a)$	$\frac{B}{6\pi} - \frac{A}{6\pi} \cdot \cos(12\pi \cdot a) + \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{72\pi^2} \cdot \sin(12\pi \cdot a)$

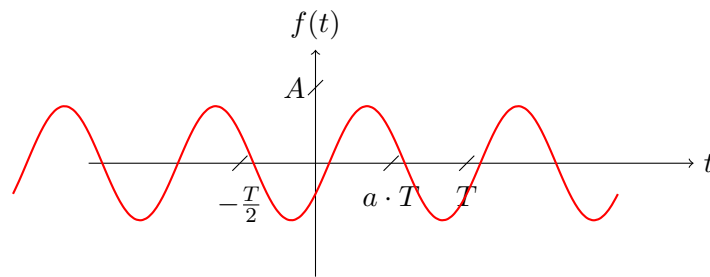
Podstawiając do wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + b_k \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right] \quad (2.31)$$

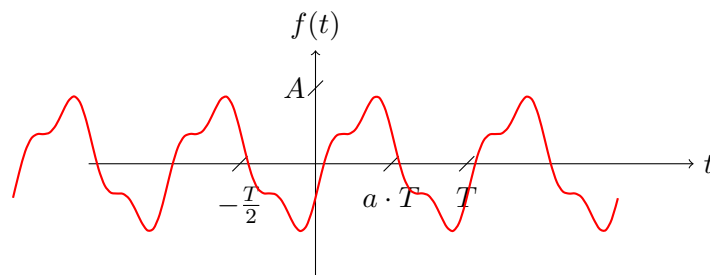
W przypadku sumowania do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



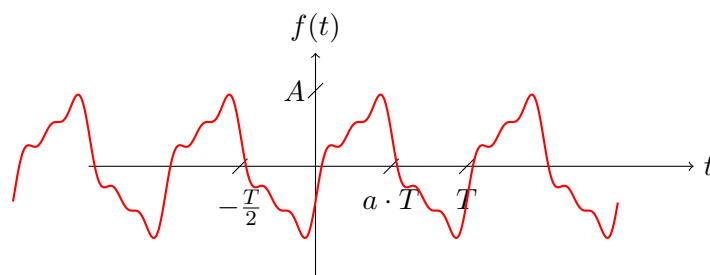
W przypadku sumowania do $k_{max} = 2$ otrzymujemy:



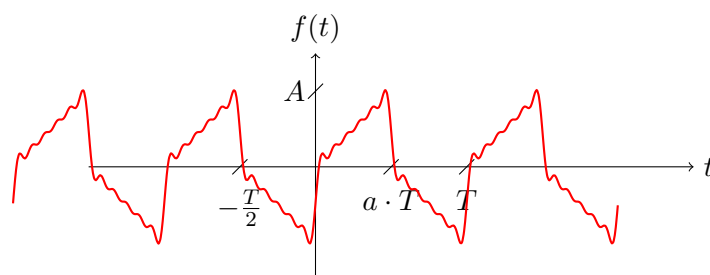
W przypadku sumowania do $k_{max} = 4$ otrzymujemy:



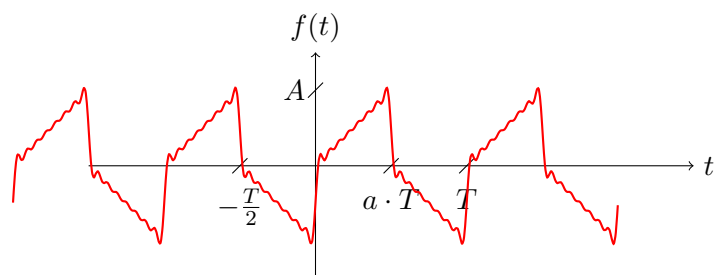
W przypadku sumowania do $k_{max} = 6$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania do $k_{max} = 12$ otrzymujemy:



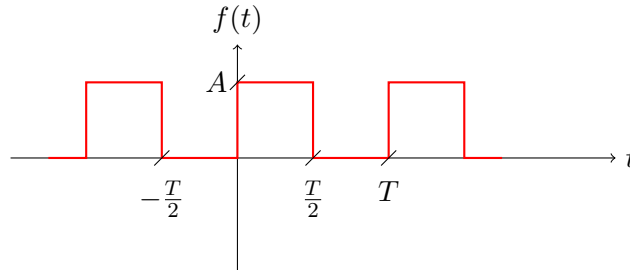
W przypadku sumowania do $k_{max} = 16$ otrzymujemy:



W granicy sumowania do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

2.2 Zespolony szereg Fouriera

Zadanie 1. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku. Narysuj widmo amplitudowe i fazowe sygnału.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (2.32)$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (2.33)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{2}$.

Współczynniki F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (2.35)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = -j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} = \\
&= -\frac{A}{T \cdot j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz = \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} \right) = \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left(e^{-j \cdot k \cdot \pi} - e^0 \right) = \\
&= -\frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left(e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) = \\
&= j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \\
&= j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1 \right)
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1 \right)$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{2} \\
F_k &= j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1 \right)
\end{aligned}$$

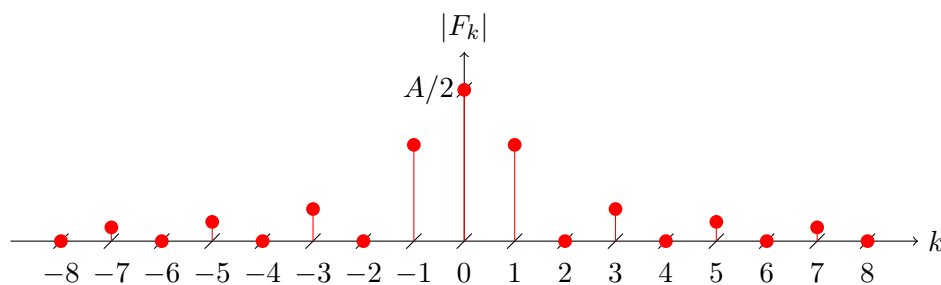
Podstawiając wyznaczone wartości współczynników F_k do wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \\
f(t) &= \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left[j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1 \right) \right] \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

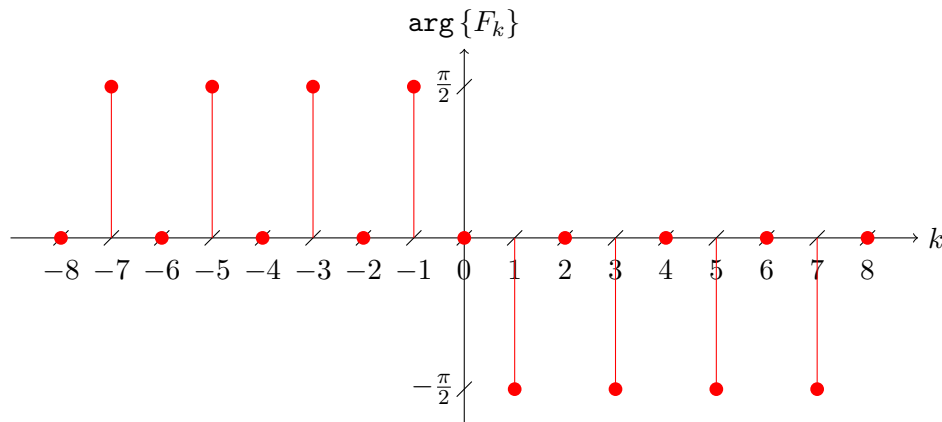
k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$j \cdot \frac{A}{5\pi}$	0	$j \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$j \cdot \frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{2}$	$-j \cdot \frac{A}{\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{5\pi}$
$ F_k $	$\frac{A}{5\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{5\pi}$
$Arg\{F_k\}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$

Na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo amplitudowe $|F_k|$ sygnału $f(t)$.



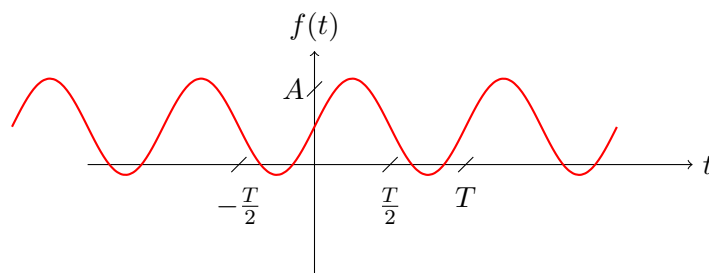
Widmo amplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Podobnie na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo fazowe $\arg\{F_k\}$ sygnału $f(t)$.

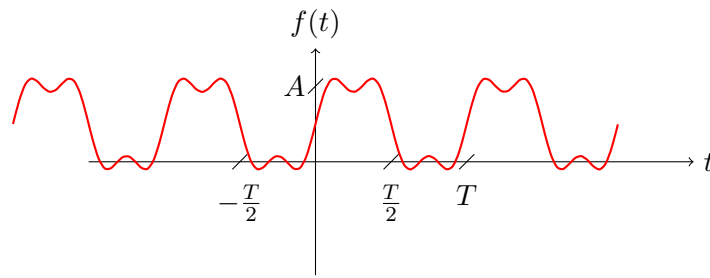


Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

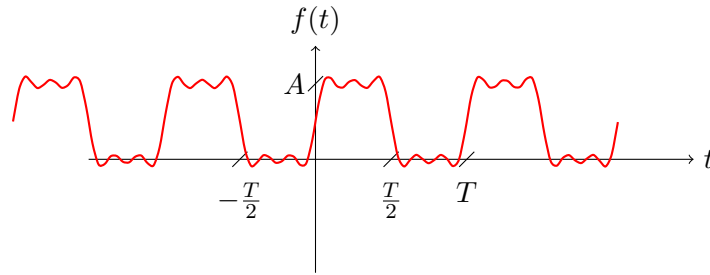
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



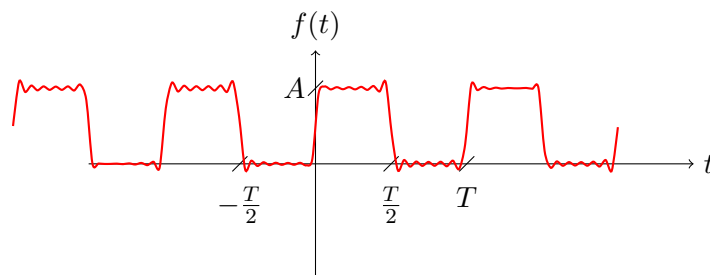
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy:



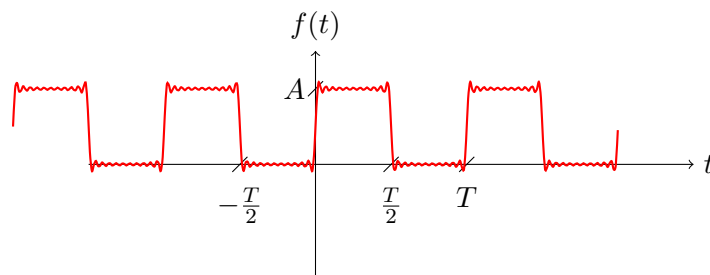
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy:

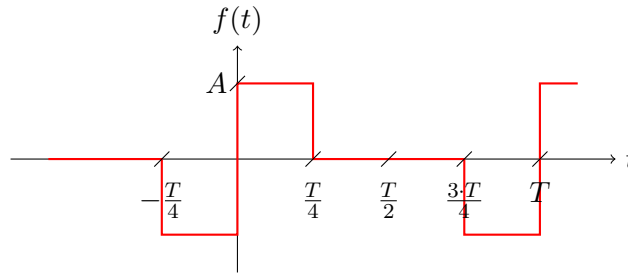


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy:



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 2. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku. Narysuj widmo amplitudowe i fazowe sygnału.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -A & t \in \left(-\frac{T}{4} + k \cdot T; 0 + k \cdot T\right) \\ A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{3T}{4} + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{C} \quad (2.37)$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (2.38)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot t \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 + A \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \left(0 - \left(-\frac{T}{4} \right) \right) + A \cdot \left(\frac{T}{4} - 0 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \frac{T}{4} + A \cdot \frac{T}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{T} (0) = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi 0.

Współczynniki F_k wyznaczamy ze wzoru:

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (2.40)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^0 -A \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{4}} A \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = -j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \left(-A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} + A \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(-\frac{A}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^0 e^z \cdot dz + \frac{A}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} e^z \cdot dz \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(e^z \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 - e^z \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_{-\frac{T}{4}}^0 - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(\left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} - e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}} \right) - \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(\left(e^0 - e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{4}} \right) - \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{4}} - e^0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(\left(1 - e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} \right) - \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(1 - e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} + 1 \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot \left(2 - \left(e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} + e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} + e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}}}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \frac{e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} + e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}}}{2} \right) = \\
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= \frac{A}{j \cdot k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right) = \\
&= -j \cdot \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(1 - \cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right) = \\
&= j \cdot \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) - 1 \right)
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $j \cdot \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot (\cos(k \cdot \frac{\pi}{2}) - 1)$.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$F_0 = 0$$

$$F_k = j \cdot \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) - 1 \right) \quad (2.41)$$

Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

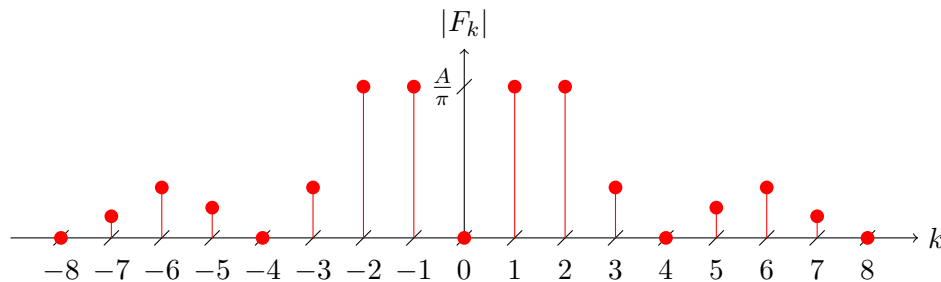
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}$$

$$f(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left[j \cdot \frac{A}{k \cdot \pi} \cdot \left(\cos \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) - 1 \right) \right] \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad (2.42)$$

Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

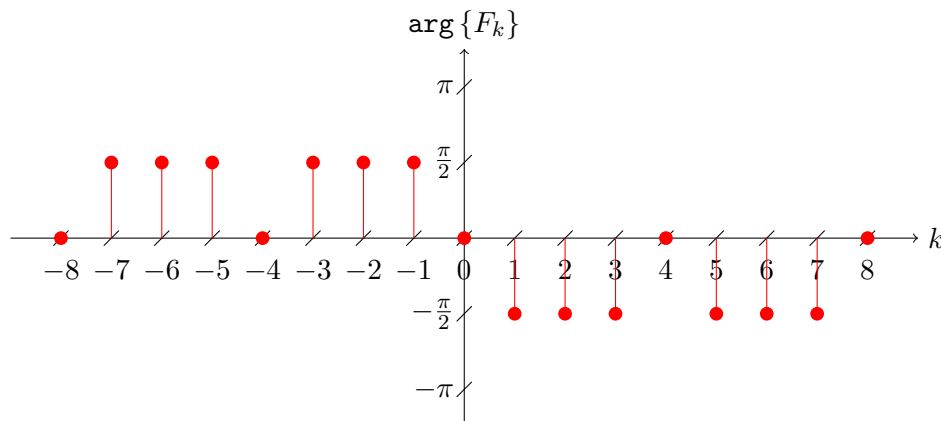
k	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
F_k	$j \cdot \frac{A}{3\pi}$	$j \cdot \frac{A}{5\pi}$	0	$j \cdot \frac{A}{3\pi}$	$j \cdot \frac{A}{\pi}$	$j \cdot \frac{A}{\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{\pi}$	$-j \cdot \frac{A}{\pi}$	$-j \cdot \frac{A}{3\pi}$	0	$-j \cdot \frac{A}{5\pi}$	$-j \cdot \frac{A}{3\pi}$
$ F_k $	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{5\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	0	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{5\pi}$	$\frac{A}{3\pi}$
$\text{Arg}\{F_k\}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$

Na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo amplitudowe $|F_k|$ sygnału $f(t)$.



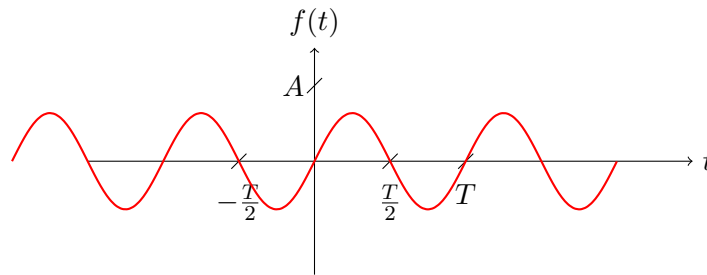
Widmo amplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Podobnie na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo fazowe $\arg\{F_k\}$ sygnału $f(t)$.

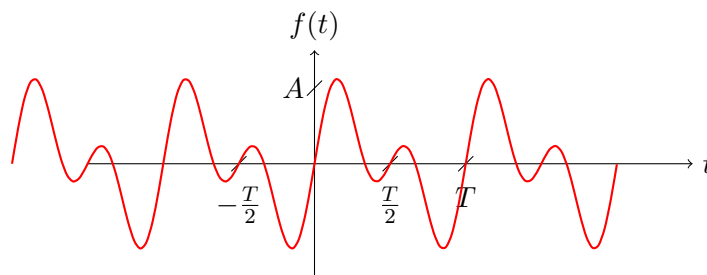


Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

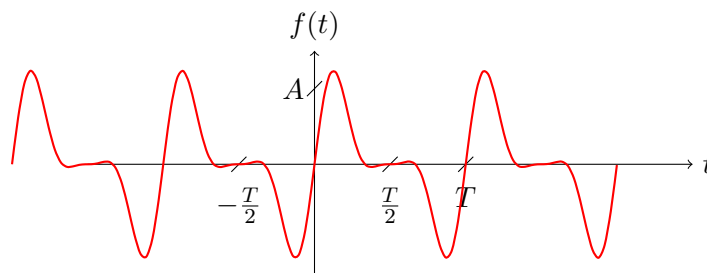
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



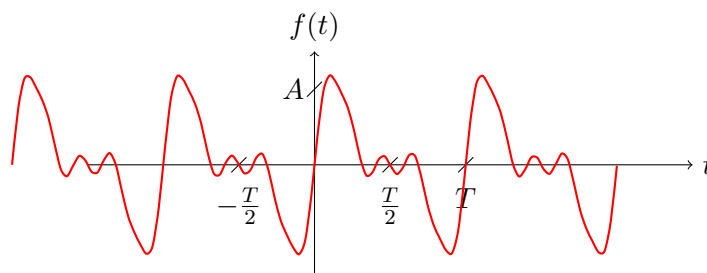
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy:



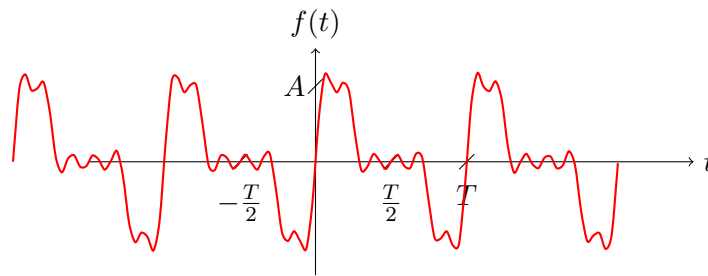
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy:



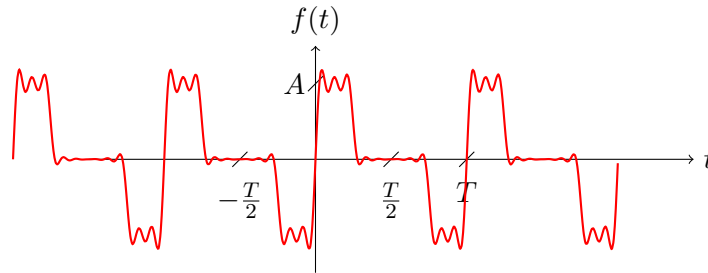
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy:



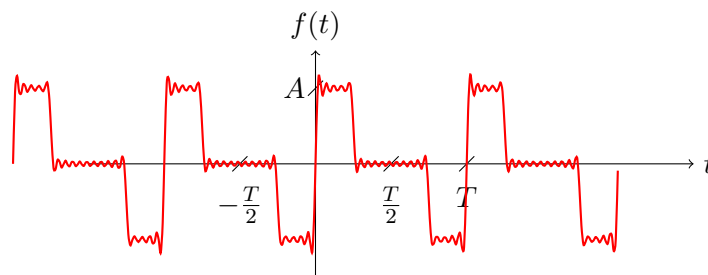
W przypadku sumowania od $k_{min} = -6$ do $k_{max} = 6$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy:

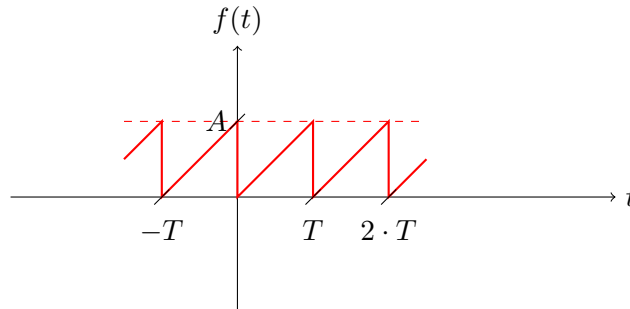


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy:



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 3. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku. Narysuj widmo amplitudowe i fazowe sygnału.



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa. W pierwszym okresie możemy ją opisać ogólnym równaniem prostej:

$$f(t) = a \cdot t + b \quad (2.43)$$

W pierwszym okresie wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (T, A) . Możemy więc napisać układ równań rozwiązać go i znaleźć nie znane parametry a i b .

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ A = a \cdot T + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = b \\ \frac{A}{T} = a \end{cases}$$

A więc funkcję przedstawioną na rysunku, w pierwszym okresie można opisać wzorem:

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot t$$

I ogólniej całą funkcję można wyrazić następującym wzorem

$$f(t) = \frac{A}{T} \cdot (t - k \cdot T) \quad t \in (0 + k \cdot T; T + k \cdot T) \wedge k \in \mathbb{Z}$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (2.44)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T^2} \int_0^T t \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \Big|_0^T = \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (T^2 - 0^2) = \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot T^2 = \\
&= \frac{A}{2}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{2}$.

Współczynniki F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (2.45)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1 \cdot A}{T^2} \int_0^T t \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} u &= t \\ dv &= e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \end{array} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} du &= dt \\ v &= \frac{T}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \left(t \cdot \frac{T}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^T - \int_0^T \frac{T}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \left(\left(T \cdot \frac{T}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T} - 0 \cdot \frac{T}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} \right) + \frac{T^2}{(-j \cdot k \cdot 2\pi)^2} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^T \right) = \\
&= \frac{A}{T^2} \cdot \left(\frac{T^2}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T} + \frac{T^2}{-(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0}) \right) = \\
&= A \cdot \left(\frac{1}{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot 2\pi} - \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (e^{-j \cdot k \cdot 2\pi} - e^0) \right) = \\
&= A \cdot \left(\frac{1}{-j \cdot k \cdot 2\pi} - \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot (1 - 1) \right) = \\
&= A \cdot \left(\frac{1}{-j \cdot k \cdot 2\pi} - \frac{1}{(k \cdot 2\pi)^2} \cdot 0 \right) = \\
&= A \cdot \left(\frac{1}{-j \cdot k \cdot 2\pi} - 0 \right) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{A}{-j \cdot k \cdot 2\pi} =$$

$$= j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi}$.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$F_0 = \frac{A}{2}$$

$$F_k = j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi}$$

Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcje $f(t)$ możemy wyrazić jako

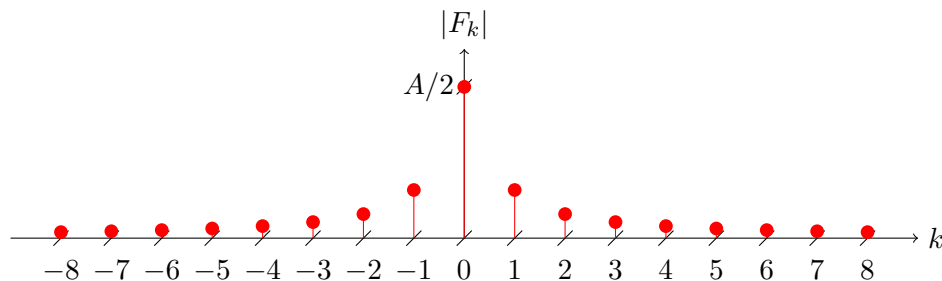
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}$$

$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left[j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \right] \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad (2.46)$$

Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

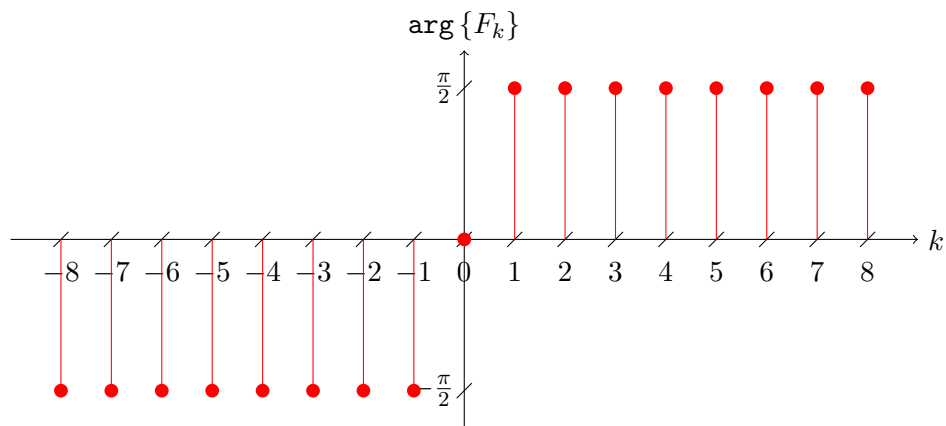
k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$-j \cdot \frac{A}{10 \cdot \pi}$	$-j \cdot \frac{A}{8 \cdot \pi}$	$-j \cdot \frac{A}{6 \cdot \pi}$	$-j \cdot \frac{A}{4 \cdot \pi}$	$-j \cdot \frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2}$	$j \cdot \frac{A}{2 \cdot \pi}$	$j \cdot \frac{A}{4 \cdot \pi}$	$j \cdot \frac{A}{6 \cdot \pi}$	$j \cdot \frac{A}{8 \cdot \pi}$	$j \cdot \frac{A}{10 \cdot \pi}$
$ F_k $	$\frac{A}{10 \cdot \pi}$	$\frac{A}{8 \cdot \pi}$	$\frac{A}{6 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{2 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4 \cdot \pi}$	$\frac{A}{6 \cdot \pi}$	$\frac{A}{8 \cdot \pi}$	$\frac{A}{10 \cdot \pi}$
$Arg(F_k)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

Na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo amplitudowe $|F_k|$ sygnału $f(t)$.



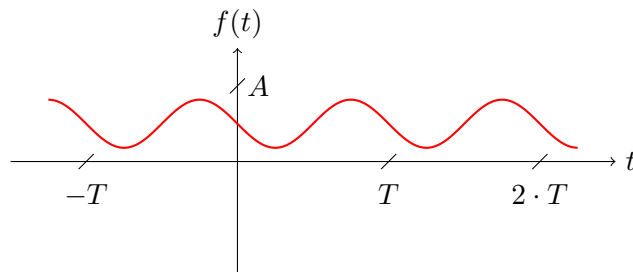
Widmo amplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Podobnie na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo fazowe $\arg\{F_k\}$ sygnału $f(t)$.

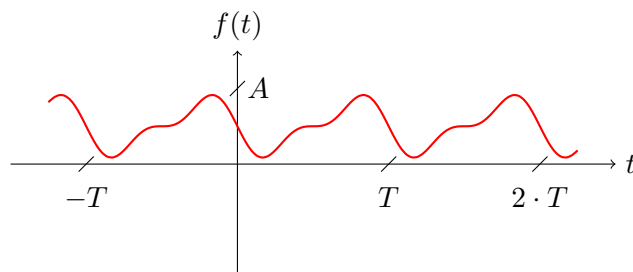


Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

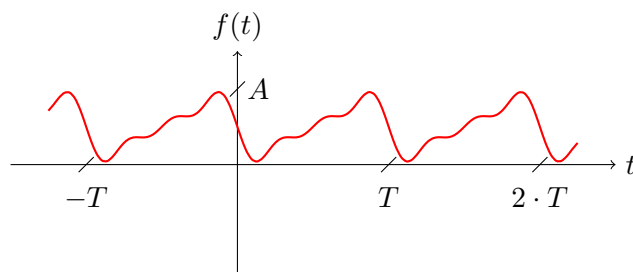
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



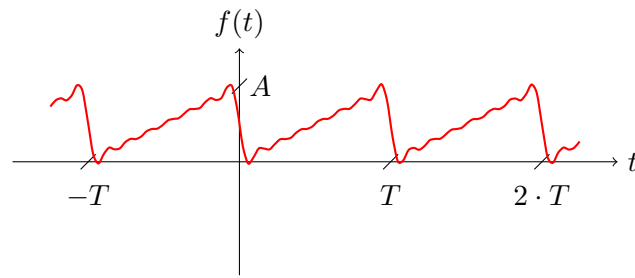
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy:



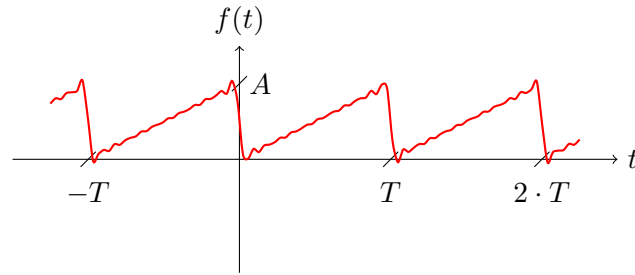
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania od $k_{min} = -7$ do $k_{max} = 7$ otrzymujemy:

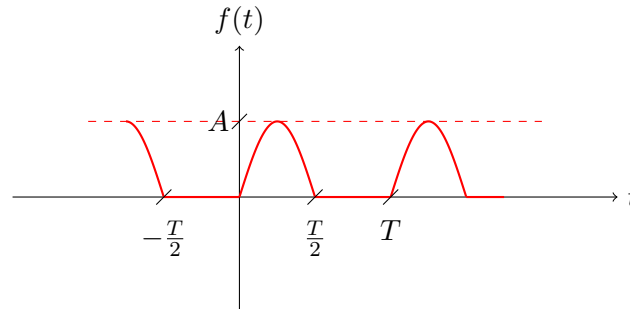


W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy:



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 4. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku. Narysuj widmo amplitudowe i fazowe sygnału.



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa, którą możemy opisać w następujący sposób:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (2.47)$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (2.48)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{A}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{\frac{2\pi}{T}} = \\ &= \frac{A}{T \cdot \frac{2\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(z) \cdot dz = \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(-\cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (\cos(\pi) - \cos(0)) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-1 - 1) = \\
&= -\frac{A}{2\pi} \cdot (-2) = \\
&= \frac{A}{\pi}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi $\frac{A}{\pi}$.

Współczynniki F_k wyznaczamy ze wzoru

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (2.49)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-k)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+k)} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{aligned} z_1 &= j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t & z_2 &= -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t \\ dz_1 &= j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt & dz_2 &= -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt \\ dt &= \frac{dz_1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} & dt &= \frac{dz_2}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \end{aligned} \right\} = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot \frac{dz_1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot \frac{dz_2}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{1}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{T \cdot 2j \cdot j \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{1+k} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot e^{z_1} \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{1+k} \cdot e^{z_2} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{1+k} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot 0} \right) + \frac{1}{1+k} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{1-k} \cdot \left(e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - e^0 \right) + \frac{1}{1+k} \cdot \left(e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - e^0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1+k}{(1-k) \cdot (1+k)} \cdot \left(e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 \right) + \frac{1-k}{(1-k) \cdot (1+k)} \cdot \left(e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(1+k) \cdot \left(e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 \right)}{(1-k) \cdot (1+k)} + \frac{(1-k) \cdot \left(e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(1+k) \cdot \left(e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 \right) + (1-k) \cdot \left(e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - 1 + k \cdot e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - k + e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 - k \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} + k}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - 2 + k \cdot e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} + e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - k \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)}}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 2 + k \cdot e^{j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} + e^{-j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - k \cdot e^{-j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k}}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-1 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 2 + k \cdot (-1) \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 1 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - k \cdot (-1) \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k}}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 2 - k \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - e^{-j \cdot \pi \cdot k} + k \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k}}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-2 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} - 2}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{2 \cdot e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 2}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{4 \cdot \pi} \cdot 2 \cdot \left(\frac{e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{e^{-j \cdot \pi \cdot k} + 1}{1 - k^2} \right) \\
&= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right)
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right)$ dla $k \neq 1 \wedge k \neq -1$.

Współczynnik F_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji F_1 :

$$F_1 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^0 \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt - \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(t \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot 2\pi} - e^0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{2} + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \frac{T}{2} = \\
&= \frac{A}{4j} = \\
&= -j \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_1 wynosi $-j \cdot \frac{A}{4}$.

Współczynnik F_k dla $k = -1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji F_{-1} :

$$\begin{aligned}
F_{-1} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{A}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} e^0 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{aligned} z &= j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz &= j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \frac{dz}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \end{aligned} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz - \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} - t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) - \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot 2\pi} - e^0 \right) - \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) - \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 - \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(0 - \frac{T}{2} \right) = \\
&= -\frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \frac{T}{2} = \\
&= -\frac{A}{4j} = \\
&= j \cdot \frac{A}{4}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_{-1} wynosi $j \cdot \frac{A}{4}$.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A}{\pi} \\
F_{-1} &= j \cdot \frac{A}{4} \\
F_1 &= -j \cdot \frac{A}{4} \\
F_k &= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right)
\end{aligned}$$

Podstawiając to wzoru aproksymacyjnego funkcję $f(t)$ możemy wyrazić jako

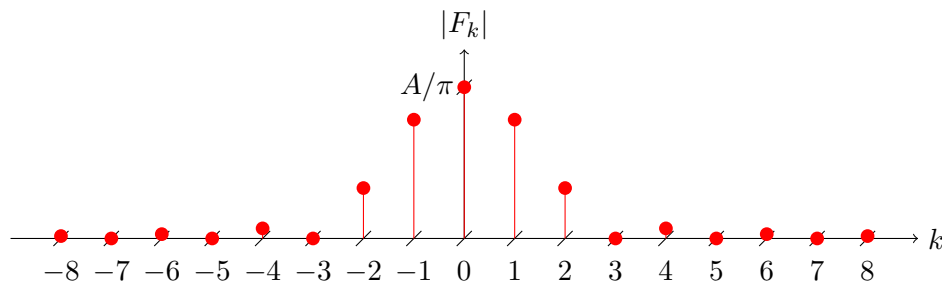
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}$$

$$f(t) = \frac{A}{\pi} + j \cdot \frac{A}{4} \cdot e^{j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - j \cdot \frac{A}{4} \cdot e^{j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0 \\ k \neq -1 \wedge k \neq 1}}^{\infty} \left[\frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right) \right] \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad (2.50)$$

Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k

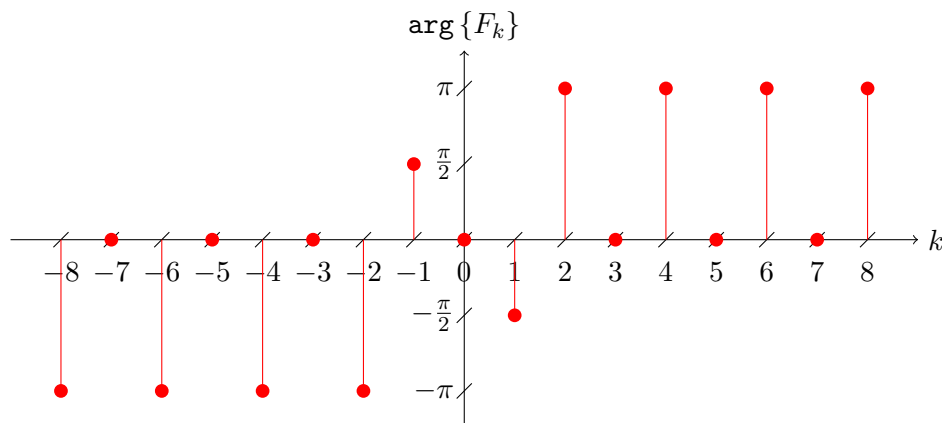
F_k	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
F_k	$-\frac{A}{35\pi}$	0	$-\frac{A}{15\pi}$	0	$-\frac{A}{3\pi}$	$j \cdot \frac{A}{4}$	$\frac{A}{\pi}$	$-j \cdot \frac{A}{4}$	$-\frac{A}{3\pi}$	0	$-\frac{A}{15\pi}$	0	$-\frac{A}{35\pi}$
$ F_k $	$\frac{A}{35\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{3\pi}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{\pi}$	$\frac{A}{4}$	$\frac{A}{3\pi}$	0	$\frac{A}{15\pi}$	0	$\frac{A}{35\pi}$
$Arg\{F_k\}$	$-\pi$	0	$-\pi$	0	$-\pi$	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	π	0	π	0	π

Na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo amplitudowe $|F_k|$ sygnału $f(t)$.



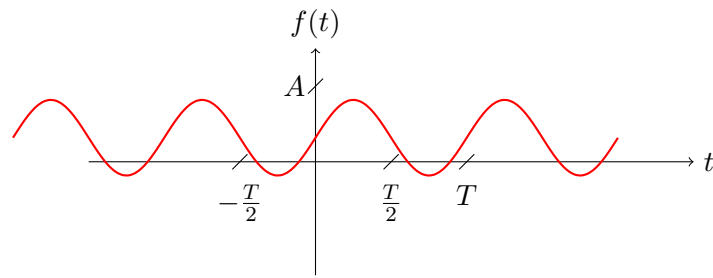
Widmo amplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Podobnie na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo fazowe $\arg\{F_k\}$ sygnału $f(t)$.

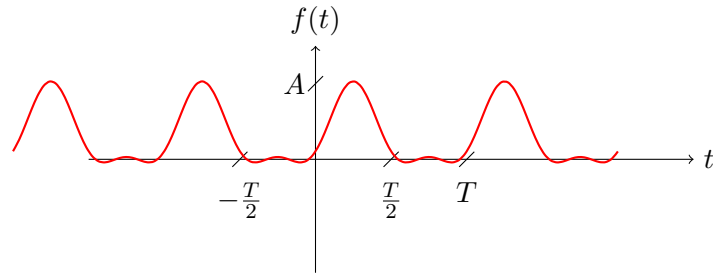


Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

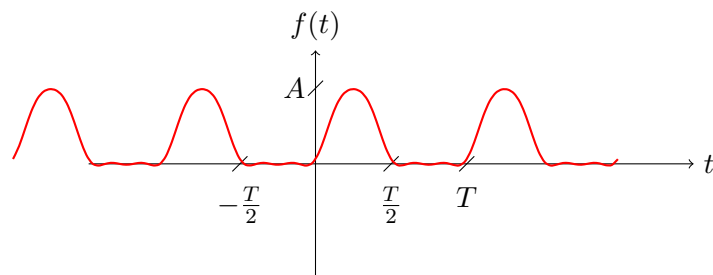
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



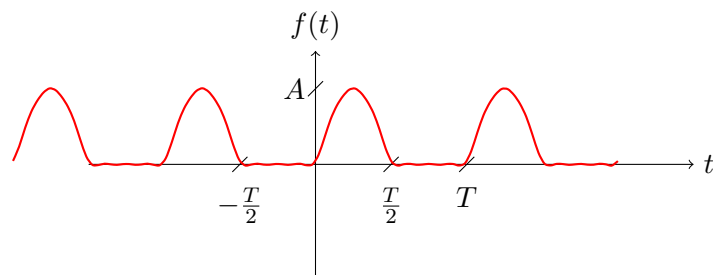
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy:



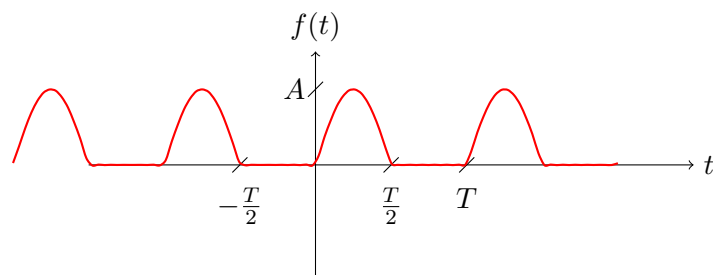
W przypadku sumowania od $k_{min} = -4$ do $k_{max} = 4$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania od $k_{min} = -6$ do $k_{max} = 6$ otrzymujemy:

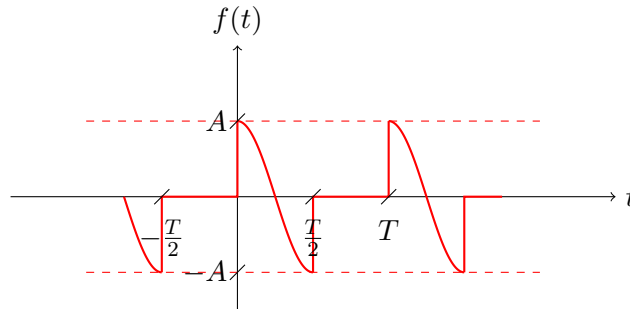


W przypadku sumowania od $k_{min} = -12$ do $k_{max} = 12$ otrzymujemy:



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 5. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku. Narysuj widmo amplitudowe i fazowe sygnału.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (2.51)$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (2.52)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{1}{\frac{2\pi}{T}} \cdot dz \\ dt = \frac{T}{2\pi} \cdot dz \end{array} \right\} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot dz = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot dz = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \sin(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{2\pi} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2\pi} \cdot (\sin(\pi) - \sin(0)) = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot (0 - 0) = \\
&= \frac{A}{2\pi} \cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi 0.

Współczynniki F_k wyznaczamy ze wzoru:

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (2.53)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z_1 = j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t & z_2 = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t \\ dz_1 = j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt & dz_2 = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt \\ dt = \frac{1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot dz_1 & dt = \frac{1}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot dz_2 \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot \frac{1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot dz_1 + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot \frac{1}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{j \cdot 2\pi \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{T}{j \cdot 2\pi \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \frac{T}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{1}{(1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot e^{z_1} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{(1+k)} \cdot e^{z_2} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{(1+k)} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot 0} \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - e^0 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(-1 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(-1 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(- \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(- \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{\left(-e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \cdot (1+k)}{(1-k) \cdot (1+k)} - \frac{\left(-e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \cdot (1-k)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{- \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 - k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - k}{(1-k) \cdot (1+k)} - \frac{- \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 + k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} + k}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{- \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 - k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - k + e^{-j \cdot k \cdot \pi} + 1 - k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - k}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{-2 \cdot k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 2 \cdot k}{1 - k^2} \right) = \\
&= -\frac{A \cdot k}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{e^{-j \cdot k \cdot \pi} + 1}{1 - k^2} \right) \\
&= j \cdot \frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right)
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $j \cdot \frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right)$.

Współczynnik F_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji F_1 :

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot (1-1) \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot (1+1) \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot 2 \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^0 \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(t \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j 2\pi} - e^0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \frac{T}{2} = \\
&= \frac{A}{4}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_1 wynosi $\frac{A}{4}$.

Współczynnik F_k dla $k = -1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji F_{-1} :

$$F_{-1} = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+1) \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (-1+1) \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 2 \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^0 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz + \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz + \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} + t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) + \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{j \cdot 2\pi} - e^0 \right) + \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) + \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 + \frac{T}{2} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \left(0 + \frac{T}{2}\right) = \\
&= \frac{A}{2 \cdot T} \cdot \frac{T}{2} = \\
&= \frac{A}{4}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_{-1} wynosi $\frac{A}{4}$.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$\begin{aligned}
F_0 &= 0 \\
F_1 &= \frac{A}{4} \\
F_{-1} &= \frac{A}{4} \\
F_k &= j \cdot \frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right)
\end{aligned}$$

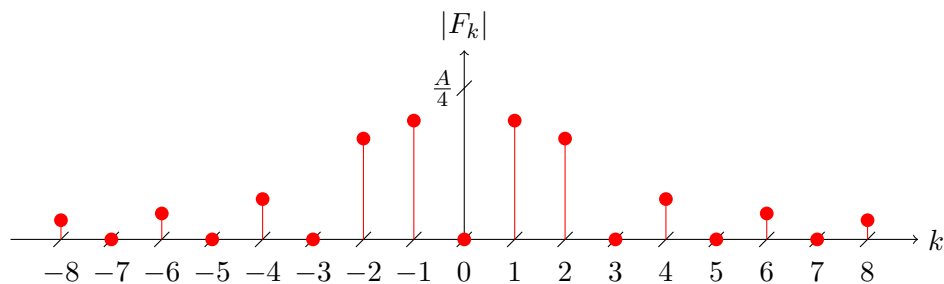
Podstawiając wyznaczone współczynniki do wzoru aproksymacyjnego, funkcję $f(t)$ możemy wyrazić jako:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \\
f(t) &= \frac{A}{4} \cdot e^{j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + \frac{A}{4} \cdot e^{j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0 \\ k \neq -1 \wedge k \neq 1}}^{\infty} \left[j \cdot \frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right) \right] \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \\
f(t) &= \frac{A}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0 \\ k \neq -1 \wedge k \neq 1}}^{\infty} \left[j \cdot \frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right) \right] \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k :

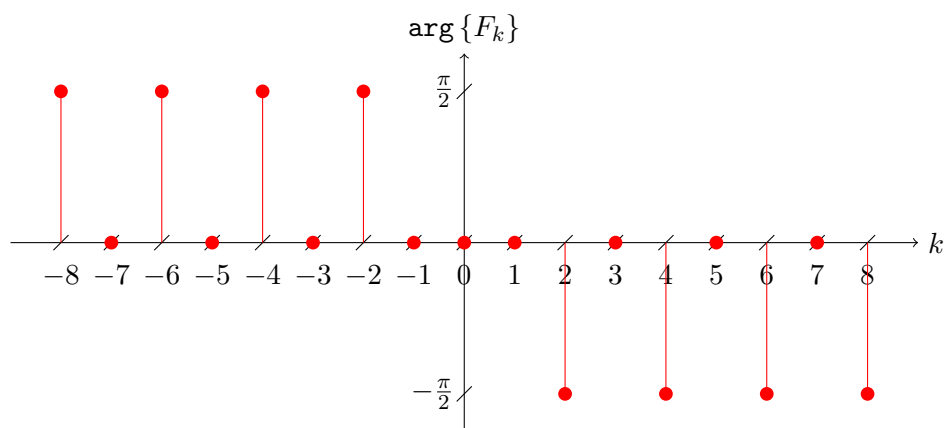
k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	0	$j \cdot \frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0	$j \cdot \frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4}$	0	$\frac{A}{4}$	$-j \cdot \frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$-j \cdot \frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0
$ F_k $	0	$\frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4}$	0	$\frac{A}{4}$	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0
$Arg\{F_k\}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	0	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0

Na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo amplitudowe $|F_k|$ sygnału $f(t)$.



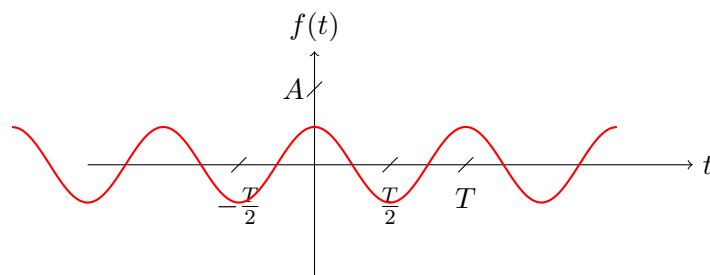
Widmo amplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Podobnie na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo fazowe $\arg\{F_k\}$ sygnału $f(t)$.

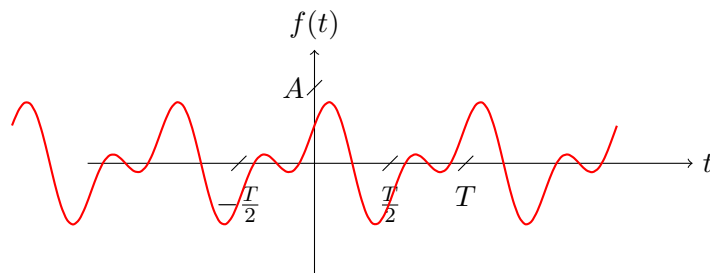


Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

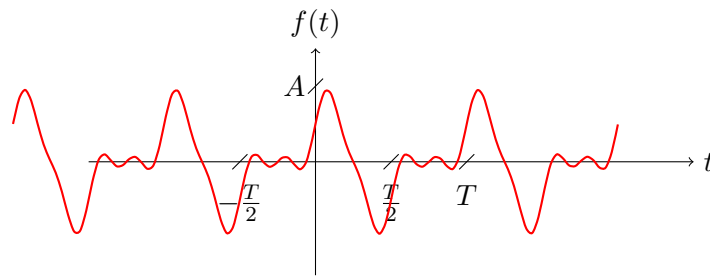
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



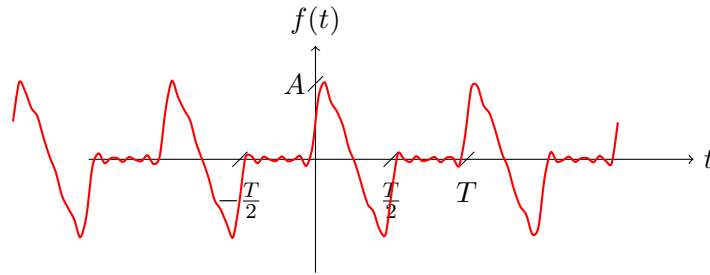
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy:



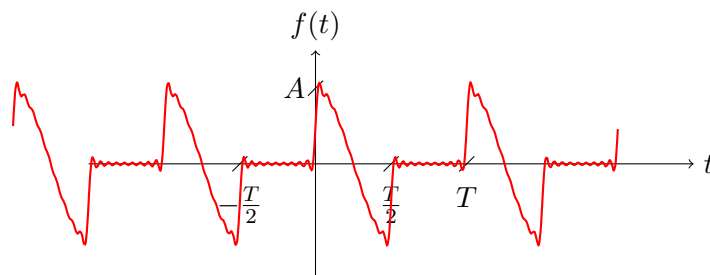
W przypadku sumowania od $k_{min} = -4$ do $k_{max} = 4$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania od $k_{min} = -10$ do $k_{max} = 10$ otrzymujemy:

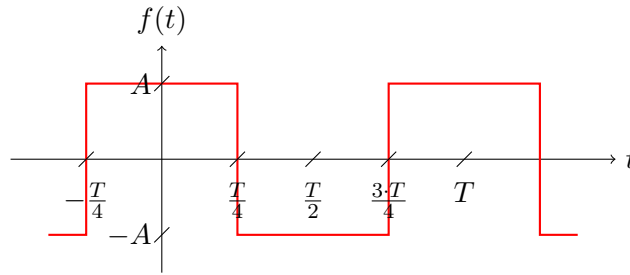


W przypadku sumowania od $k_{min} = -20$ do $k_{max} = 20$ otrzymujemy:



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 6. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku. Narysuj widmo amplitudowe i fazowe sygnału.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A & t \in \left(-\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ -A & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{3T}{4} + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{C} \quad (2.55)$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (2.56)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} A \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} (-A) \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} dt - A \cdot \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} dt \right) = \\ &= \frac{A}{T} \left(t \Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} - t \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left[\left(\frac{T}{4} - \left(-\frac{T}{4} \right) \right) - \left(\frac{3 \cdot T}{4} - \frac{T}{4} \right) \right] = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left[\frac{T}{4} + \frac{T}{4} - \frac{3 \cdot T}{4} + \frac{T}{4} \right] = \\ &= \frac{A}{T} \cdot [0] = \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi 0.

Współczynniki F_k wyznaczamy ze wzoru:

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (2.58)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} A \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} (-A) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left(A \cdot \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - A \cdot \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{A}{T} \left(\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = -j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A}{T} \left[\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \right] = \\
&= \frac{-A}{T \cdot j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T}} \left[\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} e^z \cdot dz - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} e^z \cdot dz \right] = \\
&= \frac{-A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left[e^z \Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} - e^z \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} \right] = \\
&= \frac{-A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left[e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3 \cdot T}{4}} \right] = \\
&= \frac{-A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (-\frac{T}{4})} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3 \cdot T}{4}} + e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}} \right) = \\
&= \frac{-A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} - e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{3\pi}{2}} + e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} \right) = \\
&= \left\{ e^{-j \cdot k \cdot \frac{3\pi}{2}} = e^{-j \cdot k \cdot (2\pi - \frac{\pi}{2})} = e^{-j \cdot k \cdot 2\pi} \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} = 1 \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} = e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} \right\} = \\
&= \frac{-A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left(e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} - e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} - e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} + e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} \right) = \\
&= \frac{-A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left(2 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} - 2 \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} \right) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{j \cdot k \cdot 2\pi} \left(e^{j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} - e^{-j \cdot k \cdot \frac{\pi}{2}} \right) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{k \cdot \pi} \left(\sin \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $\frac{2 \cdot A}{k \cdot \pi} (\sin(k \cdot \frac{\pi}{2}))$.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości:

$$\begin{aligned}
F_0 &= 0 \\
F_k &= \frac{2 \cdot A}{k \cdot \pi} \left(\sin \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

Podstawiając wyznaczone współczynniki do wzoru aproksymacyjnego, funkcję $f(t)$ możemy wyrazić jako:

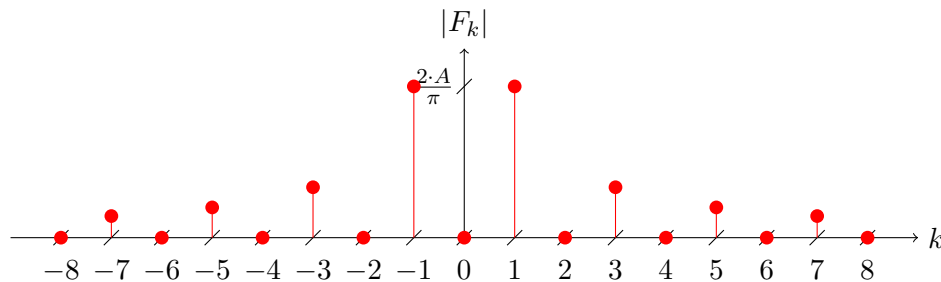
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}$$

$$f(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left[\frac{2 \cdot A}{k \cdot \pi} \left(\sin \left(k \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right) \right] \cdot e^{j k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad (2.59)$$

Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k :

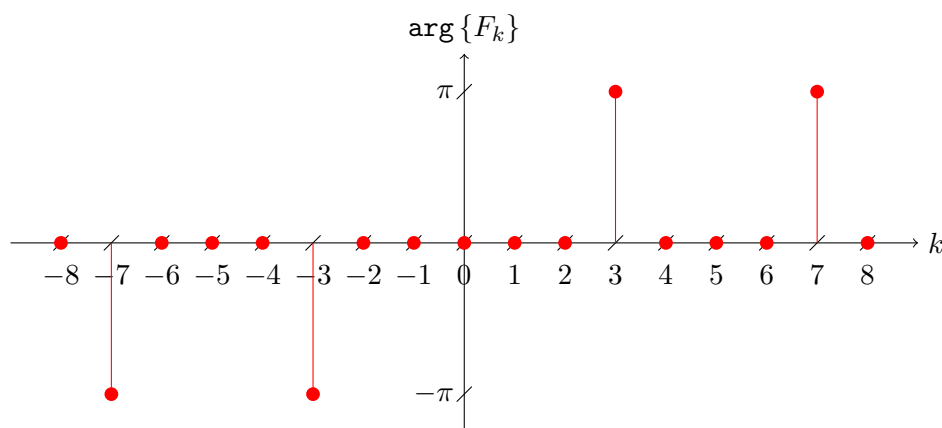
k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	$\frac{2 \cdot A}{5 \cdot \pi}$	0	$-\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{\pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{\pi}$	0	$-\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{5 \cdot \pi}$
$ F_k $	$\frac{2 \cdot A}{5 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{\pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{\pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{5 \cdot \pi}$
$\text{Arg}\{F_k\}$	0	0	$-\pi$	0	0	0	0	0	π	0	0

Na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo amplitudowe $|F_k|$ sygnału $f(t)$.



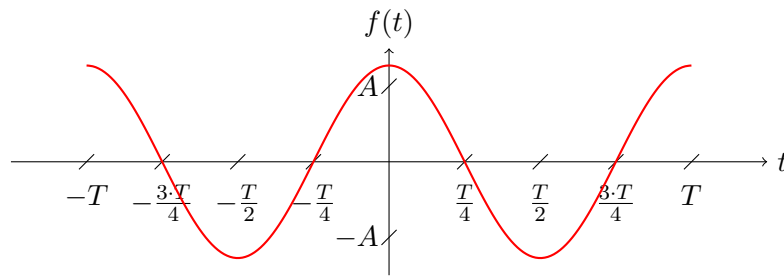
Widmo amplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Podobnie na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo fazowe $\arg\{F_k\}$ sygnału $f(t)$.

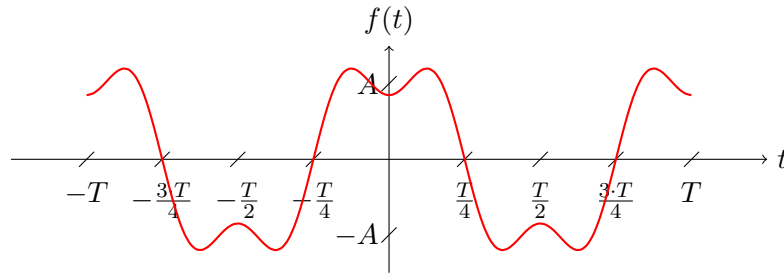


Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

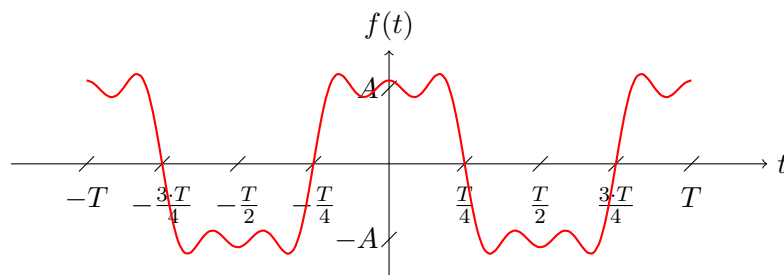
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



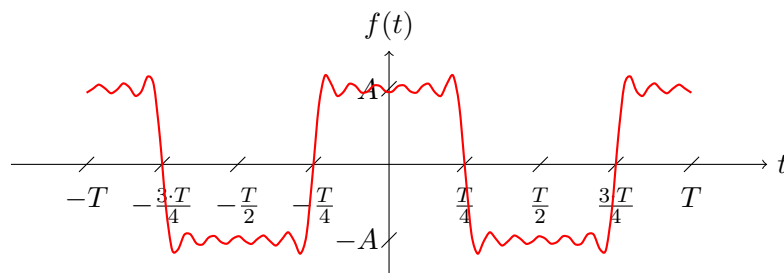
W przypadku sumowania od $k_{min} = -3$ do $k_{max} = 3$ otrzymujemy:



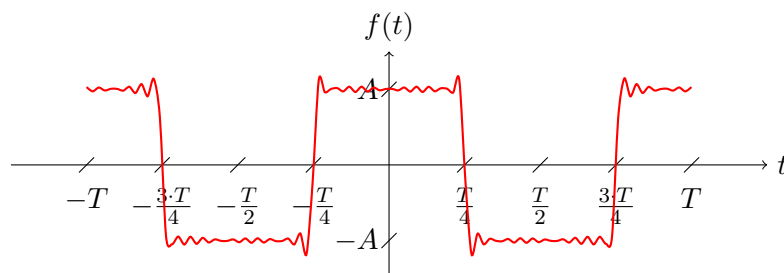
W przypadku sumowania od $k_{min} = -5$ do $k_{max} = 5$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania od $k_{min} = -11$ do $k_{max} = 11$ otrzymujemy:

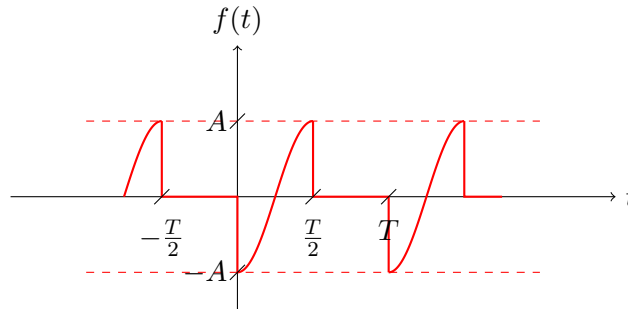


W przypadku sumowania od $k_{min} = -21$ do $k_{max} = 21$ otrzymujemy:



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 7. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku. Narysuj widmo amplitudowe i fazowe sygnału.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (2.60)$$

Współczynnik F_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt \quad (2.61)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} (-A) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left((-A) \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{-A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{1}{\frac{2\pi}{T}} \cdot dz \\ dt = \frac{T}{2\pi} \cdot dz \end{array} \right\} = \\ &= \frac{-A}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot dz = \\ &= \frac{-A}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(z) \cdot dz = \\ &= \frac{-A}{2\pi} \cdot \sin(z) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{-A}{2\pi} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{-A}{2\pi} \cdot \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-A}{2\pi} \cdot (\sin(\pi) - \sin(0)) = \\
&= \frac{-A}{2\pi} \cdot (0 - 0) = \\
&= \frac{-A}{2\pi} \cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_0 wynosi 0.

Współczynniki F_k wyznaczamy ze wzoru:

$$F_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (2.62)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
F_k &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} (-A) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left((-A) \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \left((-A) \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z_1 = j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t & z_2 = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t \\ dz_1 = j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot dt & dz_2 = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot dt \\ dt = \frac{1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot dz_1 & dt = \frac{1}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot dz_2 \end{array} \right\} = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot \frac{1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot dz_1 + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot \frac{1}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{j \cdot 2\pi \cdot (1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{T}{j \cdot 2\pi \cdot (1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \frac{T}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{1}{(1+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot e^{z_1} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{(1+k)} \cdot e^{z_2} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{-A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{(1+k)} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{-A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-k) \cdot 0} \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+k) \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{-A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{j \cdot \pi \cdot (1-k)} - e^0 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-j \cdot \pi \cdot (1+k)} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{-A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(e^{j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(e^{-j \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{-A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(-1 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(-1 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{-A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(1-k)} \cdot \left(-e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) - \frac{1}{(1+k)} \cdot \left(-e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{-A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{\left(-e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \cdot (1+k)}{(1-k) \cdot (1+k)} - \frac{\left(-e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 \right) \cdot (1-k)}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{-A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{-e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 - k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - k}{(1-k) \cdot (1+k)} - \frac{-e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 + k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} + k}{(1-k) \cdot (1+k)} \right) = \\
&= \frac{-A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{-e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 1 - k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - k + e^{-j \cdot k \cdot \pi} + 1 - k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - k}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{-A}{j \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{-2 \cdot k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - 2 \cdot k}{1 - k^2} \right) = \\
&= \frac{A \cdot k}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(\frac{e^{-j \cdot k \cdot \pi} + 1}{1 - k^2} \right) \\
&= -j \cdot \frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right)
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_k wynosi $-j \cdot \frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right)$.

Współczynnik F_k dla $k = 1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji F_1 :

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} (-A) \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left((-A) \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \left((-A) \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1-1) \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (1+1) \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 2 \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^0 \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz \end{array} \right\} = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(t \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} - 0 \right) - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot 2\pi} - e^0 \right) \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \frac{T}{2} = \\
&= \frac{-A}{4}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_1 wynosi $\frac{-A}{4}$.

Współczynnik F_k dla $k = -1$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji F_{-1} :

$$F_{-1} = \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} (-A) \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{-j(-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot e^{-j(-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left((-A) \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \left((-A) \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2} \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t + j \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot (1+1) \cdot t} + e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot (-1+1) \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot 2 \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^0 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz \end{array} \right\} = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot dz + \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz + \int_0^{\frac{T}{2}} dt \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} + t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \left(\frac{T}{2} - 0 \right) \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) + \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{j 2\pi} - e^0 \right) + \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) + \frac{T}{2} \right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 + \frac{T}{2} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \left(0 + \frac{T}{2}\right) = \\
&= \frac{-A}{2 \cdot T} \cdot \frac{T}{2} = \\
&= \frac{-A}{4}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_{-1} wynosi $\frac{-A}{4}$.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$\begin{aligned}
F_0 &= 0 \\
F_1 &= \frac{-A}{4} \\
F_{-1} &= \frac{-A}{4} \\
F_k &= -j \cdot \frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right)
\end{aligned}$$

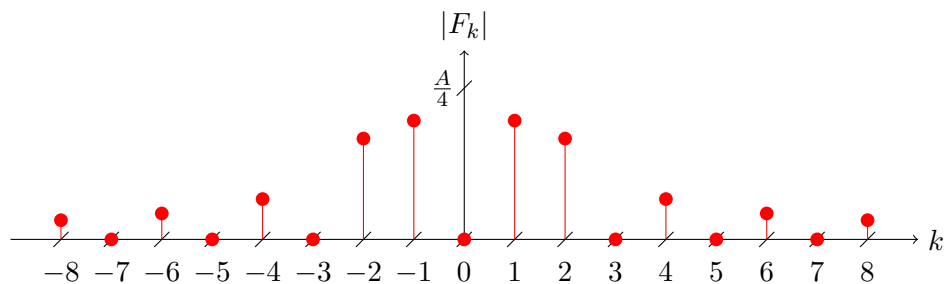
Podstawiając wyznaczone współczynniki do wzoru aproksymacyjnego, funkcję $f(t)$ możemy wyrazić jako:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \\
f(t) &= -\frac{A}{4} \cdot e^{j \cdot (-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - \frac{A}{4} \cdot e^{j \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0 \\ k \neq -1 \wedge k \neq 1}}^{\infty} \left[-j \cdot \frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right) \right] \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \\
f(t) &= -\frac{A}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0 \\ k \neq -1 \wedge k \neq 1}}^{\infty} \left[-j \cdot \frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right) \right] \cdot e^{j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Możemy wyznaczyć kilka wartości współczynników F_k :

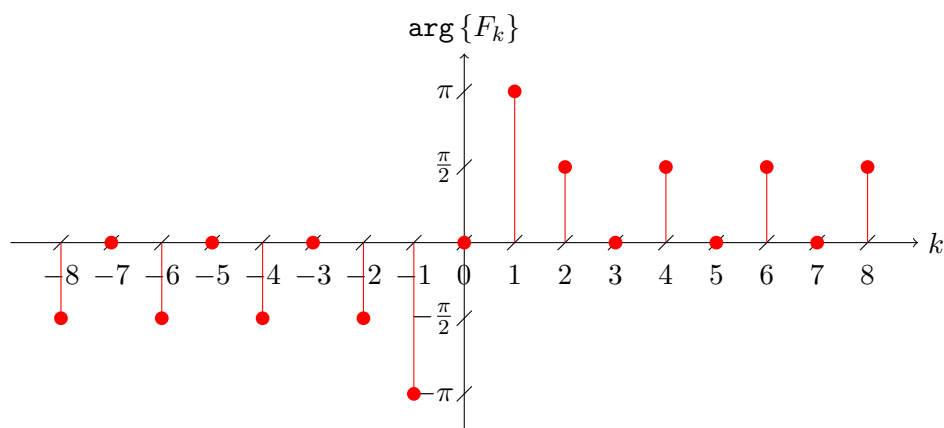
k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
F_k	0	$-j \cdot \frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0	$-j \cdot \frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	$\frac{-A}{4}$	0	$\frac{-A}{4}$	$j \cdot \frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$j \cdot \frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0
$ F_k $	0	$\frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	$\frac{A}{4}$	0	$\frac{A}{4}$	$\frac{2 \cdot A}{3 \cdot \pi}$	0	$\frac{4 \cdot A}{15 \cdot \pi}$	0
$Arg\{F_k\}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	0	π	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0

Na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo amplitudowe $|F_k|$ sygnału $f(t)$.



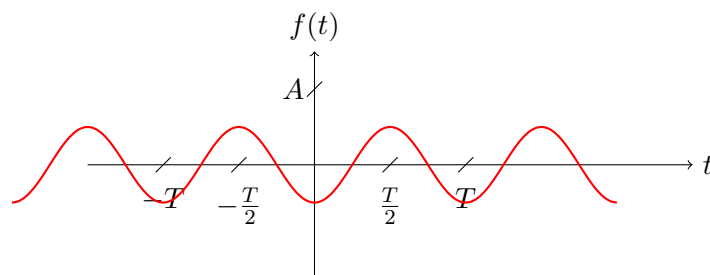
Widmo amplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Podobnie na podstawie wyznaczonych współczynników F_k możemy narysować widmo fazowe $\arg\{F_k\}$ sygnału $f(t)$.

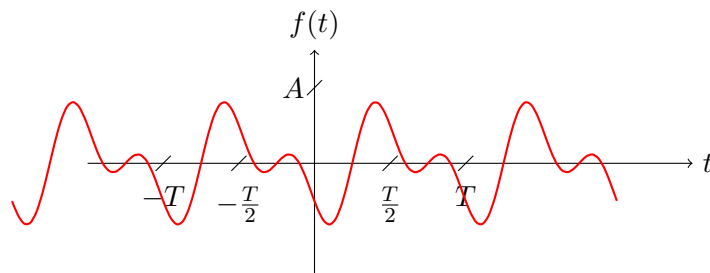


Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

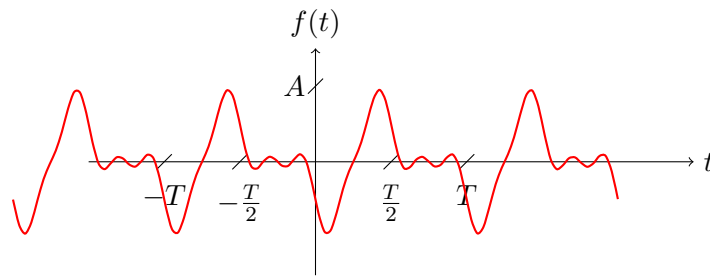
W przypadku sumowania od $k_{min} = -1$ do $k_{max} = 1$ otrzymujemy:



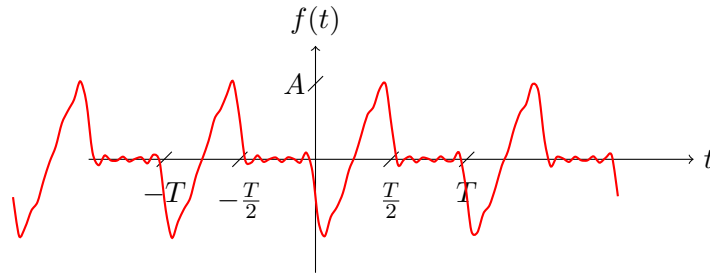
W przypadku sumowania od $k_{min} = -2$ do $k_{max} = 2$ otrzymujemy:



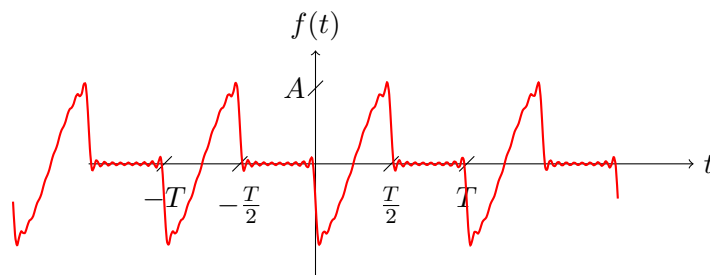
W przypadku sumowania od $k_{min} = -4$ do $k_{max} = 4$ otrzymujemy:



W przypadku sumowania od $k_{min} = -10$ do $k_{max} = 10$ otrzymujemy:

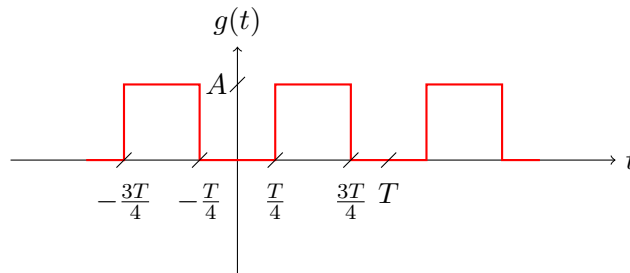


W przypadku sumowania od $k_{min} = -20$ do $k_{max} = 20$ otrzymujemy:



W granicy sumowania od $k_{min} = -\infty$ do $k_{max} = \infty$ otrzymujemy oryginalny sygnał.

Zadanie 8. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $g(t)$ przedstawionego na rysunku. Wykorzystaj własności szeregu Fouriera oraz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera wyznaczone w zadaniu 1



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$g(x) = \begin{cases} 0 & t \in (0 + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T) \\ A & t \in (\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{3T}{4} + k \cdot T) \wedge k \in \mathbb{Z} \\ 0 & t \in (\frac{3T}{4} + k \cdot T; T + k \cdot T) \end{cases} \quad (2.64)$$

Można zauważyć iż sygnał $g(t)$ jest przesuniętą o $\frac{1}{4}T$ w czasie wersją sygnału $f(t)$ z zadania 1

$$g(t) = f\left(t - \frac{T}{4}\right)$$

Współczynniki zespolonego szeregu Fouriera F_k dla sygnału $f(t)$ wyznaczone w zadaniu 1 wynoszą:

$$F_0 = \frac{A}{2}$$

$$F_k = j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot ((-1)^k - 1)$$

Korzystając z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie czasu można wyznaczyć współczynniki G_k na podstawie współczynników F_k sygnału $f(t)$ przesuniętego w czasie o t_0 jako:

$$g(t) = f(t - t_0)$$

$$G_k = F_k \cdot e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t_0}$$

Wstawiając wartości współczynników F_k otrzymujemy:

$$\begin{aligned} G_k &= F_k \cdot e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t_0} = \\ &= \left\{ t_0 = \frac{T}{4} \right\} = \\ &= j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot ((-1)^k - 1) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot \frac{T}{4}} \\ &= j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot ((-1)^k - 1) \cdot e^{-j \pi \cdot k \cdot \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= j \cdot \frac{A \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{2} \cdot k}}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1 \right)$$

Podobnie dla G_0 podstawiając F_0 otrzymujemy

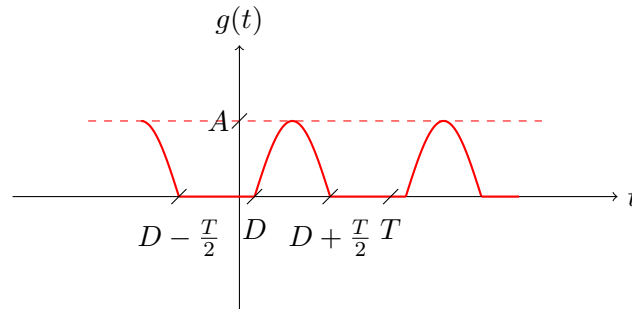
$$\begin{aligned} G_0 &= F_0 \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0 \cdot t_0} = \\ &= F_0 \cdot e^0 = \\ &= F_0 \cdot 1 = \\ &= F_0 = \\ &= \frac{A}{2} \end{aligned}$$

Wartość współczynnika dla $k = 0$ nie ulega zmianie w wyniku przesunięcia sygnału w czasie $G_0 = F_0$. Warto zauważyć iż wartość współczynnika dla $k = 0$ jest utożsamiana z wartością średnią sygnału, a ta nie ulega zmianie w wyniku przesunięcia w dziedzinie czasu.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{A}{2} \\ G_k &= j \cdot \frac{A \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{2} \cdot k}}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1 \right) \end{aligned}$$

Zadanie 9. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $g(t)$ przedstawionego na rysunku. Wykorzystaj własności szeregu Fouriera oraz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera wyznaczone w zadaniu 4



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$g(t) = \begin{cases} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot (t - D)\right) & t \in \left(D + k \cdot T; D + \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(D + \frac{T}{2} + k \cdot T; D + T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{C} \quad (2.65)$$

Można zauważyć iż sygnał $g(t)$ jest przesuniętą w czasie wersją sygnału $f(t)$ z zadania 4

$$g(t) = f(t - D)$$

Współczynniki zespolonego szeregu Fouriera F_k dla sygnału $f(t)$ wyznaczone w zadaniu 4 wynoszą:

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{A}{\pi} \\ F_{-1} &= j \cdot \frac{A}{4} \\ F_1 &= -j \cdot \frac{A}{4} \\ F_k &= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right) \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie czasu można wyznaczyć współczynniki G_k na podstawie współczynników F_k sygnału $f(t)$ jako:

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t - t_0) \\ G_k &= F_k \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t_0} \end{aligned}$$

Wstawiając wartości współczynników F_k otrzymujemy

$$G_k = F_k \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t_0} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t_0} = \\
&= \left\{ t_0 = D \right\} = \\
&= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot D}
\end{aligned}$$

A więc współczynniki G_k dla sygnału $g(t)$ są równe $\frac{A}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot D}$, dla $k \neq 1 \wedge k \neq -1$. Oznacza to iż współczynnik dla $k = 1$ i $k = -1$ musimy wyznaczyć jeszcze raz analizując dokładnie co podstawiamy. Zaczniemy od wyznaczenia G_1

$$\begin{aligned}
G_1 &= F_1 \cdot e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot 1 \cdot t_0} = \\
&= -j \cdot \frac{A}{4} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot t_0} = \\
&= \left\{ t_0 = D \right\} = \\
&= -j \cdot \frac{A}{4} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot D}
\end{aligned}$$

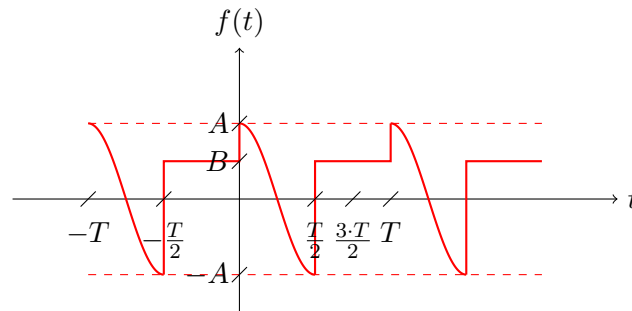
Podobnie wyznaczmy G_{-1} :

$$\begin{aligned}
G_{-1} &= F_{-1} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot (-1) \cdot t_0} = \\
&= j \cdot \frac{A}{4} \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot t_0} = \\
&= \left\{ t_0 = D \right\} = \\
&= j \cdot \frac{A}{4} \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot D}
\end{aligned}$$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$\begin{aligned}
G_0 &= \frac{A}{\pi} \\
G_{-1} &= j \cdot \frac{A}{4} \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot D} \\
G_1 &= -j \cdot \frac{A}{4} \cdot e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot D} \\
G_k &= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot D}
\end{aligned}$$

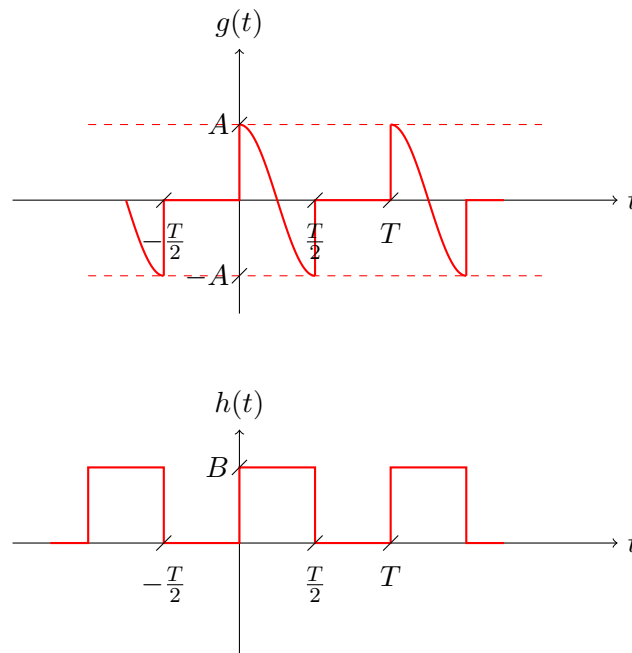
Zadanie 10. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku. Wykorzystaj wiedzę o liniowości szeregu Fouriera i o wpływie przesunięcia sygnału w czasie na współczynniki szeregu Fouriera.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(t) = \begin{cases} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ B & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (2.66)$$

Jeśli przyjrzeć się dokładniej sygnałowi $f(t)$, można zauważyć, że składa się on z sygnałów $g(t)$ i $h(t)$, dla których już wcześniej obliczyliśmy współczynniki zespolonego szeregu Fouriera.



Dokładnie rzecz ujmując, sygnał $f(t)$ jest sumą sygnałów: $g(t)$ i $h(t)$ przesuniętego w czasie o pół okresu ($\frac{T}{2}$):

$$f(t) = g(t) + h\left(t - \frac{T}{2}\right) \quad (2.67)$$

Wykorzystując wiedzę o liniowości szeregu Fouriera i o wpływie przesunięcia sygnału w czasie na współczynniki szeregu Fouriera możemy napisać, że:

$$F_k = G_k + H_k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}}$$

$$F_k = G_k + H_k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi}$$

$$F_k = G_k + H_k \cdot (-1)^k$$

Na podstawie wcześniej obliczonych zadań, współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla sygnałów $g(t)$ i $h(t)$ wynoszą odpowiednio:

$$G_0 = 0$$

$$G_1 = \frac{A}{4}$$

$$G_{-1} = \frac{A}{4}$$

$$G_k = j \cdot \frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right)$$

$$H_0 = \frac{B}{2}$$

$$H_k = j \cdot \frac{B}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1 \right)$$

Teraz możemy wyznaczyć współczynniki dla sygnału $f(t)$:

$$\begin{aligned} F_k &= G_k + H_k \cdot (-1)^k = \\ &= j \cdot \frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right) + j \cdot \frac{B}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1 \right) \cdot (-1)^k = \\ &= j \cdot \left[\frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right) + \frac{B}{k \cdot 2\pi} \cdot \left(1 - (-1)^k \right) \right] \end{aligned}$$

Podobnie dla współczynnika F_0 :

$$\begin{aligned} F_0 &= G_0 + H_0 \cdot (-1)^0 = \\ &= 0 + \frac{B}{2} \cdot 1 = \\ &= \frac{B}{2} \end{aligned}$$

Podobnie dla współczynników F_1 i F_{-1} :

$$\begin{aligned}
 F_1 &= G_1 + H_1 \cdot (-1)^1 = \\
 &= \frac{A}{4} + j \cdot \frac{B}{1 \cdot 2\pi} \cdot ((-1)^1 - 1) \cdot (-1) = \\
 &= \frac{A}{4} + j \cdot \frac{B}{\pi}
 \end{aligned}$$

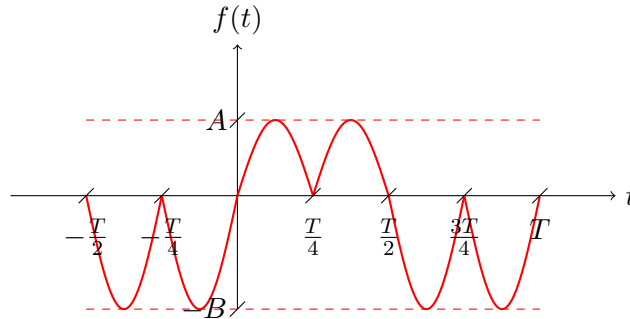
$$\begin{aligned}
 F_{-1} &= G_{-1} + H_{-1} \cdot (-1)^{-1} = \\
 &= \frac{A}{4} + j \cdot \frac{B}{(-1) \cdot 2\pi} \cdot ((-1)^{-1} - 1) \cdot (-1) = \\
 &= \frac{A}{4} - j \cdot \frac{B}{\pi}
 \end{aligned}$$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla sygnału $f(t)$ wynoszą:

$$\begin{aligned}
 F_0 &= \frac{B}{2} \\
 F_1 &= \frac{A}{4} + j \cdot \frac{B}{\pi} \\
 F_{-1} &= \frac{A}{4} - j \cdot \frac{B}{\pi} \\
 F_k &= j \cdot \left[\frac{A \cdot k}{2\pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right) + \frac{B}{k \cdot 2\pi} \cdot (1 - (-1)^k) \right]
 \end{aligned}$$

Zadanie 11.

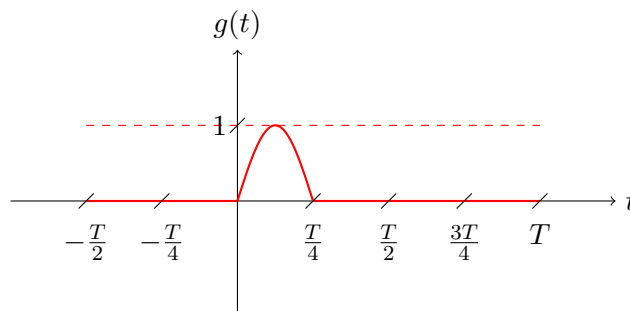
Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku. Wykorzystaj wiedzę o liniowości szeregu Fouriera i o wpływie przesunięcia sygnału w czasie na współczynniki szeregu Fouriera.



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja odcinkowa, którą możemy opisać w następujący sposób:

$$f(t) = \begin{cases} A \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ -A \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ -B \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; \frac{3T}{4} + k \cdot T\right) \\ B \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(\frac{3T}{4} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{C} \quad (2.68)$$

Współczynniki F_k możemy wyznaczyć bezpośrednio z definicji. Ponieważ mamy sygnał okresowy, w którym każdy okres składa się z czterech odcinków, to trzeba będzie obliczyć po jednej całce dla każdego z odcinków. Można również zauważyć, że sygnał $f(t)$ da się przedstawić jako liniową kombinację poprzesuwanego w czasie sygnału $g(t)$ przedstawionego poniżej:



Jest to funkcja odcinkowa, którą możemy opisać w następujący sposób:

$$g(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{4} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{4} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{C} \quad (2.69)$$

Dla tak zdefiniowanego sygnału $g(t)$, sygnał $f(t)$ można przedstawić jako:

$$f(t) = A \cdot g(t) + A \cdot g\left(t - \frac{T}{4}\right) - B \cdot g\left(t - \frac{T}{2}\right) - B \cdot g\left(t - \frac{3T}{4}\right) \quad (2.70)$$

Teraz wystarczy wyznaczyć współczynniki rozwinięcia w zespolony szereg Fouriera dla sygnału $g(t)$. Następnie, na podstawie twierdzenia o liniowości oraz wpływie przesunięcia sygnału w czasie na współczynniki szeregu Fouriera będziemy mogli obliczyć współczynniki F_k dla sygnału $f(t)$.

Współczynnik G_0 wyznaczamy ze wzoru:

$$G_0 = \frac{1}{T} \int_T g(t) \cdot dt \quad (2.71)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{1}{T} \int_T g(t) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{4}} \sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{4}}^T 0 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{4}} \sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \cdot dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz = \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \sin(z) \cdot \frac{dz}{\frac{4\pi}{T}} = \\ &= \frac{1}{T \cdot \frac{4\pi}{T}} \int_0^{\frac{T}{4}} \sin(z) \cdot dz = \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \left(-\cos(z) \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) - \cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot 0\right) \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \cdot (\cos(\pi) - \cos(0)) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \cdot (-1 - 1) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \cdot (-2) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

Wartość współczynnika G_0 wynosi $\frac{1}{2\pi}$.

Współczynniki G_k wyznaczamy ze wzoru

$$G_k = \frac{1}{T} \int_T g(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (2.72)$$

Podstawiamy do wzoru wzór naszej funkcji w pierwszym okresie $k = 0$

$$\begin{aligned}
G_k &= \frac{1}{T} \int_T g(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} \sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} \frac{e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{1}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \left(e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \left(e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \left(e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t - j \cdot k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (2-k)} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (2+k)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (2-k)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{4}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot (2+k)} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} z_1 &= j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (2-k) \cdot t & z_2 &= -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (2+k) \cdot t \\ dz_1 &= j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (2-k) \cdot dt & dz_2 &= -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (2+k) \cdot dt \\ dt &= \frac{dz_1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (2-k)} & dt &= \frac{dz_2}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (2+k)} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} e^{z_1} \cdot \frac{dz_1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (2-k)} - \int_0^{\frac{T}{4}} e^{z_2} \cdot \frac{dz_2}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (2+k)} \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (2-k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} e^{z_1} \cdot dz_1 - \frac{1}{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (2+k)} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j \cdot j \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(\frac{1}{2-k} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{2+k} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{1}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{2-k} \cdot e^{z_1} \Big|_0^{\frac{T}{4}} + \frac{1}{2+k} \cdot e^{z_2} \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\
&= \frac{1}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{2-k} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (2-k) \cdot \frac{T}{4}} + \frac{1}{2+k} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (2+k) \cdot \frac{T}{4}} \right) = \\
&= \frac{1}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{2-k} \cdot \left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (2-k) \cdot \frac{T}{4}} - e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (2-k) \cdot 0} \right) + \frac{1}{2+k} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (2+k) \cdot \frac{T}{4}} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (2+k) \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{2-k} \cdot \left(e^{j \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (2-k)} - e^0 \right) + \frac{1}{2+k} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (2+k)} - e^0 \right) \right) = \\
&= \frac{1}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{2+k}{(2-k) \cdot (2+k)} \cdot \left(e^{j \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (2-k)} - 1 \right) + \frac{2-k}{(2-k) \cdot (2+k)} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (2+k)} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{1}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(2+k) \cdot \left(e^{j \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (2-k)} - 1 \right)}{(2-k) \cdot (2+k)} + \frac{(2-k) \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (2+k)} - 1 \right)}{(2-k) \cdot (2+k)} \right) = \\
&= \frac{1}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(2+k) \cdot \left(e^{j \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (2-k)} - 1 \right) + (2-k) \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (2+k)} - 1 \right)}{(2-k) \cdot (2+k)} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{2 \cdot e^{j \frac{\pi}{2} \cdot (2-k)} - 2 + k \cdot e^{j \frac{\pi}{2} \cdot (2-k)} - k + 2 \cdot e^{-j \frac{\pi}{2} \cdot (2+k)} - 2 - k \cdot e^{-j \frac{\pi}{2} \cdot (2+k)} + k}{4 - k^2} \right) = \\
&= \frac{1}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{2 \cdot e^{j \frac{\pi}{2} \cdot (2-k)} - 4 + k \cdot e^{j \frac{\pi}{2} \cdot (2-k)} + 2 \cdot e^{-j \frac{\pi}{2} \cdot (2+k)} - k \cdot e^{-j \frac{\pi}{2} \cdot (2+k)}}{4 - k^2} \right) = \\
&= \frac{1}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{2 \cdot e^{j \pi} \cdot e^{-j \frac{k \cdot \pi}{2}} - 4 + k \cdot e^{j \pi} \cdot e^{-j \frac{k \cdot \pi}{2}} + 2 \cdot e^{-j \pi} \cdot e^{-j \frac{k \cdot \pi}{2}} - k \cdot e^{-j \pi} \cdot e^{-j \frac{k \cdot \pi}{2}}}{4 - k^2} \right) = \\
&= \left\{ \begin{aligned} e^{j \pi} &= \cos(\pi) + j \cdot \sin(\pi) = -1 \\ e^{-j \pi} &= \cos(\pi) - j \cdot \sin(\pi) = -1 \end{aligned} \right\} = \\
&= \frac{1}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{2 \cdot (-1) \cdot e^{-j \frac{k \cdot \pi}{2}} - 4 + k \cdot (-1) \cdot e^{-j \frac{k \cdot \pi}{2}} + 2 \cdot (-1) \cdot e^{-j \frac{k \cdot \pi}{2}} - k \cdot (-1) \cdot e^{-j \frac{k \cdot \pi}{2}}}{4 - k^2} \right) = \\
&= \frac{1}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-2 \cdot e^{-j \frac{k \cdot \pi}{2}} - 4 - k \cdot e^{-j \frac{k \cdot \pi}{2}} - 2 \cdot e^{-j \frac{k \cdot \pi}{2}} + k \cdot e^{-j \frac{k \cdot \pi}{2}}}{4 - k^2} \right) = \\
&= \frac{1}{-4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-4 \cdot e^{-j \frac{k \cdot \pi}{2}} - 4}{4 - k^2} \right) = \\
&= \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{4 \cdot e^{-j \frac{k \cdot \pi}{2}} + 4}{4 - k^2} \right) = \\
&= \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot 4 \cdot \left(\frac{e^{-j \frac{k \cdot \pi}{2}} + 1}{4 - k^2} \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1 + e^{-j \frac{k \cdot \pi}{2}}}{4 - k^2} \right) = \\
&= \frac{1 + e^{-j \frac{k \cdot \pi}{2}}}{\pi (4 - k^2)}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika G_k wynosi $\frac{1+e^{-j \frac{k \cdot \pi}{2}}}{\pi(4-k^2)}$ dla $k \neq 2 \wedge k \neq -2$.

Współczynnik G_k dla $k = 2$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z definicji G_2 :

$$\begin{aligned}
G_2 &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} \sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^T 0 \cdot e^{-j 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} \sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} \frac{e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{1}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \left(e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \left(e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \left(e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t - j \frac{4\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot t - j \frac{4\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \left(e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} - e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{4}} e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} e^{j \frac{4\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{4}} e^{-j \frac{4\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} e^0 \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{4}} e^{-j \frac{8\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} 1 \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{4}} e^{-j \frac{8\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot \frac{8\pi}{T} \cdot t \\ dz = -j \cdot \frac{8\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{-j \cdot \frac{8\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} dt - \int_0^{\frac{T}{4}} e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot \frac{8\pi}{T}} \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} dt - \frac{1}{-j \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} e^z \cdot dz \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(t \Big|_0^{\frac{T}{4}} + \frac{1}{j \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\left(\frac{T}{4} - 0 \right) + \frac{1}{j \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot e^{-j \frac{8\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{4} + \frac{1}{j \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \frac{8\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}} - e^{-j \frac{8\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{4} + \frac{1}{j \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot 2\pi} - e^0 \right) \right) = \\
&= \left\{ e^{-j \cdot 2\pi} = \cos(2\pi) - j \cdot \sin(2\pi) = 1 \right\} = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{4} + \frac{1}{j \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot (1 - 1) \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{4} + \frac{1}{j \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot 0 \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{T}{4} + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \frac{T}{4} = \\
&= \frac{1}{8j} = \\
&= \frac{-j}{8}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika G_2 wynosi $\frac{-j}{8}$.

Współczynnik G_k dla $k = -2$ musimy wyznaczyć raz jeszcze, tak więc wyznaczmy go wprost z

definicji G_{-2} :

$$\begin{aligned}
G_{-2} &= \frac{1}{T} \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot (-2) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} \sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{-j \cdot (-2) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^T 0 \cdot e^{-j \cdot (-2) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} \sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) \cdot e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{4}}^T 0 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2j} \right\} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} \frac{e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t}}{2j} \cdot e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{1}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \left(e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \left(e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \left(e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t + j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t + j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} \left(e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} - e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \cdot (1+1)} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{4}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \cdot (1-1)} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} e^{j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \cdot 2} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{4}} e^{-j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \cdot 0} \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} e^{j \cdot \frac{8\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{4}} e^0 \cdot dt \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} e^{j \cdot \frac{8\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{4}} 1 \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{aligned} z &= j \cdot \frac{8\pi}{T} \cdot t \\ dz &= j \cdot \frac{8\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \frac{dz}{j \cdot \frac{8\pi}{T}} \end{aligned} \right\} = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{4}} e^z \cdot \frac{dz}{j \cdot \frac{8\pi}{T}} - \int_0^{\frac{T}{4}} dt \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{4}} e^z \cdot dz - \int_0^{\frac{T}{4}} dt \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot e^z \Big|_0^{\frac{T}{4}} - t \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot e^{-j \cdot \frac{8\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{4}} - \left(\frac{T}{4} - 0 \right) \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{8\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}} - e^{-j \cdot \frac{8\pi}{T} \cdot 0} \right) - \frac{T}{4} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot (e^{-j \cdot 2\pi} - e^0) - \frac{T}{4} \right) = \\
&= \left\{ e^{-j \cdot 2\pi} = \cos(2\pi) - j \cdot \sin(2\pi) = 1 \right\} = \\
&= \frac{A}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot (1 - 1) - \frac{T}{4} \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \frac{8\pi}{T}} \cdot 0 - \frac{T}{4} \right) = \\
&= \frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \left(0 - \frac{T}{4} \right) = \\
&= -\frac{1}{T \cdot 2j} \cdot \frac{T}{4} = \\
&= -\frac{1}{8j} = \\
&= \frac{j}{8}
\end{aligned}$$

Wartość współczynnika G_{-2} wynosi $\frac{j}{8}$.

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji $g(t)$ przyjmują wartości.

$$\begin{aligned}
G_0 &= \frac{1}{2\pi} \\
G_2 &= \frac{-j}{8} \\
G_{-2} &= \frac{j}{8} \\
G_k &= \frac{1 + e^{-j \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}}}{\pi(4 - k^2)}
\end{aligned}$$

Teraz możemy wrócić do sygnału $f(t)$ opisanego za pomocą poprzesuowanych w czasie sygnałów $g(t)$:

$$f(t) = A \cdot g(t) + A \cdot g\left(t - \frac{T}{4}\right) - B \cdot g\left(t - \frac{T}{2}\right) - B \cdot g\left(t - \frac{3T}{4}\right) \quad (2.73)$$

Przypomnijmy twierdzenie o liniowości i o wpływie przesunięcia sygnału w czasie na współczynniki zespolonego szeregu Fouriera:

$$\begin{aligned}
n(t) &\rightarrow N_k \\
m(t) &= A \cdot n(t - t_0) \\
M_k &= A \cdot N_k \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t_0}
\end{aligned}$$

Stosując powyższe twierdzenia do sygnału $f(t)$ otrzymujemy:

$$F_k = A \cdot G_k + A \cdot G_k \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot \frac{T}{4}} - B \cdot G_k \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot \frac{T}{2}} - B \cdot G_k \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot \frac{3T}{4}} =$$

$$\begin{aligned}
&= A \cdot G_k + A \cdot G_k \cdot e^{-j \cdot \frac{k\pi}{2}} - B \cdot G_k \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi} - B \cdot G_k \cdot e^{-j \cdot \frac{3 \cdot k \cdot \pi}{2}} = \\
&= A \cdot G_k \cdot \left(1 + e^{-j \cdot \frac{k\pi}{2}}\right) - B \cdot G_k \cdot \left(e^{-j \cdot k\pi} + e^{-j \cdot \frac{3k\pi}{2}}\right) = \\
&= \left\{ \begin{aligned} e^{-j \cdot k\pi} &= \cos(k\pi) + j \cdot \sin(k\pi) = (-1)^k \\ e^{-j \cdot \frac{3 \cdot k \cdot \pi}{2}} &= e^{-j \cdot \left(\frac{2 \cdot k \cdot \pi}{2} + \frac{k\pi}{2}\right)} = e^{-j \cdot \frac{2 \cdot k \cdot \pi}{2}} \cdot e^{-j \cdot \frac{k\pi}{2}} = (-1)^k \cdot e^{-j \cdot \frac{k\pi}{2}} \end{aligned} \right\} = \\
&= A \cdot G_k \cdot \left(1 + e^{-j \cdot \frac{k\pi}{2}}\right) - B \cdot G_k \cdot \left((-1)^k + (-1)^k \cdot e^{-j \cdot \frac{k\pi}{2}}\right) = \\
&= A \cdot G_k \cdot \left(1 + e^{-j \cdot \frac{k\pi}{2}}\right) - B \cdot G_k \cdot (-1)^k \cdot \left(1 + e^{-j \cdot \frac{k\pi}{2}}\right) = \\
&= G_k \cdot \left(1 + e^{-j \cdot \frac{k\pi}{2}}\right) \cdot \left(A - B \cdot (-1)^k\right)
\end{aligned}$$

Podstawiając wartości współczynników G_k do wzoru na F_k otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
F_k &= G_k \cdot \left(1 + e^{-j \cdot \frac{k\pi}{2}}\right) \cdot \left(A - B \cdot (-1)^k\right) = \\
&= \frac{1 + e^{-j \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}}}{\pi(4 - k^2)} \cdot \left(1 + e^{-j \cdot \frac{k\pi}{2}}\right) \cdot \left(A - B \cdot (-1)^k\right) = \\
&= \frac{\left(1 + e^{-j \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}}\right)^2}{\pi(4 - k^2)} \cdot \left(A - B \cdot (-1)^k\right)
\end{aligned}$$

Analogicznie wyznaczmy współczynnik F_0 :

$$\begin{aligned}
F_0 &= G_0 \cdot \left(1 + e^{-j \cdot \frac{0 \cdot \pi}{2}}\right) \cdot \left(A - B \cdot (-1)^0\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(1 + e^0\right) \cdot (A - B \cdot 1) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot (1 + 1) \cdot (A - B) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot (2) \cdot (A - B) = \\
&= \frac{A - B}{\pi}
\end{aligned}$$

Analogicznie wyznaczmy współczynnik F_2 :

$$\begin{aligned}
F_2 &= G_2 \cdot \left(1 + e^{-j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{2}}\right) \cdot \left(A - B \cdot (-1)^2\right) = \\
&= \frac{-j}{8} \cdot \left(1 + e^{-j \cdot \pi}\right) \cdot (A - B \cdot 1) = \\
&= \left\{ e^{-j \cdot \pi} = \cos(\pi) - j \cdot \sin(\pi) = -1 \right\} = \\
&= \frac{-j}{8} \cdot (1 - 1) \cdot (A - B) = \\
&= \frac{-j}{8} \cdot (0) \cdot (A - B) = \\
&= 0
\end{aligned}$$

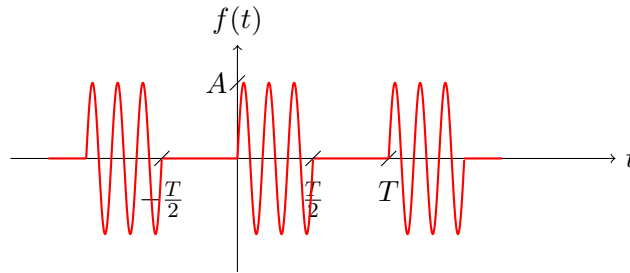
Analogicznie wyznaczmy współczynnik F_{-2} :

$$\begin{aligned}
F_{-2} &= G_{-2} \cdot \left(1 + e^{-j \cdot \frac{(-2) \cdot \pi}{2}}\right) \cdot (A - B \cdot (-1)^{-2}) = \\
&= \frac{j}{8} \cdot (1 + e^{j \cdot \pi}) \cdot (A - B \cdot 1) = \\
&= \left\{ e^{j \cdot \pi} = \cos(\pi) + j \cdot \sin(\pi) = -1 \right\} = \\
&= \frac{j}{8} \cdot (1 - 1) \cdot (A - B) = \\
&= \frac{j}{8} \cdot (0) \cdot (A - B) = \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji $f(t)$ przyjmują wartości:

$$\begin{aligned}
F_0 &= \frac{A - B}{\pi} \\
F_2 &= 0 \\
F_{-2} &= 0 \\
F_k &= \frac{\left(1 + e^{-j \cdot \frac{k \cdot \pi}{2}}\right)^2}{\pi(4 - k^2)} \cdot (A - B \cdot (-1)^k)
\end{aligned}$$

Zadanie 12. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $g(t)$ przedstawionego na rysunku. Wykorzystaj własności szeregu Fouriera oraz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera wyznaczone w zadaniu 1



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \sin\left(\frac{12\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (2.74)$$

Można zauważyć iż sygnał $g(t)$ jest z modulowaną wersją sygnału $f(t)$ z zadania 1

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) \cdot \sin\left(\frac{12\pi}{T} \cdot t\right) \\ &= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \right\} = \\ &= f(t) \cdot \frac{e^{j \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t}}{2 \cdot j} \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} \left(f(t) \cdot e^{j \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t} - f(t) \cdot e^{-j \cdot \frac{12\pi}{T} \cdot t} \right) \end{aligned}$$

Współczynniki zespolonego szeregu Fouriera F_k dla sygnału $f(t)$ wyznaczone w zadaniu 1 wynoszą:

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{A}{2} \\ F_k &= j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1 \right) \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia o modulacji można wyznaczyć współczynniki G_k na podstawie współczynników F_k sygnału $f(t)$ jako:

$$\begin{aligned} g^1(t) &= f(t) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k_0 \cdot t} \\ G_k^1 &= F_{k-k_0} \end{aligned}$$

W przypadku analizowanego sygnału twierdzenie o modulacji należy zastosować dwa razy

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2 \cdot j} f(t) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k_0^1 \cdot t} - \frac{1}{2 \cdot j} f(t) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k_0^2 \cdot t} \\ g(t) &= g^1(t) - g^2(t) \\ G_k &= G_k^1 - G_k^2 \end{aligned}$$

$$G_k = \frac{1}{2 \cdot j} \left(F_{k-k_0^1} - F_{k-k_0^2} \right)$$

W obu przypadkach funkcja $f(t)$ mnożona jest przez czynnik $e^{j \frac{12\pi}{T} \cdot t}$ (z uwzględnieniem zmiany znaku). Z tego czynnika można wydzielić wartość k_0^1 i k_0^2 .

$$\begin{aligned} e^{j \frac{12\pi}{T} \cdot t} &= e^{j \cdot \frac{2 \cdot \text{cdot} 6\pi}{T} \cdot t} \\ &= e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 6 \cdot t} \Rightarrow k_0^1 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-j \frac{12\pi}{T} \cdot t} &= e^{-j \cdot \frac{2 \cdot \text{cdot} 6\pi}{T} \cdot t} \\ &= e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 6 \cdot t} \\ &= e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot (-6) \cdot t} \Rightarrow k_0^2 = -6 \end{aligned}$$

Wstawiając wartości współczynników F_k otrzymujemy

$$\begin{aligned} G_k &= \frac{1}{2 \cdot j} \left(F_{k-k_0^1} - F_{k-k_0^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} \left(j \cdot \frac{A}{(k-k_0^1) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^{k-k_0^1} - 1 \right) - j \cdot \frac{A}{(k-k_0^2) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^{k-k_0^2} - 1 \right) \right) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} k_0^1 = 6 \\ k_0^2 = -6 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} \left(j \cdot \frac{A}{(k-6) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^{k-6} - 1 \right) - j \cdot \frac{A}{(k-(-6)) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^{k-(-6)} - 1 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} \left(j \cdot \frac{A}{(k-6) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^{k-6} - 1 \right) - j \cdot \frac{A}{(k+6) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^{k+6} - 1 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} \left(j \cdot \frac{A}{(k-6) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k \cdot (-1)^{-6} - 1 \right) - j \cdot \frac{A}{(k+6) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k \cdot (-1)^6 - 1 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} \left(j \cdot \frac{A}{(k-6) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k \cdot 1 - 1 \right) - j \cdot \frac{A}{(k+6) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k \cdot 1 - 1 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} \left(j \cdot \frac{A}{(k-6) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1 \right) - j \cdot \frac{A}{(k+6) \cdot 2\pi} \cdot \left((-1)^k - 1 \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} \left(j \cdot \frac{A}{(k-6) \cdot 2\pi} - j \cdot \frac{A}{(k+6) \cdot 2\pi} \right) \cdot \left((-1)^k - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} \cdot j \cdot \frac{A}{2\pi} \left(\frac{1}{k-6} - \frac{1}{k+6} \right) \cdot \left((-1)^k - 1 \right) = \\ &= \frac{A}{4\pi} \left(\frac{k+6}{(k-6) \cdot (k+6)} - \frac{k-6}{(k-6) \cdot (k+6)} \right) \cdot \left((-1)^k - 1 \right) = \\ &= \frac{A}{4\pi} \left(\frac{k+6-k+6}{(k-6) \cdot (k+6)} \right) \cdot \left((-1)^k - 1 \right) = \\ &= \frac{A}{4\pi} \left(\frac{12}{k^2-36} \right) \cdot \left((-1)^k - 1 \right) = \\ &= \frac{A}{\pi} \left(\frac{3}{k^2-36} \right) \cdot \left((-1)^k - 1 \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{3 \cdot A}{\pi \cdot (k^2 - 36)} \cdot ((-1)^k - 1)$$

A więc współczynniki G_k dla sygnału $g(t)$ są równe $\frac{3 \cdot A}{\pi \cdot (k^2 - 36)} \cdot ((-1)^k - 1)$, dla $k \neq 6 \wedge k \neq -6$. Oznacza to iż współczynnik dla $k = 6$ i $k = -6$ musimy wyznaczyć jeszcze raz analizując dokładnie co podstawiamy. Zaczniemy od wyznaczenia G_6

$$\begin{aligned} G_6 &= \frac{1}{2 \cdot j} (F_{6-k_0^1} - F_{6-k_0^2}) = \\ &= \left\{ k_0^1 = 6 \quad k_0^2 = -6 \right\} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} (F_{6-6} - F_{6-(-6)}) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} (F_0 - F_{6+6}) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} (F_0 - F_{12}) \end{aligned}$$

A więc musimy podstawić wartość współczynników F_0 oraz F_{12}

$$\begin{aligned} G_6 &= \frac{1}{2 \cdot j} (F_0 - F_{12}) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} \left(\frac{A}{2} - j \cdot \frac{A}{12 \cdot 2\pi} \cdot ((-1)^{12} - 1) \right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} \cdot \frac{A}{2} - \frac{1}{2 \cdot j} \cdot j \cdot \frac{A}{12 \cdot 2\pi} \cdot ((-1)^{12} - 1) = \\ &= \frac{A}{4 \cdot j} - \frac{A}{12 \cdot 4\pi} \cdot (1 - 1) = \\ &= \frac{A}{4 \cdot j} - \frac{A}{12 \cdot 4\pi} \cdot (0) = \\ &= \frac{A}{4 \cdot j} - \frac{A}{12 \cdot 4\pi} \cdot 0 = \\ &= \frac{A}{4 \cdot j} - 0 = \\ &= \frac{A}{4 \cdot j} \end{aligned}$$

Podobnie wyznaczymy współczynnik G_{-6}

$$\begin{aligned} G_{-6} &= \frac{1}{2 \cdot j} (F_{-6-k_0^1} - F_{-6-k_0^2}) = \\ &= \left\{ k_0^1 = 6 \quad k_0^2 = -6 \right\} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} (F_{-6-6} - F_{-6-(-6)}) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} (F_{-12} - F_{-6+6}) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} (F_{-12} - F_0) \end{aligned}$$

A więc musimy podstawić wartość współczynników F_{-12} oraz F_0

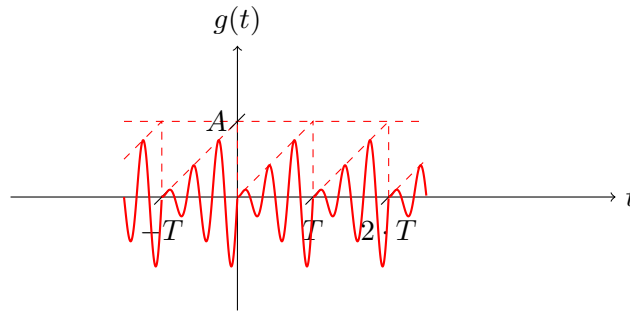
$$\begin{aligned}
 G_6 &= \frac{1}{2 \cdot j} (F_{-12} - F_0) = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot j} \left(j \cdot \frac{A}{-12 \cdot 2\pi} \cdot ((-1)^{-12} - 1) - \frac{A}{2} \right) = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot j} \left(j \cdot \frac{A}{12 \cdot 2\pi} \cdot (1 - 1) - \frac{A}{2} \right) = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot j} \left(j \cdot \frac{A}{12 \cdot 2\pi} \cdot (0) - \frac{A}{2} \right) = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot j} \left(0 - \frac{A}{2} \right) = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot j} \left(-\frac{A}{2} \right) = \\
 &= -\frac{1}{2 \cdot j} \cdot \frac{A}{2} = \\
 &= -\frac{A}{4 \cdot j}
 \end{aligned}$$

Można także zauważyć iż nie ma konieczności wyznaczania osobno wartości współczynnika dla $k = 0$, ponieważ można go wyznaczyć z ogólnego wzoru na G_k .

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$\begin{aligned}
 G_{-6} &= -\frac{A}{4 \cdot j} \\
 G_6 &= \frac{A}{4 \cdot j} \\
 G_k &= \frac{3 \cdot A}{\pi \cdot (k^2 - 36)} \cdot ((-1)^k - 1)
 \end{aligned}$$

Zadanie 13. Wyznacz współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla okresowego sygnału $g(t)$ przedstawionego na rysunku. Wykorzystaj własności szeregu Fouriera oraz współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera wyznaczone w zadaniu 3



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał w pierwszym okresie za pomocą wzoru.

$$g(x) = \frac{A}{T} \cdot t \cdot \sin\left(\frac{6\pi}{T} \cdot t\right) \quad (2.75)$$

Można zauważyć iż sygnał $g(t)$ jest z modulowaną wersją sygnału $f(t)$ z zadania 3

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) \cdot \sin\left(\frac{6\pi}{T} \cdot t\right) \\ &= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \right\} = \\ &= f(t) \cdot \frac{e^{j \cdot \frac{6\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{6\pi}{T} \cdot t}}{2 \cdot j} \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} \left(f(t) \cdot e^{j \cdot \frac{6\pi}{T} \cdot t} - f(t) \cdot e^{-j \cdot \frac{6\pi}{T} \cdot t} \right) \end{aligned}$$

Współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera a_k i b_k dla sygnału $f(t)$ wyznaczone w zadaniu 3 wynoszą:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{A}{2} \\ a_k &= 0 \\ b_k &= -\frac{A}{k \cdot \pi} \end{aligned}$$

Korzystając z zależności między współczynnikami F_k zespolonego szeregu Fouriera i współczynnikami a_k i b_k trygonometrycznego szeregu Fourier możemy wyznaczyć współczynniki F_k zespolonego szeregu Fouiera

$$\begin{aligned} F_0 &= a_0 \\ F_k &= a_k - j \cdot b_k \end{aligned}$$

a więc dla sygnału $f(t)$ z zadania 3 współczynniki zespolonego szeregu Fouriera wynoszą:

$$\begin{aligned}
 F_0 &= a_0 = \frac{A}{2} \\
 F_k &= a_k - j \cdot b_k = \\
 &= 0 - j \cdot \left(-\frac{A}{k \cdot \pi} \right) = \\
 &= j \cdot \frac{A}{k \cdot \pi}
 \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia o modulacji można wyznaczyć współczynniki G_k na podstawie współczynników F_k sygnału $f(t)$ jako:

$$\begin{aligned}
 g^1(t) &= f(t) \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot k_0 \cdot t} \\
 G_k^1 &= F_{k-k_0}
 \end{aligned}$$

W przypadku analizowanego sygnału twierdzenie o modulacji należy zastosować dwa razy

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \frac{1}{2 \cdot j} f(t) \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot k_0^1 \cdot t} - \frac{1}{2 \cdot j} f(t) \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot k_0^2 \cdot t} \\
 g(t) &= g^1(t) - g^2(t) \\
 G_k &= G_k^1 - G_k^2 \\
 G_k &= \frac{1}{2 \cdot j} (F_{k-k_0^1} - F_{k-k_0^2})
 \end{aligned}$$

W obu przypadkach funkcja $f(t)$ mnożona jest przez czynnik $e^{j \frac{6\pi}{T} \cdot t}$ (z uwzględnieniem zmiany znaku). Z tego czynnika można wydzielić wartość k_0^1 i k_0^2 .

$$\begin{aligned}
 e^{j \frac{6\pi}{T} \cdot t} &= e^{j \frac{2 \cdot \text{cdot} 3\pi}{T} \cdot t} \\
 &= e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot 3 \cdot t} \Rightarrow k_0^1 = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e^{-j \frac{6\pi}{T} \cdot t} &= e^{-j \frac{2 \cdot \text{cdot} 3\pi}{T} \cdot t} \\
 &= e^{-j \frac{2\pi}{T} \cdot 3 \cdot t} \\
 &= e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot (-3) \cdot t} \Rightarrow k_0^2 = -3
 \end{aligned}$$

Wstawiając wartości współczynników F_k otrzymujemy

$$G_k = \frac{1}{2 \cdot j} (F_{k-k_0^1} - F_{k-k_0^2}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2 \cdot j} \left(j \cdot \frac{A}{(k - k_0^1) \cdot \pi} - j \cdot \frac{A}{(k - k_0^2) \cdot \pi} \right) = \\
&= \left\{ k_0^1 = 3 \quad k_0^2 = -3 \right\} = \\
&= \frac{1}{2 \cdot j} \left(j \cdot \frac{A}{(k - 3) \cdot \pi} - j \cdot \frac{A}{(k - (-3)) \cdot \pi} \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot j} \cdot j \cdot \frac{A}{\pi} \left(\frac{1}{k - 3} - \frac{1}{k + 3} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{\pi} \left(\frac{k + 3}{(k - 3) \cdot (k + 3)} - \frac{k - 3}{(k + 3) \cdot (k - 1)} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{\pi} \cdot \frac{k + 3 - (k - 3)}{(k - 3) \cdot (k + 3)} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{\pi} \cdot \frac{k + 3 - k + 3}{k^2 - 9} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{\pi} \cdot \frac{6}{k^2 - 9} = \\
&= \frac{A}{\pi} \cdot \frac{3}{k^2 - 9}
\end{aligned}$$

A więc współczynniki G_k dla sygnału $g(t)$ są równe $\frac{A}{\pi} \cdot \frac{3}{k^2 - 9}$, dla $k \neq 3 \wedge k \neq -3$. Oznacza to iż współczynnik dla $k = 3$ i $k = -3$ musimy wyznaczyć jeszcze raz analizując dokładnie co podstawiamy. Zaczniemy od wyznaczenia G_3

$$\begin{aligned}
G_3 &= \frac{1}{2 \cdot j} \left(F_{3-k_0^1} - F_{3-k_0^2} \right) = \\
&= \left\{ k_0^1 = 3 \quad k_0^2 = -3 \right\} = \\
&= \frac{1}{2 \cdot j} \left(F_{3-3} - F_{3-(-3)} \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot j} (F_0 - F_{3+3}) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot j} (F_0 - F_6)
\end{aligned}$$

A więc musimy podstawić wartość współczynników F_0 oraz F_6

$$\begin{aligned}
G_3 &= \frac{1}{2 \cdot j} (F_0 - F_6) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot j} \left(\frac{A}{2} - j \cdot \frac{A}{6 \cdot \pi} \right) = \\
&= \frac{A}{4 \cdot j} - \frac{A}{2 \cdot 6 \cdot \pi} = \\
&= \frac{A}{4 \cdot j} - \frac{A}{12 \cdot \pi} = \\
&= -\frac{A}{12 \cdot \pi} + \frac{A}{4 \cdot j}
\end{aligned}$$

Podobnie wyznaczmy współczynnik G_{-3}

$$\begin{aligned}
 G_{-3} &= \frac{1}{2 \cdot j} \left(F_{-3-k_0^1} - F_{-3-k_0^2} \right) = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} k_0^1 = 3 \quad k_0^2 = -3 \end{array} \right\} = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot j} \left(F_{-3-3} - F_{-3-(-3)} \right) = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot j} (F_{-6} - F_{-3+3}) = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot j} (F_{-6} - F_0)
 \end{aligned}$$

A więc musimy podstawić wartość współczynników F_{-6} oraz F_0

$$\begin{aligned}
 G_{-3} &= \frac{1}{2 \cdot j} (F_{-6} - F_0) = \\
 &= \frac{1}{2 \cdot j} \left(j \cdot \frac{A}{-6 \cdot \pi} - \frac{A}{2} \right) = \\
 &= \frac{A}{-12 \cdot \pi} - \frac{A}{4 \cdot j} = \\
 &= -\frac{A}{12 \cdot \pi} - \frac{A}{4 \cdot j}
 \end{aligned}$$

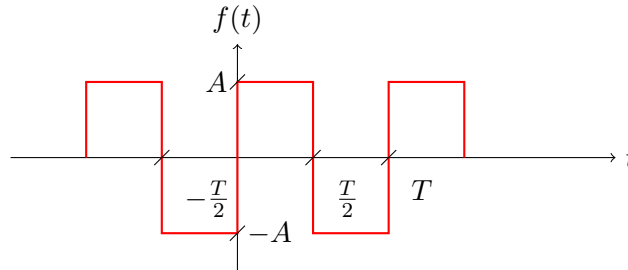
Można także zauważyć iż nie ma konieczności wyznaczania osobno wartości współczynnika dla $k = 0$, ponieważ można go wyznaczyć z ogólnego wzoru na G_k .

Ostatecznie współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla funkcji przedstawionej na rysunku przyjmują wartości.

$$\begin{aligned}
 G_{-3} &= -\frac{A}{12 \cdot \pi} - \frac{A}{4 \cdot j} \\
 G_3 &= -\frac{A}{12 \cdot \pi} + \frac{A}{4 \cdot j} \\
 G_k &= \frac{A}{\pi} \cdot \frac{3}{k^2 - 9}
 \end{aligned}$$

2.3 Obliczenia mocy sygnałów - twierdzenie Parsevala

Zadanie 1. Wyznacz udział mocy podstawowej (pierwszej) harmonicznej w całkowitej mocy okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku:



$$\frac{P_1}{P} = ? \quad (2.76)$$

W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(t) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ -A & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (2.77)$$

Moc sygnału możemy obliczyć ze wzoru:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (2.78)$$

Podstawiając wartości sygnału $f(t)$ do wzoru na moc otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} |A|^2 \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T |-A|^2 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + A^2 \cdot \int_{\frac{T}{2}}^T dt \right) = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \left(t \Big|_0^{\frac{T}{2}} + t \Big|_{\frac{T}{2}}^T \right) = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 + T - \frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot (T) = \\ &= A^2 \end{aligned}$$

Moc sygnału $f(t)$ równa się A^2 .

Moc podstawowej (pierwszej) harmonicznej to (na podstawie twierdzenia Parsevala):

$$P_1 = |F_1|^2 + |F_{-1}|^2 \quad (2.79)$$

Ponieważ sygnał $f(t)$ jest sygnałem rzeczywistym, to $|F_1| = |F_{-1}|$, czyli moc podstawowej harmonicznej:

$$P_1 = 2 \cdot |F_1|^2 \quad (2.80)$$

W związku z tym, należy obliczyć wartość współczynnika F_1 . Można to zrobić bezpośrednio ze wzoru na F_k podstawiając $k = 1$:

$$F_1 = \frac{1}{T} \cdot \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \quad (2.81)$$

Podstawiając wartości sygnału $f(t)$ do wzoru na F_1 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{T} \cdot \int_T f(t) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} A \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T -A \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_{\frac{T}{2}}^T e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \\ dz = -j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{-j \cdot \frac{2\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot \frac{2\pi}{T}} - \int_{\frac{T}{2}}^T e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot \frac{2\pi}{T}} \right) = \\ &= -\frac{A}{T \cdot j \cdot \frac{2\pi}{T}} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^z \cdot dz - \int_{\frac{T}{2}}^T e^z \cdot dz \right) = \\ &= -\frac{A}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(e^z \Big|_0^{\frac{T}{2}} - e^z \Big|_{\frac{T}{2}}^T \right) = \\ &= -\frac{A}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \Big|_{\frac{T}{2}}^T \right) = \\ &= -\frac{A}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 0} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} \right) = \\ &= -\frac{A}{j \cdot 2\pi} \cdot \left(e^{-j \cdot \pi} - e^0 - e^{-j \cdot 2 \cdot \pi} + e^{-j \cdot \pi} \right) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} e^{-j \cdot 2 \cdot \pi} = \cos(2\pi) - j \cdot \sin(2\pi) = 1 \\ e^{-j \cdot \pi} = \cos(\pi) - j \cdot \sin(\pi) = -1 \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{A}{j \cdot 2\pi} \cdot (-1 - 1 - 1 - 1) = \\ &= -\frac{A}{j \cdot 2\pi} \cdot (-4) = \\ &= \frac{2 \cdot A}{j \cdot \pi} = \\ &= -j \cdot \frac{2 \cdot A}{\pi} \end{aligned}$$

Wartość współczynnika F_1 to $-j \cdot \frac{2 \cdot A}{\pi}$

Podstawiając wartość współczynnika F_1 do wzoru na moc podstawowej harmonicznej otrzymujemy:

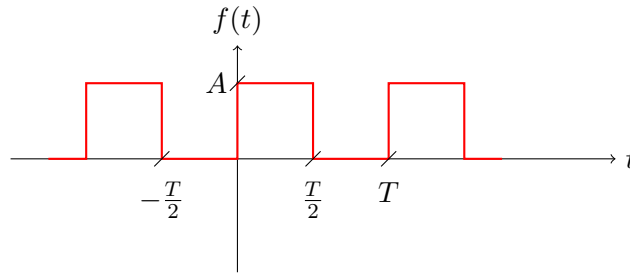
$$\begin{aligned} P_1 &= 2 \cdot |F_1|^2 = \\ &= 2 \cdot \left| -j \cdot \frac{2 \cdot A}{\pi} \right|^2 = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot A}{\pi} \right)^2 = \\ &= 2 \cdot \frac{4 \cdot A^2}{\pi^2} = \\ &= \frac{8 \cdot A^2}{\pi^2} \end{aligned}$$

Moc podstawowej harmonicznej równa się $P_1 = \frac{8 \cdot A^2}{\pi^2}$.

Teraz można wyznaczyć udział mocy podstawowej (pierwszej) harmonicznej w całkowitej mocy okresowego sygnału $f(t)$:

$$\frac{P_1}{P} = \frac{\frac{8 \cdot A^2}{\pi^2}}{A^2} = \frac{8}{\pi^2} \approx 81\% \quad (2.82)$$

Zadanie 2. Wyznacz udział mocy wyższych harmonicznych ($k > 1$) w całkowitej mocy okresowego sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku:



$$\frac{P_{>1}}{P} = ? \quad (2.83)$$

W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(t) = \begin{cases} A & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (2.84)$$

Moc sygnału możemy obliczyć ze wzoru:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (2.85)$$

Podstawiając wartości sygnału $f(t)$ do wzoru na moc otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \cdot \int_T |f(t)|^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(\int_0^{\frac{T}{2}} |A|^2 \cdot dt + \int_{\frac{T}{2}}^T |0|^2 \cdot dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left(A^2 \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + 0 \right) = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \left(t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} \right) = \\ &= \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

Moc sygnału $f(t)$ równa się $\frac{A^2}{2}$.

Na podstawie twierdzenia Parsevala, moc wyższych harmonicznych to:

$$P_{>1} = P - P_0 - P_1 \quad (2.86)$$

gdzie:

$$P_0 = |F_0|^2$$

$$P_1 = |F_1|^2 + |F_{-1}|^2$$

Ponieważ sygnał $f(t)$ jest sygnałem rzeczywistym, to $|F_1| = |F_{-1}|$, czyli moc podstawowej harmonicznej:

$$P_1 = 2 \cdot |F_1|^2 \quad (2.87)$$

W związku z tym, należy obliczyć wartości współczynników F_0 i F_1 . Współczynniki F_k wyznaczyliśmy już w zadaniu 1 i wynoszą:

$$F_0 = \frac{A}{2}$$

$$F_k = j \cdot \frac{A}{k \cdot 2\pi} \cdot ((-1)^k - 1)$$

Teraz możemy obliczyć P_0 oraz P_1 :

$$P_0 = |F_0|^2$$

$$= \left| \frac{A}{2} \right|^2$$

$$= \frac{A^2}{4}$$

$$P_1 = 2 \cdot |F_1|^2$$

$$= 2 \cdot \left| j \cdot \frac{A}{1 \cdot 2\pi} \cdot ((-1)^1 - 1) \right|^2$$

$$= 2 \cdot \left| j \cdot \frac{A}{2\pi} \cdot (-1 - 1) \right|^2$$

$$= 2 \cdot \left| j \cdot \frac{A}{2\pi} \cdot (-2) \right|^2$$

$$= 2 \cdot \left| j \cdot \frac{-A}{\pi} \right|^2$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{A}{\pi} \right)^2$$

$$= 2 \cdot \frac{A^2}{\pi^2}$$

Ostatecznie, moc wyższych harmoniczných to:

$$\begin{aligned}
P_{>1} &= P - P_0 - P_1 \\
&= \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{4} - 2 \cdot \frac{A^2}{\pi^2} \\
&= \frac{2 \cdot A^2 \cdot \pi^2}{4\pi^2} - \frac{A^2 \cdot \pi^2}{4\pi^2} - \frac{8 \cdot A^2}{4\pi^2} \\
&= \frac{A^2 \cdot \pi^2 - 8 \cdot A^2}{4\pi^2} \\
&= \frac{A^2 \cdot (\pi^2 - 8)}{4\pi^2}
\end{aligned}$$

Moc wyższych harmonicznych równa się $P_{>1} = \frac{A^2 \cdot (\pi^2 - 8)}{4\pi^2}$.

Teraz można wyznaczyć udział mocy wyższych harmonicznych w całkowitej mocy okresowego sygnału $f(t)$:

$$\frac{P_{>1}}{P} = \frac{\frac{A^2 \cdot (\pi^2 - 8)}{4\pi^2}}{\frac{A^2}{2}} = \frac{A^2 \cdot (\pi^2 - 8)}{4\pi^2} \cdot \frac{2}{A^2} = \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^2} \approx 9\% \quad (2.88)$$

Zadanie 3. Współczynniki rozwinięcia w zespolony szereg Fouriera pewnego rzeczywistego sygnału okresowego wynoszą:

$$F_k = \frac{A}{j \cdot k^2 \cdot 4 \cdot \pi^2} \wedge k > 0 \quad (2.89)$$

Wyznacz wartość średnią sygnału ($\bar{f}$) wiedząc, że wartość skuteczna $U = \frac{A\sqrt{6}}{60}$. W trakcie obliczeń wykorzystaj wiedzę, że:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad (2.90)$$

Z teorii wiemy, że:

$$\begin{aligned} F_0 &= \bar{f} \\ U &= \sqrt{P} \end{aligned}$$

Dlatego, aby wyznaczyć wartość średnią $\bar{f}$ musimy obliczyć wartość współczynnika F_0 . Niestety znamy wartości F_k ale tylko dla $k > 0$.

Jednakże, z twierdzenia Parsevala wiemy, że moc sygnału to:

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2 \quad (2.91)$$

Powyższe równanie można przepisać jako:

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2 \\ P &= \sum_{k=-\infty}^{-1} |F_k|^2 + |F_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |F_k|^2 \\ |F_0|^2 &= P - \sum_{k=-\infty}^{-1} |F_k|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |F_k|^2 \\ |F_0|^2 &= P - \sum_{k=1}^{\infty} |F_{-k}|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |F_k|^2 \end{aligned}$$

Ponieważ sygnał $f(t)$ jest sygnałem rzeczywistym, to $|F_k| = |F_{-k}|$, dlatego:

$$\begin{aligned} |F_0|^2 &= P - \sum_{k=1}^{\infty} |F_{-k}|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |F_k|^2 \\ |F_0|^2 &= P - \sum_{k=1}^{\infty} |F_k|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |F_k|^2 \\ |F_0|^2 &= P - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |F_k|^2 \end{aligned}$$

Teraz możemy już wyliczyć F_0 :

$$\begin{aligned}
|F_0|^2 &= P - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |F_k|^2 \\
|F_0|^2 &= U^2 - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |F_k|^2 \\
|F_0|^2 &= \left(\frac{A\sqrt{6}}{60} \right)^2 - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{A}{j \cdot k^2 \cdot 4 \cdot \pi^2} \right|^2 \\
|F_0|^2 &= \frac{A^2 \cdot 6}{3600} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{A}{j \cdot k^2 \cdot 4 \cdot \pi^2} \right|^2 \\
|F_0|^2 &= \frac{A^2}{600} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A}{k^2 \cdot 4 \cdot \pi^2} \right)^2 \\
|F_0|^2 &= \frac{A^2}{600} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^2}{k^4 \cdot 16 \cdot \pi^4} \\
|F_0|^2 &= \frac{A^2}{600} - 2 \cdot \frac{A^2}{16 \cdot \pi^4} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \\
|F_0|^2 &= \frac{A^2}{600} - \frac{A^2}{8 \cdot \pi^4} \cdot \frac{\pi^4}{90} \\
|F_0|^2 &= \frac{A^2}{600} - \frac{A^2}{720} \\
|F_0|^2 &= \frac{720 \cdot A^2}{600 \cdot 720} - \frac{600 \cdot A^2}{600 \cdot 720} \\
|F_0|^2 &= \frac{720 \cdot A^2 - 600 \cdot A^2}{600 \cdot 720} \\
|F_0|^2 &= \frac{120 \cdot A^2}{600 \cdot 720} \\
|F_0|^2 &= \frac{A^2}{5 \cdot 720} \\
|F_0|^2 &= \frac{A^2}{3600} \\
|F_0| &= \sqrt{\frac{A^2}{3600}} \\
|F_0| &= \frac{A}{60} \\
F_0 &= \pm \frac{A}{60}
\end{aligned}$$

Wartość średnia wynosi $\bar{f} = \pm \frac{A}{60}$.

Zadanie 4.

Wyznacz wartość średnią sygnału $f(t) = A \cdot \sin^6(t)$, wiedząc, że jego wartość skuteczna wynosi $U = \frac{\sqrt{2}}{2}$. W toku rozwiązania zadania ustal ile wynosi A , a następnie oblicz wartość średnią. Rozwiązanie powinno być liczbą.

Wartość skuteczna sygnału można wyznaczyć na podstawie mocy sygnału za pomocą wzoru:

$$U = \sqrt{P} \quad (2.92)$$

Moc sygnału okresowego dana jest wzorem:

$$P = \frac{1}{T} \int_T |f(t)|^2 \cdot dt \quad (2.93)$$

Alternatywnie moc sygnału można wyznaczyć za pomocą twierdzenia Parsewala na podstawie wartości współczynników zespolonego szeregu Fouriera.

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2 \quad (2.94)$$

Współczynniki zespolonego szeregu Fouriera możemy wyznaczyć ze wzoru na współczynniki szeregu Fouriera

$$F_k = \frac{1}{T} \int_t f(t) \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t} \cdot dt \quad (2.95)$$

Wyznamy jednak współczynniki szeregu Fouriera inaczej. Rozłożmy sygnał $f(t)$ na sumę zespolonych sygnałów harmoniczych.

$$\begin{aligned} f(t) &= A \cdot \sin^6(t) = \\ &= A \cdot (\sin(t))^6 = \\ &= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \right\} = \\ &= A \cdot \left(\frac{e^{j \cdot t} - e^{-j \cdot t}}{2 \cdot j} \right)^6 = \\ &= \left\{ \begin{array}{cccccc} n=0: & & & & & 1 \\ n=1: & & & 1 & & 1 \\ n=2: & & 1 & & 2 & & 1 \\ n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ n=4: & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ n=5: & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ n=6: & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array} \right\} = \\ &= A \cdot \frac{(e^{j \cdot t} - e^{-j \cdot t})^6}{(2 \cdot j)^6} = \\ &= A \cdot \frac{(e^{j \cdot t})^6 - 6 \cdot (e^{j \cdot t})^5 \cdot (e^{-j \cdot t})^1 + 15 \cdot (e^{j \cdot t})^4 \cdot (e^{-j \cdot t})^2 - 20 \cdot (e^{j \cdot t})^3 \cdot (e^{-j \cdot t})^3}{2^6 \cdot j^6} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A \cdot \frac{15 \cdot (e^{j \cdot t})^2 \cdot (e^{-j \cdot t})^4 - 6 \cdot (e^{j \cdot t})^1 \cdot (e^{-j \cdot t})^5 + (e^{-j \cdot t})^6}{2^6 \cdot j^6} = \\
& = A \cdot \frac{e^{j \cdot 6 \cdot t} - 6 \cdot e^{j \cdot 5 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot t} + 15 \cdot e^{j \cdot 4 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot t} - 20 \cdot e^{j \cdot 3 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 3 \cdot t} - 64}{-64} + \\
& + A \cdot \frac{15 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 4 \cdot t} - 6 \cdot e^{j \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 5 \cdot t} + e^{-j \cdot 6 \cdot t}}{-64} = \\
& = A \cdot \frac{e^{j \cdot 6 \cdot t} - 6 \cdot e^{j \cdot 5 \cdot t - j \cdot t} + 15 \cdot e^{j \cdot 4 \cdot t - j \cdot 2 \cdot t} - 20 \cdot e^{j \cdot 3 \cdot t - j \cdot 3 \cdot t} - 64}{-64} + \\
& + A \cdot \frac{15 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot t - j \cdot 4 \cdot t} - 6 \cdot e^{j \cdot t - j \cdot 5 \cdot t} + e^{-j \cdot 6 \cdot t}}{-64} = \\
& = A \cdot \frac{e^{j \cdot 6 \cdot t} - 6 \cdot e^{j \cdot 4 \cdot t} + 15 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot t} - 20 \cdot e^0}{-64} + \frac{15 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot t} - 6 \cdot e^{-j \cdot 4 \cdot t} + e^{-j \cdot 6 \cdot t}}{-64} = \\
& = A \cdot \frac{e^{j \cdot 6 \cdot t} - 6 \cdot e^{j \cdot 4 \cdot t} + 15 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot t} - 20 \cdot e^0 + 15 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot t} - 6 \cdot e^{-j \cdot 4 \cdot t} + e^{-j \cdot 6 \cdot t}}{-64} = \\
& = -A \cdot \frac{1}{64} \cdot e^{j \cdot 6 \cdot t} + A \cdot \frac{6}{64} \cdot e^{j \cdot 4 \cdot t} - A \cdot \frac{15}{64} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot t} + \frac{20}{64} - A \cdot \frac{15}{64} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot t} + A \cdot \frac{6}{64} \cdot e^{-j \cdot 4 \cdot t} - A \cdot \frac{1}{64} \cdot e^{-j \cdot 6 \cdot t} = \\
& = -A \cdot \frac{1}{64} \cdot e^{-j \cdot 6 \cdot t} + A \cdot \frac{6}{64} \cdot e^{-j \cdot 4 \cdot t} - A \cdot \frac{15}{64} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot t} + A \cdot \frac{20}{64} - A \cdot \frac{15}{64} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot t} + A \cdot \frac{6}{64} \cdot e^{j \cdot 4 \cdot t} - A \cdot \frac{1}{64} \cdot e^{j \cdot 6 \cdot t}
\end{aligned}$$

Porównajmy uzyskane rozwinięcie z wzorem na aproksymację sygnału za pomocą zespolonego szeregu Fouriera

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \frac{2\pi}{T} \cdot k \cdot t}$$

Dla naszego sygnału $T = 2\pi$ a więc mamy

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \frac{2\pi}{2\pi} \cdot k \cdot t} = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot t} = \\
&= \dots + F_{-6} \cdot e^{-j \cdot 6 \cdot t} + F_{-5} \cdot e^{-j \cdot 5 \cdot t} + \\
&+ F_{-4} \cdot e^{-j \cdot 4 \cdot t} + F_{-3} \cdot e^{-j \cdot 3 \cdot t} + F_{-2} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot t} + \\
&+ F_{-1} \cdot e^{-j \cdot t} + F_0 + F_1 \cdot e^{j \cdot t} + \\
&+ F_2 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot t} + F_3 \cdot e^{j \cdot 3 \cdot t} + F_4 \cdot e^{j \cdot 4 \cdot t} + \\
&+ F_5 \cdot e^{j \cdot 5 \cdot t} + F_6 \cdot e^{j \cdot 6 \cdot t} + \dots
\end{aligned}$$

Przyrównując uzyskany wzór do rozwinięcia naszej funkcji uzyskujemy wprost współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla naszego sygnału:

$$\begin{aligned}
F_{-6} &= -A \cdot \frac{1}{64} \\
F_{-4} &= A \cdot \frac{6}{64} \\
F_{-2} &= -A \cdot \frac{15}{64}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_0 &= A \cdot \frac{20}{64} \\
F_2 &= -A \cdot \frac{15}{64} \\
F_4 &= A \cdot \frac{6}{64} \\
F_6 &= -A \cdot \frac{1}{64} \\
\forall_{k \notin \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}} F_k &= 0
\end{aligned}$$

A więc korzystając z twierdzenia Parsewała energia sygnału jest równa:

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2 = \\
&= \dots + |F_{-6}|^2 + |F_{-5}|^2 + |F_{-4}|^2 + |F_{-3}|^2 + \\
&+ |F_{-2}|^2 + |F_{-1}|^2 + |F_0|^2 + |F_1|^2 + |F_2|^2 + \\
&+ |F_3|^2 + |F_4|^2 + |F_5|^2 + |F_6|^2 + \dots = \\
&= \left| -A \cdot \frac{1}{64} \right|^2 + |0|^2 + \left| A \cdot \frac{6}{64} \right|^2 + |0|^2 + \\
&+ \left| -A \cdot \frac{15}{64} \right|^2 + |0|^2 + \left| A \cdot \frac{20}{64} \right|^2 + |0|^2 + \left| -A \cdot \frac{15}{64} \right|^2 + \\
&+ |0|^2 + \left| A \cdot \frac{6}{64} \right|^2 + |0|^2 + \left| -A \cdot \frac{1}{64} \right|^2 = \\
&= A^2 \cdot \frac{1}{64^2} + A^2 \cdot \frac{6^2}{64^2} + A^2 \cdot \frac{15^2}{64^2} + A^2 \cdot \frac{20^2}{64^2} + A^2 \cdot \frac{15^2}{64^2} + A^2 \cdot \frac{6^2}{64^2} + A^2 \cdot \frac{1}{64^2} = \\
&= \frac{A^2}{64^2} \cdot (1 + 6^2 + 15^2 + 20^2 + 15^2 + 6^2 + 1) = \\
&= \frac{A^2}{64^2} \cdot (1 + 36 + 225 + 400 + 225 + 36 + 1) = \\
&= \frac{A^2}{64^2} \cdot 924 = \\
&= A^2 \cdot \frac{924}{64^2}
\end{aligned}$$

Wyznamy wartość skuteczną:

$$\begin{aligned}
U &= \sqrt{P} = \\
&= \sqrt{A^2 \cdot \frac{924}{64^2}} = \\
&= A \cdot \frac{\sqrt{924}}{64} = \\
&= A \cdot \frac{2\sqrt{231}}{64} = \\
&= A \cdot \frac{\sqrt{231}}{32}
\end{aligned}$$

Z treści zadania wiemy że wartość skuteczna U równa się $\frac{\sqrt{2}}{2}$, a więc:

$$\begin{aligned} U = A \cdot \frac{\sqrt{231}}{32} = \frac{\sqrt{2}}{2} &\Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{32}{\sqrt{231}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{16}{\sqrt{231}} = \\ &= 16 \cdot \sqrt{\frac{2}{231}} \end{aligned}$$

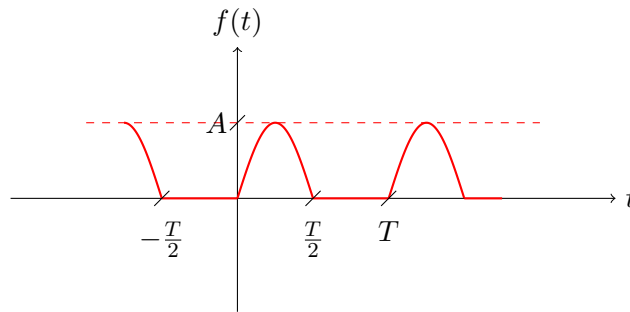
Czyli amplituda sygnału wynosi: $A = 16 \cdot \sqrt{\frac{2}{231}}$

Wartość średnia sygnału to wartość współczynnika F_0 a więc:

$$\begin{aligned} f(t) = F_0 = A \cdot \frac{20}{64} &= \\ &= 16 \cdot \sqrt{\frac{2}{231}} \cdot \frac{20}{64} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{231}} \cdot \frac{20}{4} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{231}} \cdot 5 = \\ &= 5 \cdot \sqrt{\frac{2}{231}} \end{aligned}$$

Wartość średnia sygnału wynosi $f(t) = 5 \cdot \sqrt{\frac{2}{231}}$

Zadanie 5. Wyznacz stosunek mocy parzystych harmonicznych do mocy całkowitej dla sygnału przedstawionego na rysunku poniżej. Wykorzystaj współczynniki zespolonego szeregu Fouriera obliczone w zadaniu 4



W pierwszej kolejności należy ustalić wzór funkcji przedstawionej na rysunku. Jest to funkcja przedziałowa, którą możemy opisać w następujący sposób:

$$f(x) = \begin{cases} A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & t \in \left(0 + k \cdot T; \frac{T}{2} + k \cdot T\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{T}{2} + k \cdot T; T + k \cdot T\right) \end{cases} \wedge k \in \mathbb{Z} \quad (2.96)$$

Celem jest obliczenie stosunku mocy parzystych harmonicznych P_{par} do mocy całkowitej P .

$$\frac{P_{par}}{P}$$

Moc sygnału możemy wyznaczyć z definicji:

$$P = \frac{1}{T} \int_T (f(t))^2 \cdot dt$$

Podstawiając wzór naszej funkcji otrzymujemy

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T (f(t))^2 \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right)^2 \cdot dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T (0)^2 \cdot dt = \\ &= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \right\} = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(A \cdot \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t}}{2 \cdot j} \right)^2 \cdot dt + 0 = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A^2 \cdot \frac{\left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} - e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right)^2}{2^2 \cdot j^2} \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A^2 \cdot \frac{\left(e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right)^2 - 2 \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + \left(e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right)^2}{-4} \cdot dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A^2 \cdot \frac{e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2} - 2 \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} + e^{-j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t \cdot 2}}{-4} \cdot dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A^2 \cdot \frac{e^{j\frac{4\pi}{T} \cdot t} - 2 \cdot e^0 + e^{-j\frac{4\pi}{T} \cdot t}}{-4} \cdot dt = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(e^{j\frac{4\pi}{T} \cdot t} - 2 \cdot 1 + e^{-j\frac{4\pi}{T} \cdot t} \right) \cdot dt = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{j\frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\frac{T}{2}} 2 \cdot dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j\frac{4\pi}{T} \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} dz_1 &= j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \quad z_2 = -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot t \\ dz_1 &= j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \quad dz_2 = -j \cdot \frac{4\pi}{T} \cdot dt \\ dt &= \frac{dz_1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \quad dt = \frac{dz_2}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot \frac{dz_1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} - 2 \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot \frac{dz_2}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \right) = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_1} \cdot dz_1 - 2 \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} dt + \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{z_1} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - 2 \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{z_2} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{j\frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - 2 \cdot t \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot e^{-j\frac{4\pi}{T} \cdot t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right) = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{j\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{j\frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) - 2 \cdot \left(\frac{T}{2} - 0 \right) + \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-j\frac{4\pi}{T} \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{j2\pi} - e^0 \right) - 2 \cdot \left(\frac{T}{2} \right) + \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot \left(e^{-j2\pi} - e^0 \right) \right) = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) - T + \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot (1 - 1) \right) = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} \left(\frac{1}{j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 - T + \frac{1}{-j \cdot \frac{4\pi}{T}} \cdot 0 \right) = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} (0 - T + 0) = \\
&= \frac{A^2}{-4 \cdot T} (-T) = \\
&= \frac{A^2}{4}
\end{aligned}$$

Moc sygnału wynosi więc: $P = \frac{A^2}{4}$

Moc sygnału możemy wyznaczyć na podstawie współczynników zespolonego szeregu Fouriera F_k za pomocą twierdzenia Parsewala

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2$$

Dla sygnałów rzeczywistych widmo amplitudowe sygnału jest parzyste a więc mamy

$$|F_{-k}|^2 = |F_k|^2 \Rightarrow P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2$$

$$= |F_0|^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |F_k|^2$$

A więc moc parzystych harmonicznych można wyznaczyć odejmując od mocy całkowitej moc nieparzystych harmonicznych i moc składowej zerowej

$$P_{par} = P - |F_0|^2 - 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |F_{2 \cdot k+1}|^2$$

Współczynniki zespolonego szeregu Fouriera dla sygnału przedstawionego powyżej wyznaczone w ramach zadania 4 wynoszą

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{A}{\pi} \\ F_{-1} &= j \cdot \frac{A}{4} \\ F_1 &= -j \cdot \frac{A}{4} \\ F_k &= \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(-1)^k + 1}{1 - k^2} \right) \end{aligned}$$

A więc moc parzystych harmonicznych wynosi

$$\begin{aligned} P_{par} &= P - |F_0|^2 - 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |F_{2 \cdot k+1}|^2 = \\ P_{par} &= P - |F_0|^2 - 2 \cdot |F_1|^2 - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |F_{2 \cdot k+1}|^2 = \\ &= \frac{A^2}{4} - \left| \frac{A}{\pi} \right|^2 - 2 \cdot \left| -j \cdot \frac{A}{4} \right|^2 - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(-1)^{2 \cdot k+1} + 1}{1 - (2 \cdot k + 1)^2} \right) \right|^2 = \\ &= \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2} - 2 \cdot \frac{A^2}{4^2} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(-1)^{2 \cdot k} \cdot (-1)^1 + 1}{1 - (2 \cdot k + 1)^2} \right) \right|^2 = \\ &= \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2} - 2 \cdot \frac{A^2}{4^2} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{((-1)^2)^k \cdot (-1)^1 + 1}{1 - (2 \cdot k + 1)^2} \right) \right|^2 = \\ &= \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2} - 2 \cdot \frac{A^2}{4^2} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{(1)^k \cdot (-1) + 1}{1 - (2 \cdot k + 1)^2} \right) \right|^2 = \\ &= \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2} - 2 \cdot \frac{A^2}{4^2} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1 \cdot (-1) + 1}{1 - (2 \cdot k + 1)^2} \right) \right|^2 = \\ &= \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2} - 2 \cdot \frac{A^2}{4^2} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{-1 + 1}{1 - (2 \cdot k + 1)^2} \right) \right|^2 = \\ &= \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2} - 2 \cdot \frac{A^2}{4^2} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{A}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{0}{1 - (2 \cdot k + 1)^2} \right) \right|^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2} - 2 \cdot \frac{A^2}{4^2} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |0|^2 = \\
&= \frac{A^2}{4} - \frac{A^2}{\pi^2} - 2 \cdot \frac{A^2}{16} - 0 = \\
&= \frac{2 \cdot A^2}{8} - \frac{A^2}{\pi^2} - \frac{A^2}{8} = \\
&= \frac{A^2}{8} - \frac{A^2}{\pi^2} = \\
&= A^2 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2} \right)
\end{aligned}$$

A więc moc parzystych harmoniczných wynosi: $P_{par} = A^2 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2} \right)$

A więc poszukiwany stosunek parzystych harmoniczných do całkowitej mocy sygnału wynosi:

$$\begin{aligned}
\frac{P_{par}}{P} &= \frac{A^2 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2} \right)}{\frac{A^2}{4}} = \\
&= \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2} \right) \cdot 4 = \\
&= \frac{4}{8} - \frac{4}{\pi^2} = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}
\end{aligned}$$

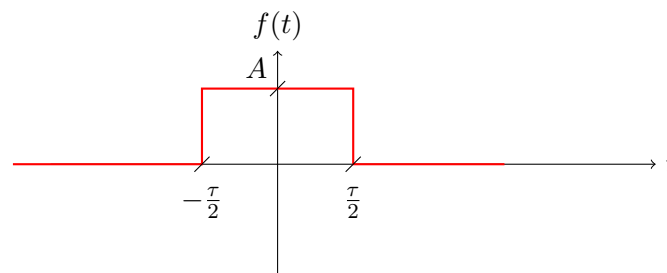
A więc poszukiwany stosunek parzystych harmoniczných do całkowitej mocy sygnału wynosi: $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}$

Rozdział 3

Analiza sygnałów nieokresowych. Przekształcenie całkowe Fouriera

3.1 Wyznaczanie transformaty Fouriera z definicji

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe.



W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (3.1)$$

Co można wyrazić jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (-\infty; -\frac{\tau}{2}) \\ A & \text{dla } t \in (-\frac{\tau}{2}; \frac{\tau}{2}) \\ 0 & \text{dla } t \in (\frac{\tau}{2}; \infty) \end{cases} \quad (3.2)$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (3.3)$$

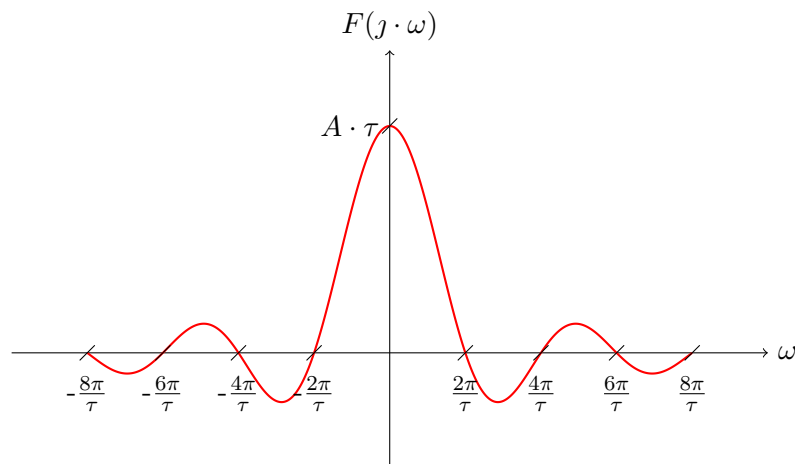
Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji:

$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{-\frac{\tau}{2}} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\infty} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \int_{-\infty}^{-\frac{\tau}{2}} 0 \cdot dt + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\infty} 0 \cdot dt = \\
&= 0 + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + 0 = \\
&= A \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot \omega \cdot t \\ dz = -j \cdot \omega \cdot dt \\ dt = \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot dz \end{array} \right\} = \\
&= A \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^z \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot dz = \\
&= A \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^z \cdot dz = \\
&= A \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^z \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \\
&= A \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \\
&= \frac{A}{-j \cdot \omega} \cdot \left(e^{-j\omega \cdot \frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega \cdot (-\frac{\tau}{2})} \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot \left(e^{j\omega \cdot \frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega \cdot \frac{\tau}{2}} \right) = \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \right\} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \sin\left(\omega \cdot \frac{\tau}{2}\right) = \\
&= \left\{ \frac{\sin(x)}{x} = Sa(x) \right\} = \\
&= A \cdot \tau \cdot Sa\left(\omega \cdot \frac{\tau}{2}\right)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Pi(\frac{t}{\tau})$ to $F(j\omega) = A \cdot \tau \cdot Sa(\omega \cdot \frac{\tau}{2})$.

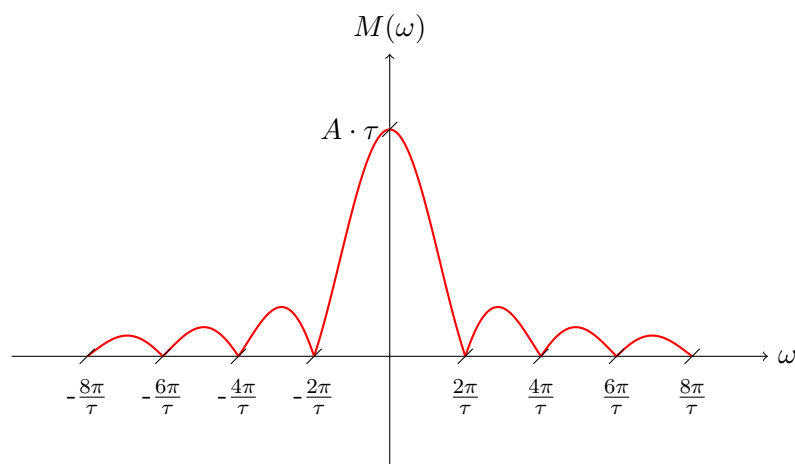
Narysujmy widmo sygnału $f(t) = A \cdot \Pi(\frac{t}{\tau})$ czyli:

$$F(j\omega) = A \cdot \tau \cdot Sa\left(\omega \cdot \frac{\tau}{2}\right) \quad (3.4)$$



Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

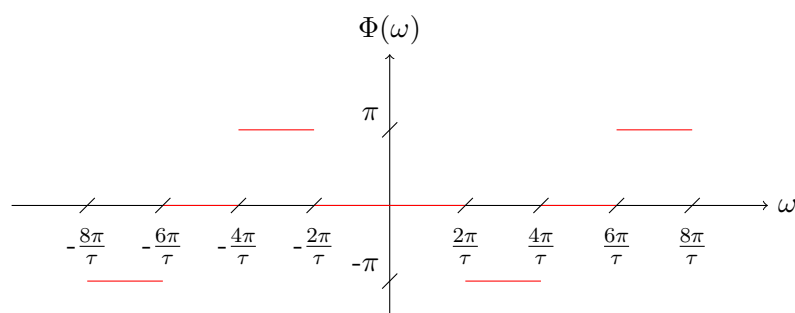
$$M(\omega) = |F(j \cdot \omega)| \quad (3.5)$$



Widmo amplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

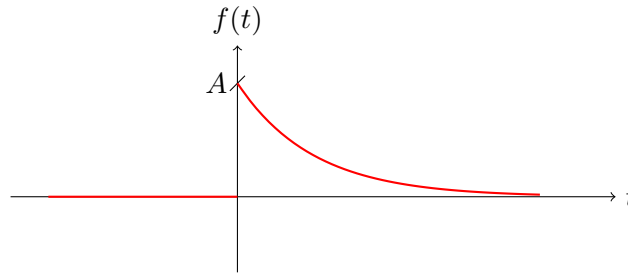
Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\Phi(\omega) = \arctg \left(\frac{\text{Im}\{F(j \cdot \omega)\}}{\text{Re}\{F(j \cdot \omega)\}} \right) \quad (3.6)$$



Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

Zadanie 2. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = A \cdot \mathbb{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t}$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe.



W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (-\infty; 0) \\ A \cdot e^{-a \cdot t} & \text{dla } t \in (0; \infty) \end{cases} \quad (3.7)$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (3.8)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot dt + \int_0^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= 0 + \int_0^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_0^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= A \cdot \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega) \cdot t} \cdot dt = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} A \cdot \int_0^{\tau} e^{-(a+j\omega) \cdot t} \cdot dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = -(a+j\omega) \cdot t \\ dz = -(a+j\omega) \cdot dt \\ dt = \frac{1}{-(a+j\omega)} \cdot dz \end{array} \right\} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} A \cdot \int_0^{\tau} e^z \cdot \frac{1}{-(a+j\omega)} \cdot dz = \\ &= A \cdot \frac{1}{-(a+j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^z \cdot dz = \\ &= A \cdot \frac{1}{-(a+j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^z \Big|_0^{\tau} = \\ &= \frac{A}{-(a+j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-(a+j\omega) \cdot t} \Big|_0^{\tau} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{-(a+j\cdot\omega)\cdot\tau} - e^{-(a+j\cdot\omega)\cdot 0}) = \\
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{-(a+j\cdot\omega)\cdot\tau} - e^0) = \\
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{-(a+j\cdot\omega)\cdot\tau} - 1) = \\
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-(a+j\cdot\omega)\cdot\tau} - 1 \right) = \\
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-a\cdot\tau + j\cdot\omega\cdot\tau} - 1 \right) = \\
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-a\cdot\tau} \cdot e^{j\cdot\omega\cdot\tau} - 1 \right) = \\
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-a\cdot\tau} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{j\cdot\omega\cdot\tau} - 1 \right) = \\
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot \left(0 \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{j\cdot\omega\cdot\tau} - 1 \right) = \\
&= \frac{A}{-(a+j\cdot\omega)} \cdot (0 - 1) = \\
&= \frac{A}{a+j\cdot\omega}
\end{aligned}$$

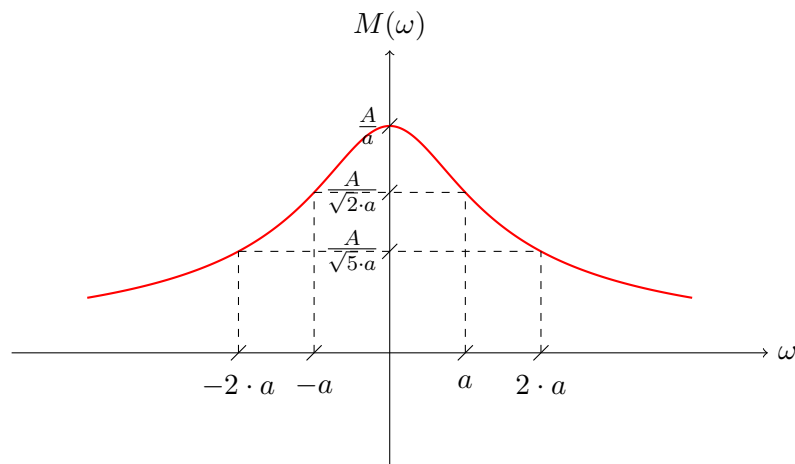
Transformata sygnału $f(t)$ to $F(j\omega) = \frac{A}{a+j\cdot\omega}$.

Wyznamy jawnie część rzeczywistą i urojoną transformaty:

$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= \frac{A}{(a+j\cdot\omega)} = \\
&= \frac{A}{(a+j\cdot\omega)} \cdot \frac{(a-j\cdot\omega)}{(a-j\cdot\omega)} = \\
&= \frac{A \cdot (a-j\cdot\omega)}{(a^2 + \omega^2)} = \\
&= \frac{A \cdot a}{(a^2 + \omega^2)} - j \cdot \frac{A \cdot \omega}{(a^2 + \omega^2)}
\end{aligned}$$

Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

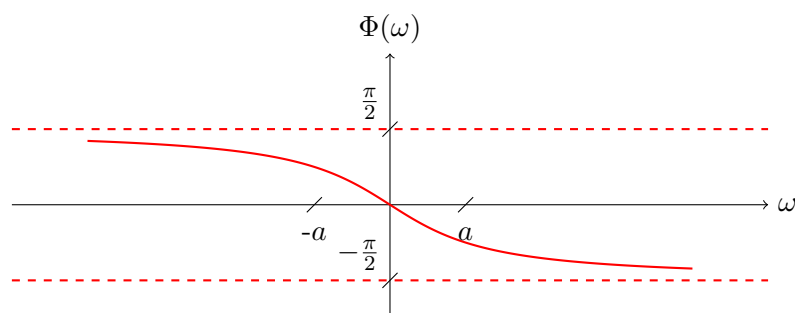
$$\begin{aligned}
M(\omega) &= |F(j\omega)| = \\
&= \sqrt{\left(\frac{A \cdot a}{(a^2 + \omega^2)} \right)^2 + \left(\frac{-A \cdot \omega}{(a^2 + \omega^2)} \right)^2} = \\
&= \sqrt{\frac{A^2 \cdot (a^2 + \omega^2)}{(a^2 + \omega^2)^2}} = \\
&= \sqrt{\frac{A^2}{(a^2 + \omega^2)}} = \\
&= \frac{A}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}
\end{aligned}$$



Widmo amplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

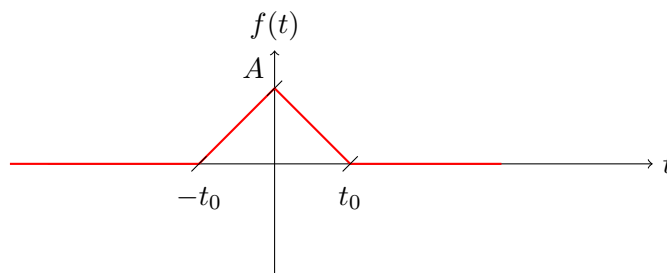
Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned}
 \Phi(\omega) &= \arctg\left(\frac{\operatorname{Im}\{F(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{F(j\omega)\}}\right) = \\
 &= \arctg\left(\frac{\left(\frac{-A \cdot \omega}{(a^2 + \omega^2)}\right)}{\left(\frac{A \cdot a}{(a^2 + \omega^2)}\right)}\right) = \\
 &= \arctg\left(\frac{-A \cdot \omega}{(a^2 + \omega^2)} \cdot \frac{(a^2 + \omega^2)}{A \cdot a}\right) = \\
 &= \arctg\left(-\frac{\omega}{a}\right)
 \end{aligned}$$



Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

Zadanie 3. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku.



W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) \quad (3.9)$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (3.10)$$

Do obliczenia całki potrzebujemy jawnej postaci równań opisujących proste na odcinkach $(-t_0, 0)$ oraz $(0, t_0)$.

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \quad (3.11)$$

Dla pierwszego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, 0)$ oraz $(0, A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b .

$$\begin{cases} 0 = m \cdot (-t_0) + b \\ A = m \cdot 0 + b \end{cases} \quad \begin{cases} -b = m \cdot (-t_0) \\ A = b \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ A = b \end{cases} \quad \begin{cases} A = b \\ \frac{A}{t_0} = m \end{cases}$$

Równanie prostej dla t z zakresu $(-t_0, 0)$ to:

$$f(t) = \frac{A}{t_0} \cdot t + A$$

Dla drugiego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, A)$ oraz $(t_0, 0)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b .

$$\begin{cases} 0 = m \cdot t_0 + b \\ A = m \cdot 0 + b \\ -b = m \cdot t_0 \\ A = b \\ -\frac{b}{t_0} = m \\ A = b \\ A = b \\ -\frac{A}{t_0} = m \end{cases}$$

Równanie prostej dla t z zakresu $(0, t_0)$ to:

$$f(t) = -\frac{A}{t_0} \cdot t + A$$

Podsumowując, sygnał $f(t)$ możemy opisać jako funkcję przedziałową:

$$f(t) = A \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{t_0} \cdot t + A & \text{dla } t \in (-t_0; 0) \\ -\frac{A}{t_0} \cdot t + A & \text{dla } t \in (0; t_0) \\ 0 & \text{dla } t \in (t_0; \infty) \end{cases} \quad (3.12)$$

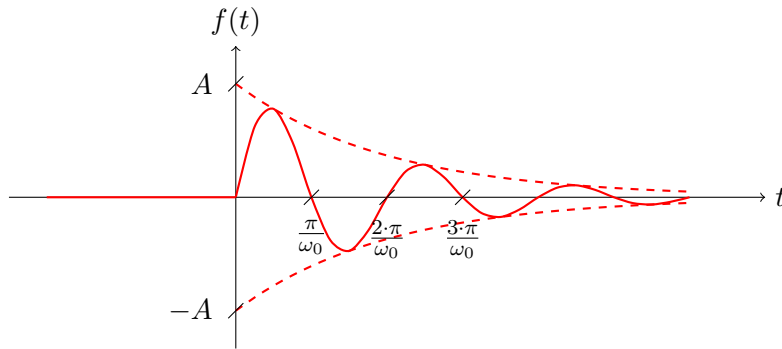
Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^0 \left(\frac{A}{t_0} \cdot t + A \right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &+ \int_0^{t_0} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot t + A \right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot dt + \int_{-t_0}^0 \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^0 A \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &+ \int_0^{t_0} -\frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_0^{t_0} A \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt = \\ &= 0 + \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-t_0}^0 t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_{-t_0}^0 e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &- \frac{A}{t_0} \cdot \int_0^{t_0} t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_0^{t_0} e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + 0 = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = t \quad dv = e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ du = dt \quad v = \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^0 - \int_{-t_0}^0 \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A \cdot \left(\frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^0 \right) = \\
& - \frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \Big|_0^{t_0} - \int_0^{t_0} \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \right) = \\
& + A \cdot \left(\frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \Big|_0^{t_0} \right) = \\
& = \frac{A}{t_0} \cdot \left(0 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot 0} - (-t_0) \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)} + \frac{1}{j \cdot \omega} \left(\frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^0 \right) \right) = \\
& + \frac{A}{-j \cdot \omega} \cdot (e^{-j \cdot \omega \cdot 0} - e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)}) = \\
& - \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - 0 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot 0} + \frac{1}{j \cdot \omega} \left(\frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \Big|_0^{t_0} \right) \right) = \\
& + \frac{A}{-j \cdot \omega} \cdot (e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-j \cdot \omega \cdot 0}) = \\
& = \frac{A}{t_0} \cdot \left(0 - t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} (e^{-j \cdot \omega \cdot 0} - e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)}) \right) = \\
& - \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot (1 - e^{j \cdot \omega \cdot t_0}) = \\
& - \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - 0 - \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} (e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-j \cdot \omega \cdot 0}) \right) = \\
& - \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot (e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - 1) = \\
& = - \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0 \cdot j^2 \cdot \omega^2} + \frac{A}{t_0 \cdot j^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{j \cdot \omega} + \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} = \\
& + \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0 \cdot j^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0 \cdot j^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{j \cdot \omega} = \\
& = - \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot j^2 \cdot \omega^2} + \frac{A}{t_0 \cdot j^2 \cdot \omega^2} \cdot (e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-j \cdot \omega \cdot t_0}) = \\
& = \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot (e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + e^{-j \cdot \omega \cdot t_0}) = \\
& = \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} = \\
& = \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} - \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot \cos(\omega \cdot t_0) = \\
& = \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot (1 - \cos(\omega \cdot t_0)) = \\
& = \left\{ \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot x) \right\} = \\
& = \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot (1 - 1 + 2 \cdot \sin^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})) = \\
& = \frac{4 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot \sin^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2}) = \\
& = \frac{A \cdot t_0}{\frac{t_0^2 \cdot \omega^2}{4}} \cdot \sin^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2}) = \\
& = \left\{ \frac{\sin(x)}{x} = Sa(x) \right\} = \\
& = A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0})$ to $F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})$.

Zadanie 4. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe.



Sygnał $f(t)$ możemy opisać jako funkcję przedziałową:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (-\infty; 0) \\ e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) & \text{dla } t \in (0; \infty) \end{cases} \quad (3.13)$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (3.14)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\infty} e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot dt + \int_0^{\infty} e^{-a \cdot t} \cdot \left(\frac{e^{j\omega_0 \cdot t} - e^{-j\omega_0 \cdot t}}{2 \cdot j} \right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= 0 + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot j} \left(\int_0^{\tau} e^{-a \cdot t} \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\tau} e^{-a \cdot t} \cdot e^{-j\omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \right) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot j} \left(\int_0^{\tau} e^{(-a+j\omega_0-j\omega) \cdot t} \cdot dt - \int_0^{\tau} e^{(-a-j\omega_0-j\omega) \cdot t} \cdot dt \right) = \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} z = (-a+j\omega_0-j\omega) \cdot t & w = (-a-j\omega_0-j\omega) \cdot t \\ dz = (-a+j\omega_0-j\omega) \cdot dt & dw = (-a-j\omega_0-j\omega) \cdot dt \\ dt = \frac{1}{(-a+j\omega_0-j\omega)} \cdot dz & dt = \frac{1}{(-a-j\omega_0-j\omega)} \cdot dw \end{array} \right\} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot j} \int_0^{\tau} e^z \cdot \frac{dz}{(-a+j\omega_0-j\omega)} - \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot j} \int_0^{\tau} e^w \cdot \frac{dw}{(-a-j\omega_0-j\omega)} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a+j\omega_0-j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^z \cdot dz - \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a-j\omega_0-j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^w \cdot dw = \\ &= \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a+j\omega_0-j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^z \Big|_0^{\tau} - \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a-j\omega_0-j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^w \Big|_0^{\tau} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a+j\omega_0-j\omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{(-a+j\omega_0-j\omega) \cdot t} \Big|_0^{\tau} + \end{aligned}$$

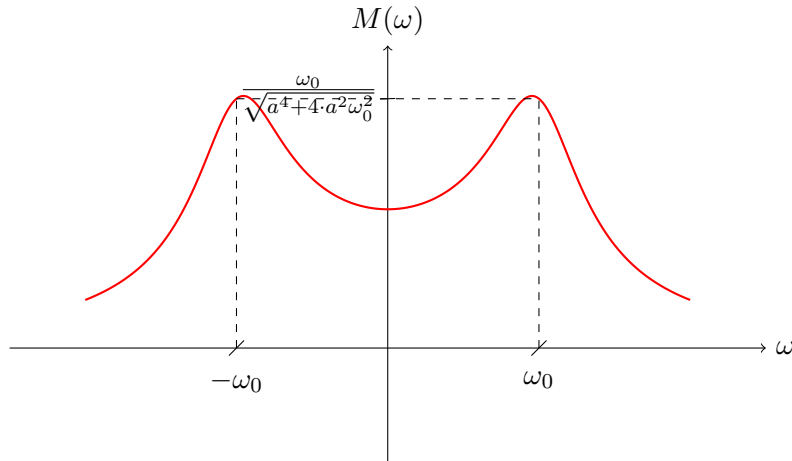
$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{(-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot t} \Big|_0^\tau \\
& = \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(e^{(-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot \tau} - e^{(-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot 0} \right) + \\
& - \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(e^{(-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot \tau} - e^{(-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot 0} \right) = \\
& = \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(e^{-a \cdot \tau} \cdot e^{(j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot \tau} \right) - \lim_{\tau \rightarrow \infty} 1 \right) + \\
& - \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(e^{-a \cdot \tau} \cdot e^{(-j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot \tau} \right) - \lim_{\tau \rightarrow \infty} 1 \right) = \\
& = \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{-a \cdot \tau}) \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{(j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot \tau} - 1 \right) + \\
& - \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \left(\lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{-a \cdot \tau}) \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{(-j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot \tau} - 1 \right) = \\
& = \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \left(0 \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{(j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot \tau} - 1 \right) + \\
& - \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} \cdot \left(0 \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{(-j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot \tau} - 1 \right) = \\
& = \frac{-1}{2 \cdot j \cdot (-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} + \frac{1}{2 \cdot j \cdot (-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} = \\
& = \frac{-(2 \cdot j \cdot (-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)) + 2 \cdot j \cdot (-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)}{2 \cdot j \cdot (-a + j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega) \cdot 2 \cdot j \cdot (-a - j \cdot \omega_0 - j \cdot \omega)} = \\
& = \frac{2 \cdot j \cdot a + 2 \cdot j^2 \cdot \omega_0 + 2 \cdot j^2 \cdot \omega - 2 \cdot j \cdot a + 2 \cdot j^2 \cdot \omega_0 - 2 \cdot j^2 \cdot \omega}{4 \cdot j^2 \cdot (a^2 + a \cdot j \cdot \omega_0 + a \cdot j \cdot \omega - a \cdot j \cdot \omega_0 - j^2 \cdot \omega_0^2 - j^2 \cdot \omega_0 \cdot \omega + a \cdot j \cdot \omega + j^2 \cdot \omega_0 \cdot \omega + j^2 \cdot \omega^2)} = \\
& = \frac{4 \cdot j^2 \cdot \omega_0}{4 \cdot j^2 \cdot (a^2 + 2 \cdot a \cdot j \cdot \omega - j^2 \cdot \omega_0^2 + j^2 \cdot \omega^2)} = \\
& = \frac{\omega_0}{a^2 + 2 \cdot a \cdot j \cdot \omega + \omega_0^2 - \omega^2} = \\
& = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a^2 + 2 \cdot a \cdot j \cdot \omega - \omega^2)} = \\
& = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a + j \cdot \omega)^2}
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t)$ to $F(j\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a + j \cdot \omega)^2}$.

Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned}
M(\omega) &= |F(j\omega)| = \\
&= \left| \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a + j \cdot \omega)^2} \right| = \\
&= \left| \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot j \cdot \omega + (j \cdot \omega)^2} \right| = \\
&= \left| \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot j \cdot \omega - \omega^2} \right| = \\
&= \left| \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + j \cdot 2 \cdot a \cdot \omega} \right| = \\
&= \left\{ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \right\} = \\
&= \frac{|\omega_0|}{|\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + j \cdot 2 \cdot a \cdot \omega|} =
\end{aligned}$$

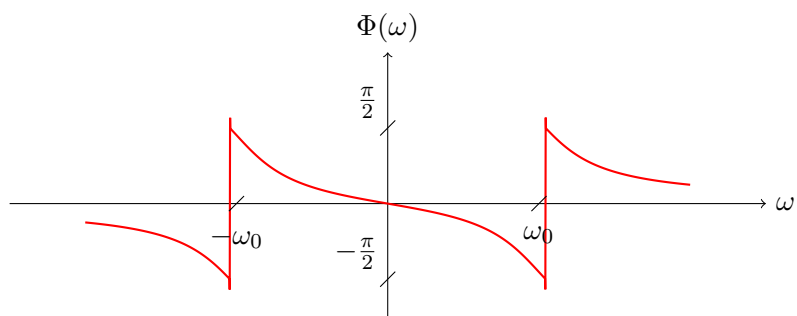
$$\begin{aligned}
&= \left\{ |a + j \cdot b| = \sqrt{a^2 + b^2} \right\} = \\
&= \frac{\omega_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2 + a^2)^2 + (2 \cdot a \cdot \omega)^2}}
\end{aligned}$$



Widmo amplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

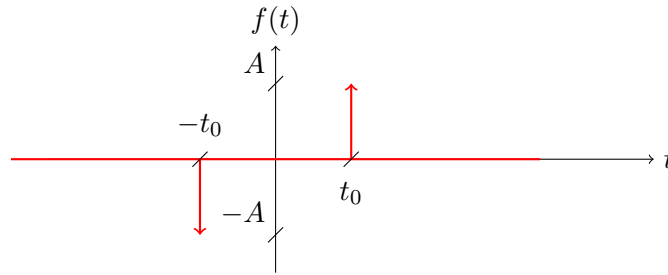
Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned}
\Phi(\omega) &= \arg \left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a + j \cdot \omega)^2} \right) = \\
&= \arg \left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot j \cdot \omega + (j \cdot \omega)^2} \right) = \\
&= \arg \left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot j \cdot \omega - \omega^2} \right) = \\
&= \arg \left(\frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + j \cdot 2 \cdot a \cdot \omega} \right) = \\
&= \left\{ \arg \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \right\} = \\
&= \arg(\omega_0) - \arg(\omega_0^2 - \omega^2 + a^2 + j \cdot 2 \cdot a \cdot \omega) = \\
&= \left\{ \arg(a + j \cdot b) = \arctg\left(\frac{b}{a}\right) \right\} = \\
&= \arctg\left(\frac{0}{\omega_0}\right) - \arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) = \\
&= \arctg(0) - \arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) = \\
&= 0 - \arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right) = \\
&= -\arctg\left(\frac{2 \cdot a \cdot \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + a^2}\right)
\end{aligned}$$



Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

Zadanie 5. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe.



W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0) \quad (3.15)$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (3.16)$$

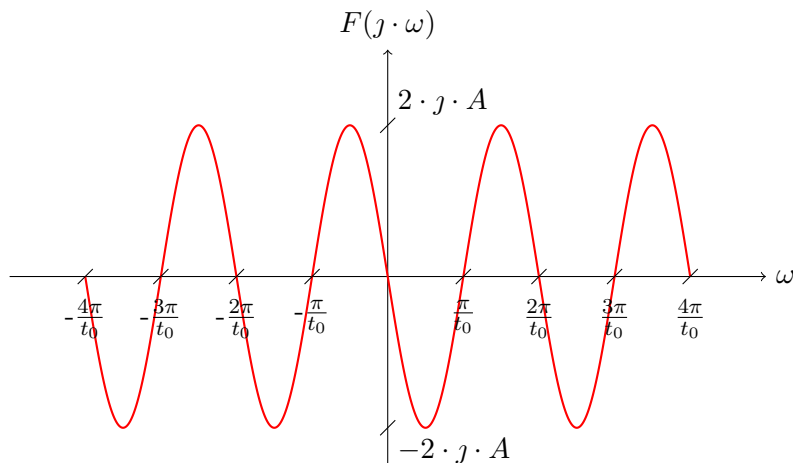
Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt - \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt - A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\ &= A \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} - A \cdot e^{-j\omega \cdot (-t_0)} = \\ &= A \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} - A \cdot e^{j\omega \cdot t_0} = \\ &= A \cdot (e^{-j\omega \cdot t_0} - e^{j\omega \cdot t_0}) = \\ &= A \cdot (-e^{j\omega \cdot t_0} + e^{-j\omega \cdot t_0}) = \\ &= -A \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}) = \\ &= -A \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}) \cdot \frac{2 \cdot j}{2 \cdot j} = \\ &= -2 \cdot j \cdot A \cdot \frac{e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}}{2 \cdot j} = \\ &= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2 \cdot j} \right\} = \\ &= -2 \cdot j \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0) \end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)$ to $F(j\omega) = -2 \cdot j \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0)$.

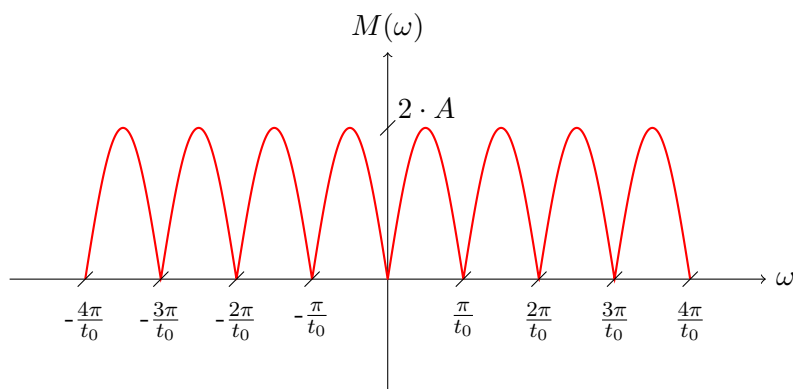
Narysujmy widmo sygnału $f(t) = A \cdot \delta(t - t_0) - A \cdot \delta(t + t_0)$ czyli:

$$F(j\omega) = -2 \cdot j \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0) \quad (3.17)$$



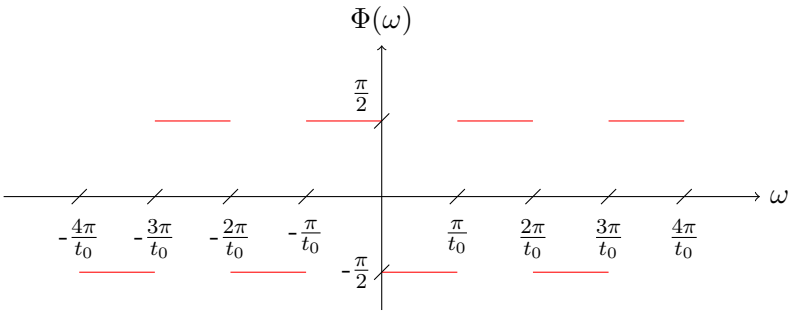
Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned} M(\omega) &= |F(j \cdot \omega)| \\ &= \sqrt{(-2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0))^2} \\ &= \sqrt{4 \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t_0)} \\ &= 2 \cdot A \cdot |\sin(\omega \cdot t_0)| \end{aligned}$$

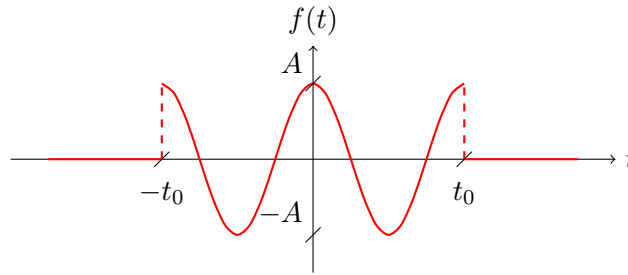


Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\Phi(\omega) = \arctg \left(\frac{\text{Im}\{F(j \cdot \omega)\}}{\text{Re}\{F(j \cdot \omega)\}} \right) \quad (3.18)$$



Zadanie 6. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe.



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right) & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \quad (3.19)$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (3.20)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{t_0} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{t_0} \cdot t\right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot dt + \int_{-t_0}^{t_0} A \cdot \frac{e^{j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t} + e^{-j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t}}{2} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt = \\ &= 0 + \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t} + e^{-j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t} \right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + 0 = \\ &= \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} + e^{-j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \right) \cdot dt = \\ &= \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t - j\omega \cdot t} + e^{-j\frac{2\pi}{t_0} \cdot t - j\omega \cdot t} \right) \cdot dt = \\ &= \frac{A}{2} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} \left(e^{j\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t} + e^{-j\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t} \right) \cdot dt = \\ &= \frac{A}{2} \cdot \left(\int_{-t_0}^{t_0} e^{j\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^{t_0} e^{-j\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t} \cdot dt \right) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z_1 = j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t \quad z_2 = -j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t \\ dz_1 = j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot dt \quad dz_2 = -j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot dt \\ dt = \frac{1}{j\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot dz_1 \quad dt = \frac{1}{-j\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot dz_2 \end{array} \right\} = \end{aligned}$$

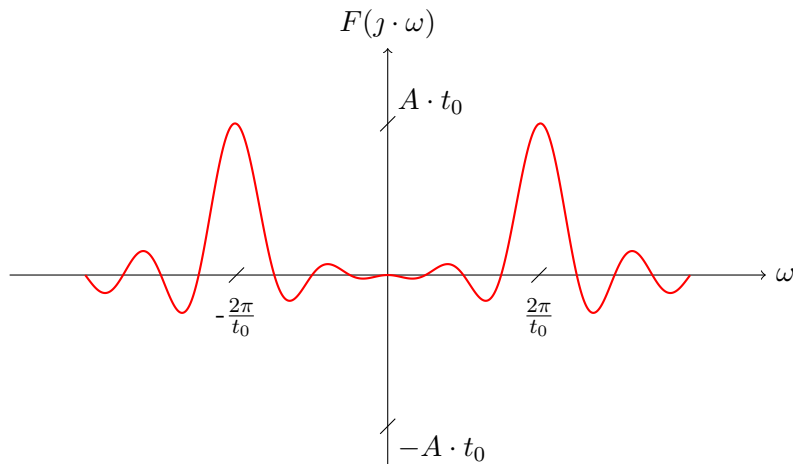
$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\int_{-t_0}^{t_0} e^{z_1} \cdot \frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot dz_1 + \int_{-t_0}^{t_0} e^{z_2} \cdot \frac{1}{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} e^{z_1} \cdot dz_1 + \frac{1}{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \int_{-t_0}^{t_0} e^{z_2} \cdot dz_2 \right) = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot e^{z_1} \Big|_{-t_0}^{t_0} + \frac{1}{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot e^{z_2} \Big|_{-t_0}^{t_0} \right) = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t} \Big|_{-t_0}^{t_0} + \frac{1}{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t} \Big|_{-t_0}^{t_0} \right) = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \left(e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot (-t_0)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \left(e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot (-t_0)} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \left(e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \left(e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \left(e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \left(e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \left(e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} \right) \cdot \frac{2}{2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \left(e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \right) \cdot \frac{2}{2} \right) = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \frac{e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0}}{2 \cdot j} + \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \frac{e^{j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} - e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0}}{2 \cdot j} \right) = \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \right\} = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \sin \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) + \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \sin \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right)} \cdot \sin \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) \cdot \frac{t_0}{t_0} + \frac{2}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right)} \cdot \sin \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \cdot \frac{t_0}{t_0} \right) = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot t_0}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} \cdot \sin \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega \right) \cdot t_0 \right) + \frac{2 \cdot t_0}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \cdot \sin \left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega \right) \cdot t_0 \right) \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2} \cdot \left(2 \cdot t_0 \cdot \frac{\sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right)}{\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0} + 2 \cdot t_0 \cdot \frac{\sin\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right)}{\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0} \right) = \\
&= \left\{ Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x} \right\} = \\
&= \frac{A}{2} \cdot \left(2 \cdot t_0 \cdot Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right) + 2 \cdot t_0 \cdot Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right) \right) = \\
&= A \cdot t_0 \cdot \left(Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right) + Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right) \right)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t)$ to $F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot \left(Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right) + Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right) \right)$.

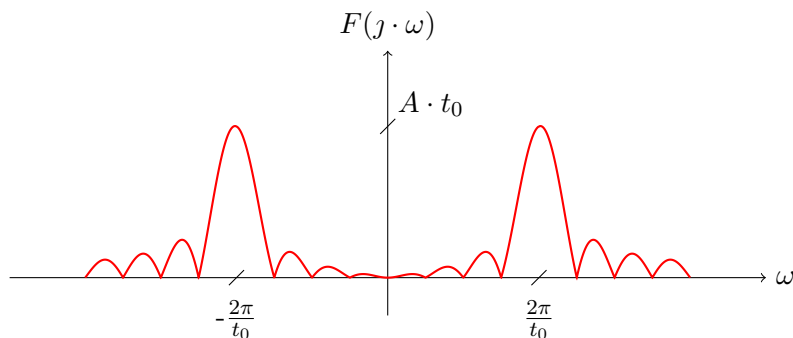
Narysujmy widmo sygnału $f(t)$ czyli:

$$F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot \left(Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} - \omega\right) \cdot t_0\right) + Sa\left(\left(\frac{2\pi}{t_0} + \omega\right) \cdot t_0\right) \right) \quad (3.21)$$



Widmo amplitudowe obliczamy ze wzoru:

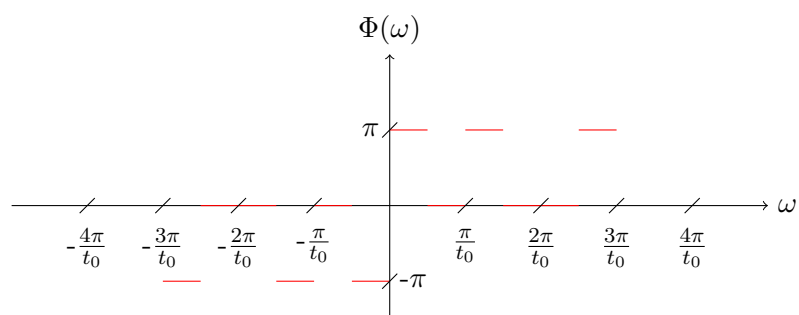
$$M(\omega) = |F(j \cdot \omega)| \quad (3.22)$$



Widmo amplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

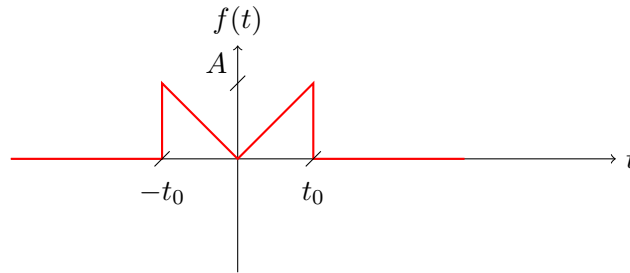
Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

$$\Phi(\omega) = \arctg\left(\frac{\text{Im}\{F(j \cdot \omega)\}}{\text{Re}\{F(j \cdot \omega)\}}\right) \quad (3.23)$$



Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

Zadanie 7. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku.



Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (3.24)$$

Do obliczenia całki potrzebujemy jawnej postaci równań opisujących proste na odcinkach $(-t_0, 0)$ oraz $(0, t_0)$.

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \quad (3.25)$$

Dla pierwszego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, A)$ oraz $(0, 0)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b .

$$\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + b \\ 0 = m \cdot 0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + b \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + 0 \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{A}{t_0} = m \\ 0 = b \end{cases}$$

Równanie prostej dla t z zakresu $(-t_0, 0)$ to:

$$f(t) = -\frac{A}{t_0} \cdot t$$

Dla drugiego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(0, 0)$ oraz (t_0, A) . Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b .

$$\begin{cases} A = m \cdot t_0 + b \\ 0 = m \cdot 0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot t_0 + b \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = m \cdot t_0 + 0 \\ 0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{A}{t_0} = m \\ 0 = b \end{cases}$$

Równanie prostej dla t z zakresu $(0, t_0)$ to:

$$f(t) = \frac{A}{t_0} \cdot t$$

Podsumowując, sygnał $f(t)$ możemy opisać jako funkcję przedziałową:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} \cdot t & \text{dla } t \in (-t_0; 0) \\ \frac{A}{t_0} \cdot t & \text{dla } t \in (0; t_0) \\ 0 & \text{dla } t \in (t_0; \infty) \end{cases} \quad (3.26)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji:

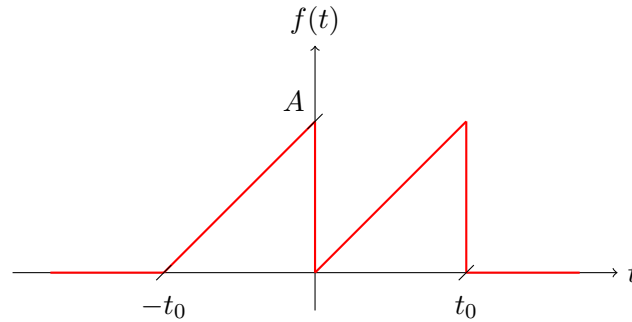
$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^0 \left(-\frac{A}{t_0} \cdot t \right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &+ \int_0^{t_0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot dt - \int_{-t_0}^0 \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &+ \int_0^{t_0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt = \\ &= 0 - \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-t_0}^0 t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \frac{A}{t_0} \cdot \int_0^{t_0} t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + 0 = \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} u = t & dv = e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ du = dt & v = \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^0 - \int_{-t_0}^0 \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \right) = \\ &+ \frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \Big|_0^{t_0} - \int_0^{t_0} \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(0 \cdot e^{-j\omega \cdot 0} - (-t_0) \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j\omega \cdot (-t_0)} + \frac{1}{j \cdot \omega} \left(\frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^0 \right) \right) + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} - 0 \cdot e^{-j\omega \cdot 0} + \frac{1}{j \cdot \omega} \left(\frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \Big|_0^{t_0} \right) \right) = \\
&= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(0 - t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{j\omega \cdot t_0} - \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-j\omega \cdot 0} - e^{-j\omega \cdot (-t_0)} \right) \right) + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} - 0 - \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot 0} \right) \right) = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{j\omega \cdot t_0} + \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(e^0 - e^{-j\omega \cdot (-t_0)} \right) \right) + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \left(-t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} - \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-j\omega \cdot t_0} - e^0 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{j\omega \cdot t_0} + \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(1 - e^{-j\omega \cdot (-t_0)} \right) \right) + \\
&- \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} + \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-j\omega \cdot t_0} - 1 \right) \right) = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{j\omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(1 - e^{-j\omega \cdot (-t_0)} \right) + \\
&- \frac{A}{t_0} \cdot t_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-j\omega \cdot t_0} - 1 \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{j\omega \cdot t_0} - \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(1 - e^{-j\omega \cdot (-t_0)} \right) - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \left(e^{-j\omega \cdot t_0} - 1 \right) = \\
&= \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot \left(e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0} \right) + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-j\omega \cdot (-t_0)} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{2 \cdot j \cdot \omega} \cdot \left(e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0} \right) + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{j\omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}}{2 \cdot j} + \\
&+ 2 \cdot \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} - \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(e^{j\omega \cdot t_0} + e^{-j\omega \cdot t_0} \right) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}}{2 \cdot j} + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(2 - \frac{2}{2} \cdot \left(e^{j\omega \cdot t_0} + e^{-j\omega \cdot t_0} \right) \right) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}}{2 \cdot j} + \\
&+ \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot \left(2 - 2 \cdot \frac{e^{j\omega \cdot t_0} + e^{-j\omega \cdot t_0}}{2} \right) = \\
&= \begin{cases} \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \\ \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \end{cases} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot (2 - 2 \cdot \cos(\omega \cdot t_0)) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(\omega \cdot t_0) \right) = \\
&= \left\{ \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot x) \right\} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{4}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega} \cdot \frac{t_0}{t_0} \sin(\omega \cdot t_0) + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{4}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot \frac{t_0}{t_0} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) = \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{t_0 \cdot \omega} + A \cdot t_0 \cdot \frac{4}{-1 \cdot \omega^2 \cdot t_0^2} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) = \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{t_0 \cdot \omega} + A \cdot t_0 \cdot \frac{-1}{\frac{\omega^2 \cdot t_0^2}{4}} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right) = \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{t_0 \cdot \omega} - A \cdot t_0 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)}{\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)^2} = \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{t_0 \cdot \omega} - A \cdot t_0 \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)}{\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0} \right)^2 = \\
&= \left\{ Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x} \right\} = \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa(\omega \cdot t_0) - A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t)$ to $F(j\omega) = 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa(\omega \cdot t_0) - A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot t_0\right)$.

Zadanie 8. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku oraz narysuj jego widmo amplitudowe i fazowe.



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{t_0} \cdot t + A & t \in (-t_0; 0) \\ \frac{A}{t_0} \cdot t & t \in (0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \quad (3.27)$$

Transformatę Fouriera obliczamy ze wzoru:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (3.28)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^0 \left(\frac{A}{t_0} \cdot t + A \right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_0^{t_0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{-t_0} 0 dt + \int_{-t_0}^0 \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-t_0}^0 A \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_0^{t_0} \frac{A}{t_0} \cdot t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} 0 \cdot dt = \\ &= \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-t_0}^0 t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + A \cdot \int_{-t_0}^0 e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \frac{A}{t_0} \cdot \int_0^{t_0} t \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} u &= t \\ du &= dt \end{array} \quad \begin{array}{ll} dv &= e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \\ v &= \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^0 + \int_{-t_0}^0 \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \right) + \\ &+ A \cdot \int_{-t_0}^0 e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \\ &+ \frac{A}{t_0} \cdot \left(t \cdot \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \Big|_0^{t_0} + \int_0^{t_0} \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \right) = \\ &= \frac{A}{t_0} \cdot \left(\left(0 \cdot \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot 0} + t_0 \cdot \frac{1}{-j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot (-t_0)} \right) + \frac{1}{-j\omega} \cdot \int_{-t_0}^0 e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \right) + \\ &+ A \cdot \int_{-t_0}^0 e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{A}{t_0} \cdot \left(\left(t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - 0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot 0} \right) + \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot \int_0^{t_0} e^{-j \cdot \omega \cdot t} \cdot dt \right) = \\
& = \left\{ \begin{array}{l} z = -j \cdot \omega \cdot t \\ dz = -j \cdot \omega \cdot dt \\ dt = \frac{dz}{-j \cdot \omega} \end{array} \right\} = \\
& = \frac{A}{t_0} \cdot \left(\left(0 + t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} \right) + \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot \int_{-t_0}^0 e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot \omega} \right) + \\
& + A \cdot \int_{-t_0}^0 e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot \omega} + \\
& + \frac{A}{t_0} \cdot \left(\left(t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - 0 \right) + \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot \int_0^{t_0} e^z \cdot \frac{dz}{-j \cdot \omega} \right) = \\
& = \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot \int_{-t_0}^0 e^z \cdot dz \right) + \\
& + A \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot \int_{-t_0}^0 e^z \cdot dz + \\
& + \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot \int_0^{t_0} e^z \cdot dz \right) = \\
& = \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{-1 \cdot \omega^2} \cdot e^z \Big|_{-t_0}^0 \right) + \\
& - A \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^z \Big|_{-t_0}^0 + \\
& + \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{-1 \cdot \omega^2} \cdot e^z \Big|_0^{t_0} \right) = \\
& = \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{-1 \cdot \omega^2} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^0 \right) + \\
& - A \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \Big|_{-t_0}^0 + \\
& + \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{-1 \cdot \omega^2} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} \Big|_0^{t_0} \right) = \\
& = \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{-1 \cdot \omega^2} \cdot \left(e^{-j \cdot \omega \cdot 0} - e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)} \right) \right) + \\
& - A \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \left(e^{-j \cdot \omega \cdot 0} - e^{-j \cdot \omega \cdot (-t_0)} \right) + \\
& + \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{-1 \cdot \omega^2} \cdot \left(e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - e^{-j \cdot \omega \cdot 0} \right) \right) = \\
& = \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{-1 \cdot \omega^2} \cdot \left(e^0 - e^{j \cdot \omega \cdot t_0} \right) \right) + \\
& - A \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \left(e^0 - e^{j \cdot \omega \cdot t_0} \right) + \\
& + \frac{A}{t_0} \cdot \left(t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{1}{-1 \cdot \omega^2} \cdot \left(e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - e^0 \right) \right) = \\
& = \frac{A}{t_0} \cdot t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{-1 \cdot \omega^2} \cdot \left(1 - e^{j \cdot \omega \cdot t_0} \right) + \\
& - A \cdot \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \left(1 - e^{j \cdot \omega \cdot t_0} \right) + \\
& + \frac{A}{t_0} \cdot t_0 \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0} \cdot \frac{1}{-1 \cdot \omega^2} \cdot \left(e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} - 1 \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{j\omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot (1 - e^{j\omega \cdot t_0}) + \\
&- \frac{A}{j \cdot \omega} + \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{j\omega \cdot t_0} + \\
&- \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot (e^{-j\omega \cdot t_0} - 1) = \\
&= -\frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} + \frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot e^{j\omega \cdot t_0} - \frac{A}{j \cdot \omega} + \\
&- \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} = \\
&= \frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot e^{j\omega \cdot t_0} - \frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} - \frac{A}{j \cdot \omega} - \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} = \\
&= \frac{A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}) - \frac{A}{j \cdot \omega} (1 + e^{-j\omega \cdot t_0}) = \\
&= \frac{A \cdot 2 \cdot j}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot \frac{e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}}{2 \cdot j} - \frac{A}{j \cdot \omega} (1 + e^{-j\omega \cdot t_0}) = \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2 \cdot j} \right\} = \\
&= j \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + j \cdot \frac{A}{\omega} (1 + e^{-j\omega \cdot t_0})
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t)$ to $F(j\omega) = j \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + j \cdot \frac{A}{\omega} (1 + e^{-j\omega \cdot t_0})$.

Narysujmy widmo amplitudowe sygnału $f(t)$ czyli:

$$M(\omega) = |F(j\omega)| \quad (3.29)$$

Podstawmy wzór na obliczoną transformatę Fouriera.

$$\begin{aligned}
M(\omega) &= |F(j\omega)| = \\
&= \left| j \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + j \cdot \frac{A}{\omega} (1 + e^{-j\omega \cdot t_0}) \right| = \\
&= \left\{ e^{jx} = \cos(x) + j \cdot \sin(x) \right\} = \\
&= \left| j \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + j \cdot \frac{A}{\omega} (1 + \cos(-\omega \cdot t_0) + j \cdot \sin(-\omega \cdot t_0)) \right| = \\
&= \left| j \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + j \cdot \frac{A}{\omega} (1 + \cos(\omega \cdot t_0) - j \cdot \sin(\omega \cdot t_0)) \right| = \\
&= \left| j \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + j \cdot \frac{A}{\omega} + j \cdot \frac{A}{\omega} \cdot \cos(\omega \cdot t_0) - j \cdot \frac{A}{\omega} \cdot j \cdot \sin(\omega \cdot t_0) \right| = \\
&= \left| j \cdot \left(\frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + \frac{A}{\omega} + \frac{A}{\omega} \cdot \cos(\omega \cdot t_0) \right) + \frac{A}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) \right| = \\
&= \left| \frac{A}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + j \cdot \left(\frac{2 \cdot A}{t_0 \cdot \omega^2} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + \frac{A}{\omega} \cdot (1 + \cos(\omega \cdot t_0)) \right) \right| = \\
&= \left| \frac{A}{\omega} \cdot \left(\sin(\omega \cdot t_0) + j \cdot \left(\frac{2}{t_0 \cdot \omega} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + 1 + \cos(\omega \cdot t_0) \right) \right) \right| = \\
&= \left| \frac{A}{\omega} \right| \cdot \left| \sin(\omega \cdot t_0) + j \cdot \left(\frac{2}{t_0 \cdot \omega} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + 1 + \cos(\omega \cdot t_0) \right) \right| = \\
&= \frac{A}{|\omega|} \cdot \sqrt{\sin^2(\omega \cdot t_0) + \left(\frac{2}{t_0 \cdot \omega} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + 1 + \cos(\omega \cdot t_0) \right)^2}
\end{aligned}$$

Wyznamy gdzie znajdują się miejsca zerowe modułu transformaty Fouriera

$$M(\omega) = \frac{A}{|\omega|} \cdot \sqrt{\sin^2(\omega \cdot t_0) + \left(\frac{2}{t_0 \cdot \omega} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + 1 + \cos(\omega \cdot t_0)\right)^2} = 0 \parallel \cdot \frac{|\omega|}{A}$$

$$\sqrt{\sin^2(\omega \cdot t_0) + \left(\frac{2}{t_0 \cdot \omega} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + 1 + \cos(\omega \cdot t_0)\right)^2} = 0 \parallel (\cdot)^2$$

$$\sin^2(\omega \cdot t_0) + \left(\frac{2}{t_0 \cdot \omega} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + 1 + \cos(\omega \cdot t_0)\right)^2 = 0$$

Suma kwadratów może być równa zero wtedy i tylko wtedy gdy oba czynniki są równe zero a więc:

$$\begin{aligned}\sin^2(\omega \cdot t_0) &= 0 \\ \sin(\omega \cdot t_0) &= 0 \\ \sin(\omega \cdot t_0) &= \sin(\pi \cdot k) \\ \omega \cdot t_0 &= \pi \cdot k \\ \omega &= \frac{\pi}{t_0} \cdot k\end{aligned}$$

oraz

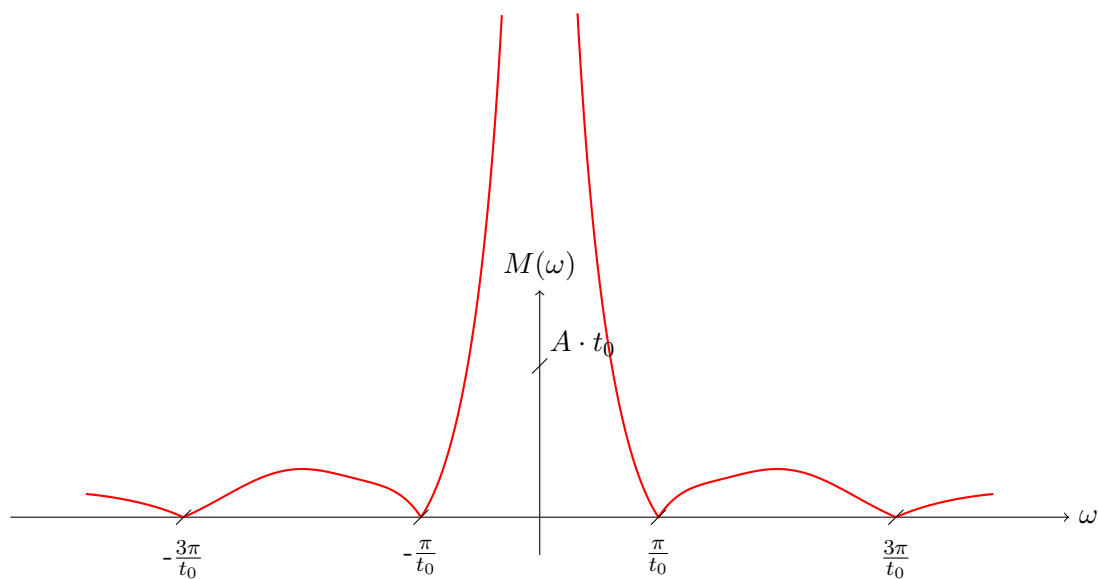
$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{t_0 \cdot \omega} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + 1 + \cos(\omega \cdot t_0)\right)^2 &= 0 \\ \frac{2}{t_0 \cdot \omega} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + 1 + \cos(\omega \cdot t_0) &= 0 \\ \left\{ \begin{aligned} 1 + \cos(x) &= 2 \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ Sa(x) &= \frac{\sin(x)}{x} \end{aligned} \right\} \\ 2 \cdot Sa(\omega \cdot t_0) + 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) &= 0\end{aligned}$$

Ponownie suma funkcji może być zerem wtedy i tylko wtedy gdy obie są równe zero a więc

$$\begin{aligned}2 \cdot Sa(\omega \cdot t_0) &= 0 \\ Sa(\omega \cdot t_0) &= 0 \\ Sa(\omega \cdot t_0) &= Sa(\pi \cdot k) \\ \omega \cdot t_0 &= \pi \cdot k \\ \omega &= \frac{\pi}{t_0} \cdot k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \cdot \cos^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) &= 0 \\
\cos^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) &= 0 \\
\cos\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) &= 0 \\
\cos\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k\right) \\
\frac{\omega \cdot t_0}{2} &= \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k \\
\omega \cdot t_0 &= \pi + 2 \cdot \pi \cdot k \\
\omega &= \frac{\pi + 2 \cdot \pi \cdot k}{t_0}
\end{aligned}$$

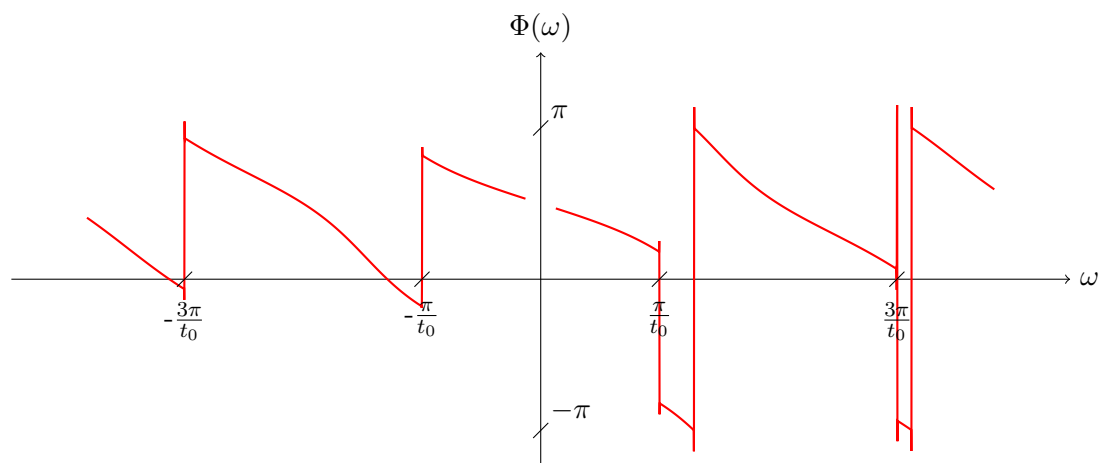
A więc ostatecznie miejsca zerową znajdują się w miejscach: $\omega = \frac{\pi + 2 \cdot \pi \cdot k}{t_0}$ A więc widmo amplitudowe wygląda następująco



Widmo amplitudowe sygnału rzeczywistego jest zawsze parzyste.

Widmo fazowe obliczamy ze wzoru:

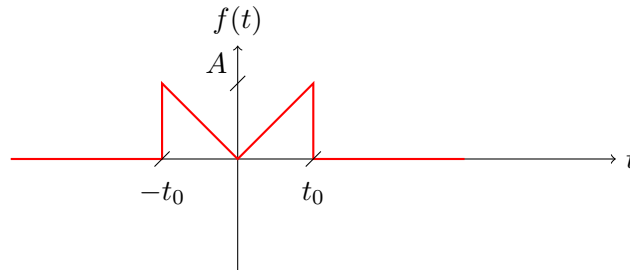
$$\Phi(\omega) = \arctg\left(\frac{\text{Im}\{F(j \cdot \omega)\}}{\text{Re}\{F(j \cdot \omega)\}}\right) \quad (3.30)$$



Widmo fazowe sygnału rzeczywistego jest zawsze nieparzyste.

3.2 Wykorzystanie twierdzeń do obliczeń transformaty Fouriera

Zadanie 1. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku wykorzystując twierdzenia opisujące właściwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj informację o tym, że $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$ oraz $\mathcal{F}\{\Lambda(t)\} = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \left(\Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) - \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) \right) \quad (3.31)$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych sygnałów elementarnych, czyli:

$$f(t) = A \cdot (f_1(t) - f_2(t)) \quad (3.32)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \\ f_2(t) &= \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) \end{aligned}$$

Wyznamy transformtę sygnału $f_1(t)$, czyli $F_1(j\omega)$.

Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali mamy:

$$\begin{aligned} g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\ f(t) = g(\alpha \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{2 \cdot t_0}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{2 \cdot t_0}}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2 \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot 2 \cdot t_0}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\Pi\left(\frac{t}{2 \cdot t_0}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2 \cdot t_0 \cdot Sa(\omega \cdot t_0)$$

Transformata sygnału $f_1(t)$ to:

$$F_1(j\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\} = 2 \cdot t_0 \cdot Sa(\omega \cdot t_0) \quad (3.33)$$

Wyznamy transformtę sygnału $f_2(t)$, czyli $F_2(j\omega)$.

Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Lambda(t)\} = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali:

$$\begin{aligned} g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\ f(t) = g(\alpha \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{t_0}\right|} \cdot Sa^2\left(\frac{\frac{\omega}{t_0}}{2}\right) \\ \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \end{aligned}$$

Transformata sygnału $f_2(t)$ to:

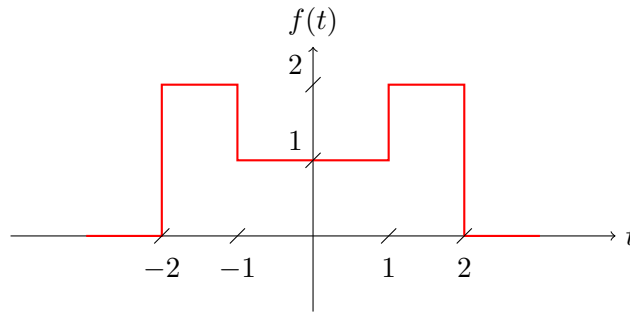
$$F_2(j\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\} = t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \quad (3.34)$$

Czyli transformata sygnału $f(t)$ to:

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = A \cdot \left(2 \cdot t_0 \cdot Sa(\omega \cdot t_0) - t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)\right)$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{2t_0}\right) - A \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right)$ to $F(j\omega) = 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa(\omega \cdot t_0) - A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$.

Zadanie 2. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku wykorzystując twierdzenia opisujące właściwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj informację o tym, że $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Podaj co najmniej 2 sposoby opisu sygnału $f(t)$.



W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = 2 \cdot \Pi\left(\frac{t}{4}\right) - \Pi\left(\frac{t}{2}\right) \quad (3.35)$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych sygnałów elementarnych, czyli:

$$f(t) = 2 \cdot f_1(t) - f_2(t) \quad (3.36)$$

gdzie:

$$f_1(t) = \Pi\left(\frac{t}{4}\right)$$

$$f_2(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$$

Wyznamy transformtę sygnału $f_1(t)$, czyli $F_1(j\omega)$.

Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali mamy:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega)$$

$$f_1(t) = g(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(j\frac{\omega}{\alpha})$$

otrzymujemy:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\Pi\left(\frac{t}{4}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{4}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot \frac{1}{4}}{2}\right)$$

$$\Pi\left(\frac{t}{4}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 4 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot 4}{2}\right)$$

$$\Pi\left(\frac{t}{4}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 4 \cdot Sa(2 \cdot \omega)$$

Transformata sygnału $f_1(t)$ to:

$$F_1(j\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\} = 4 \cdot Sa(2 \cdot \omega) \quad (3.37)$$

Wyznamy transformtę sygnału $f_2(t)$, czyli $F_2(j\omega)$.

Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa(\frac{\omega}{2})$.

Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali:

$$\begin{aligned} g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\ f_2(t) = g(\alpha \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(j\frac{\omega}{\alpha}) \end{aligned}$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{2}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\omega}{\frac{1}{2}}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot 2}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2 \cdot Sa(\omega) \end{aligned}$$

Transformata sygnału $f_2(t)$ to:

$$F_2(j\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\} = 2 \cdot Sa(\omega) \quad (3.38)$$

Czyli transformata sygnału $f(t)$ to:

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = 2 \cdot (4 \cdot Sa(2 \cdot \omega)) - 2 \cdot Sa(\omega) = 8 \cdot Sa(2 \cdot \omega) - 2 \cdot Sa(\omega)$$

Transformata sygnału $f(t) = 2 \cdot \Pi\left(\frac{t}{4}\right) - \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$ to $F(j\omega) = 8 \cdot Sa(2 \cdot \omega) - 2 \cdot Sa(\omega)$.

Inne możliwości opisu sygnał $f(t)$ za pomocą sygnałów elementarnych:

$$\begin{aligned} f(t) &= \Pi\left(\frac{t}{4}\right) + \Pi\left(t - \frac{3}{2}\right) + \Pi\left(t + \frac{3}{2}\right) \\ f(t) &= \Pi\left(\frac{t}{2}\right) + 2 \cdot \Pi\left(t - \frac{3}{2}\right) + 2 \cdot \Pi\left(t + \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

SPOSÓB II:

Rozważmy następujący opis sygnału $f(t)$ za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t}{4}\right) + \Pi\left(t - \frac{3}{2}\right) + \Pi\left(t + \frac{3}{2}\right)$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych sygnałów elementarnych, czyli:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \Pi\left(\frac{t}{4}\right) \\ f_2(t) &= \Pi\left(t - \frac{3}{2}\right) \\ f_3(t) &= \Pi\left(t + \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

Wyznamy transformtę sygnału $f_1(t)$, czyli $F_1(j\omega)$.

Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali mamy:

$$\begin{aligned} g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\ f_1(t) = g(\alpha \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(j\frac{\omega}{\alpha}) \end{aligned}$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{4}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{4}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{4}}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{4}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 4 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot 4}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{4}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 4 \cdot Sa(2 \cdot \omega) \end{aligned}$$

Transformata sygnału $f_1(t)$ to:

$$F_1(j\omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\} = 4 \cdot Sa(2 \cdot \omega) \quad (3.39)$$

Wyznamy transformtę sygnału $f_2(t)$, czyli $F_2(j\omega)$.

Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Wykorzystując twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie czasu:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega)$$

$$f_2(t) = g(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(j\omega) = G(j\omega) \cdot e^{-j\omega \cdot t_0}$$

otrzymujemy:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\Pi\left(t - \frac{3}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{3}{2}}$$

Transformata sygnału $f_2(t)$ to:

$$F_2(j\omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{3}{2}} \quad (3.40)$$

Wyznamy transformtę sygnału $f_3(t)$, czyli $F_3(j\omega)$.

Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Wykorzystując twierdzenie o przesunięciu w dziedzinie czasu:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega)$$

$$f_3(t) = g(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_3(j\omega) = G(j\omega) \cdot e^{-j\omega \cdot t_0}$$

otrzymujemy:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\Pi\left(t + \frac{3}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot (-\frac{3}{2})}$$

$$\Pi\left(t + \frac{3}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{j\omega \cdot \frac{3}{2}}$$

Transformata sygnału $f_3(t)$ to:

$$F_3(j\omega) = \mathcal{F}\{f_3(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{j\omega \cdot \frac{3}{2}} \quad (3.41)$$

Czyli transformata sygnału $f(t)$ to:

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = 4 \cdot Sa(2 \cdot \omega) + Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{3}{2}} + Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{j\omega \cdot \frac{3}{2}} =$$

$$= 4 \cdot Sa(2 \cdot \omega) + Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \left(e^{-j\omega \cdot \frac{3}{2}} + e^{j\omega \cdot \frac{3}{2}}\right) =$$

$$= 4 \cdot Sa(2 \cdot \omega) + Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot 2 \cdot \frac{e^{-j\omega \cdot \frac{3}{2}} + e^{j\omega \cdot \frac{3}{2}}}{2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= 4 \cdot \text{Sa}(2 \cdot \omega) + \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot 2 \cdot \cos\left(\omega \cdot \frac{3}{2}\right) = \\
&= 4 \cdot \text{Sa}(2 \cdot \omega) + 2 \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega \cdot \frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = \Pi\left(\frac{t}{4}\right) + \Pi\left(t - \frac{3}{2}\right) + \Pi\left(t + \frac{3}{2}\right)$ to $F(j\omega) = 4 \cdot \text{Sa}(2 \cdot \omega) + 2 \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega \cdot \frac{3}{2}\right)$.

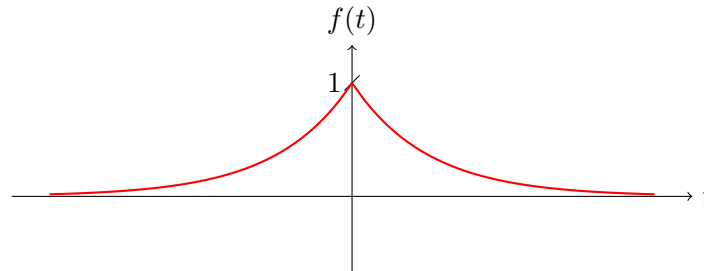
Uwagi końcowe:

Rozwiązania uzyskane sposobem I i II to odpowiednio:

$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= 8 \cdot \text{Sa}(2 \cdot \omega) - 2 \cdot \text{Sa}(\omega) \\
F(j\omega) &= 4 \cdot \text{Sa}(2 \cdot \omega) + 2 \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega \cdot \frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

Można wykazać, że jest to ta sama transformata (mimo, iż uzyskane równania opisujące transformatę są różne).

Zadanie 3. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = e^{-|t|}$ przedstawionego na rysunku wykorzystując twierdzenia opisujące właściwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj informację o tym, że $\mathcal{F}\{A \cdot \mathbb{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t}\} = \frac{A}{a + j \cdot \omega}$.

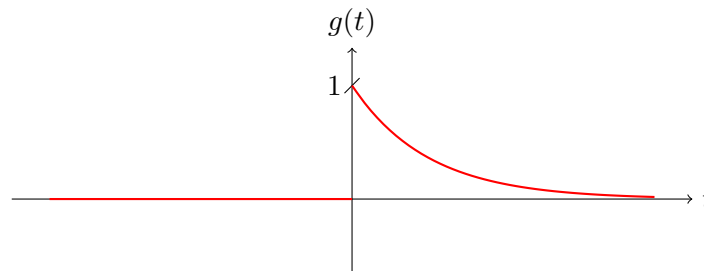


W pierwszej kolejności należy opisać sygnał za pomocą wzoru:

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{dla } t \in (-\infty; 0) \\ e^{-t} & \text{dla } t \in (0; \infty) \end{cases} \quad (3.42)$$

Oznaczmy sygnał $\mathbb{1}(t) \cdot e^{-t}$ jako $g(t)$:

$$g(t) = \mathbb{1}(t) \cdot e^{-t} \quad (3.43)$$



Teraz sygnał $f(t)$ możemy wyrazić jako liniową kombinację sygnałów $g(t)$ oraz $g(-t)$:

$$f(t) = g(t) + g(-t) \quad (3.44)$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych sygnałów.

Wyznamy transformatę sygnału $g(t)$, czyli $G(j\omega)$.

Z treści zadania wiemy, że:

$$\mathcal{F}\{A \cdot \mathbb{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t}\} = \frac{A}{a + j \cdot \omega} \quad (3.45)$$

Podstawiając $A = 1$ oraz $a = 1$ otrzymujemy wprost transformatę sygnału $g(t)$, czyli $G(j\omega)$:

$$A \cdot \mathbb{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A}{a + j \cdot \omega}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$g(t) = \mathbb{1}(t) \cdot e^{-t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 + j \cdot \omega} = G(j\omega)$$

Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali, możemy obliczyć transformatę sygnału $g(-t)$:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega)$$

$$f(t) = g(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(j\frac{\omega}{\alpha})$$

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 + j \cdot \omega}$$

$$g(-1 \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|-1|} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\omega}{-1}}$$

$$g(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1 - j \cdot \omega}$$

$$g(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 - j \cdot \omega}$$

Czyli transformata sygnału $f(t)$ to:

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{1 + j \cdot \omega} + \frac{1}{1 - j \cdot \omega}$$

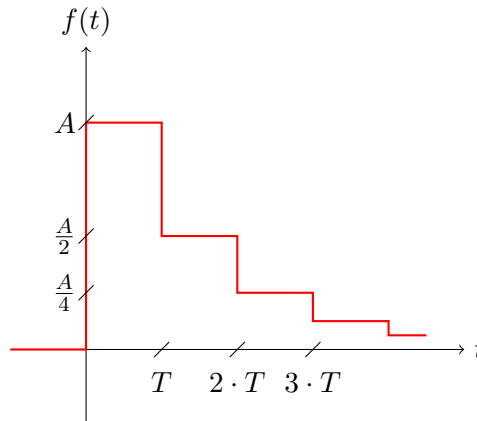
$$F(j\omega) = \frac{1 - j \cdot \omega + 1 + j \cdot \omega}{(1 + j \cdot \omega) \cdot (1 - j \cdot \omega)}$$

$$F(j\omega) = \frac{2}{1 - j^2 \cdot \omega^2}$$

$$F(j\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}$$

Transformata sygnału $f(t) = e^{-|t|}$ to $F(j\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}$.

Zadanie 4. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału prostokątnego $g(t) = \Pi(t)$ jest równa $G(j\omega) = \text{Sa}(\frac{\omega}{2})$.



Sygnał zbudowany jest z ciągu poprzysuwanych sygnałów prostokątnych o wykładniczo malejącej amplitudzie.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2} - n \cdot T}{T}\right)$$

Nasz sygnał jest nieskończoną sumą funkcji prostokątnych. Korzystając z liniowości transformaty fouriera

$$\begin{aligned} f_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega) \\ f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(j\omega) \\ f(t) &= \alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \alpha \cdot F_1(j\omega) + \beta \cdot F_2(j\omega) \end{aligned}$$

możemy napisać że:

$$F(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot H_n(j\omega)$$

gdzie $H_n(j\omega)$ jest transformatą Fouriera odpowiednio przesuniętego sygnału prostokątnego $h_n(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2} - n \cdot T}{T}\right)$.

Transformata sygnału $g(t) = \Pi(t)$ jest równa $G(j\omega) = \text{Sa}(\frac{\omega}{2})$. Postać funkcji $g(t)$ nie jest identyczna z postacią funkcji $h_n(t)$, funkcja różni się skalą i przesunięciem. Zaczniemy od skali.

Wyznaczamy transformatę funkcji przeskalowanej $h(t) = \Pi(\frac{t}{T})$

Z twierdzenia o zmianie skali mamy

$$\begin{aligned} g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\ h(t) &= g(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(j\frac{\omega}{\alpha}) \end{aligned}$$

a więc otrzymujemy

$$\begin{aligned} h(t) &= \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \\ &= \Pi\left(\frac{1}{T} \cdot t\right) = \\ &= g\left(\frac{1}{T} \cdot t\right) \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{1}{T}$$

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{1}{\frac{1}{T}} \cdot G\left(\frac{j\omega}{\frac{1}{T}}\right) = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{T}} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{T}}{2}\right) = \\ &= T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \end{aligned}$$

Dalej wyznaczamy transformaty funkcji przeskalowanej i przesuniętej $h_n(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2} - n \cdot T}{T}\right)$
Korzystając z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie czasu

$$\begin{aligned} h_n(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H_n(j\omega) \\ h(t) = h_n(t - t_0) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) = H_n(j\omega) \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} \end{aligned}$$

możemy napisać że:

$$\begin{aligned} H_n(j\omega) &= H(j\omega) \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} = \\ &= T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot (\frac{T}{2} + n \cdot T)} \end{aligned}$$

Ostatecznie wzór na transformatę sygnału $f(t)$ jest równy

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot H_n(j\omega) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot (\frac{T}{2} + n \cdot T)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot e^{-j\omega \cdot n \cdot T} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \frac{A}{2^n} \cdot e^{-j\omega \cdot n \cdot T} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot A \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega \cdot T}\right)^n = \\
&= A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega \cdot T}\right)^n
\end{aligned}$$

Można zauważyć że suma w rozwiązaniu to szereg geometryczny. Z wzoru na sumę szeregu geometrycznego mamy

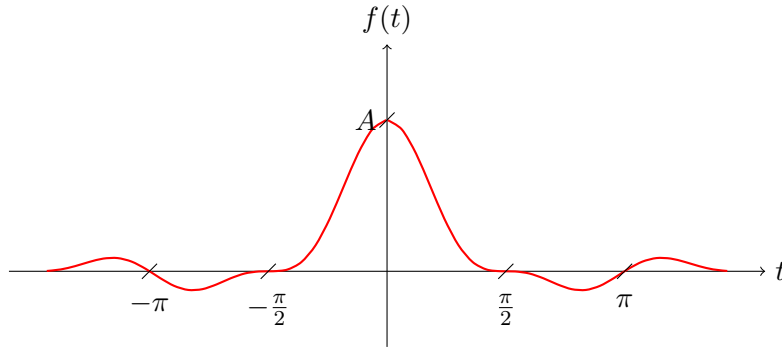
$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega \cdot T}\right)^n = \\
&= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \right\} = \\
&= A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega \cdot T}}
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ równa się:

$$F(j\omega) = A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega \cdot T}}$$

Zadanie 5. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału prostokątnego $g(t) = \Pi(t)$ jest równa $G(j\omega) = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = A \cdot \frac{\cos^2(\omega_0 \cdot t)}{\omega_0 \cdot t} \cdot \sin(2 \cdot \omega_0 \cdot t)$$



Przepiszmy wzór naszej funkcji następująco

$$\begin{aligned} f(t) &= A \cdot \frac{\cos^2(\omega_0 \cdot t)}{\omega_0 \cdot t} \cdot \sin(2 \cdot \omega_0 \cdot t) = \\ &= A \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t) \frac{\sin(2 \cdot \omega_0 \cdot t)}{\omega_0 \cdot t} = \\ &= A \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t) \frac{2 \cdot \sin(2 \cdot \omega_0 \cdot t)}{2 \cdot \omega_0 \cdot t} = \\ &= \left\{ Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x} \right\} = \\ &= A \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t) 2 \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) = \\ &= 2 \cdot A \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \end{aligned}$$

Nasz sygnał jest iloczynem pewnej funkcji $h(t)$ oraz cosinusów

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \cdot A \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = \\ f(t) &= 2 \cdot A \cdot h(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \end{aligned}$$

gdzie

$$h(t) = Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t)$$

Wyznamy transformatę sygnału $h(t)$. Z treści zadania wiemy że transformata sygnału $g(t) = \Pi(t)$ jest równa $G(j\omega) = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Postać funkcji $g(t)$ nie jest identyczna z postacią funkcji $h(t)$, funkcja różni się skalą. Wyznaczamy transformatę funkcji przeskalowanej $h(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$

Z twierdzenia o zmianie skali mamy

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega)$$

$$h(t) = g(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(j\frac{\omega}{\alpha})$$

a więc otrzymujemy

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) =$$

$$= \Pi\left(\frac{1}{T} \cdot t\right) =$$

$$= g\left(\frac{1}{T} \cdot t\right)$$

$$\alpha = \frac{1}{T}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{T}} \cdot G\left(j\frac{\omega}{\frac{1}{T}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{T}} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{\frac{1}{T}}}{2}\right) =$$

$$= T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right)$$

Dalej wyznaczamy transformatę funkcji przeskalowanej i przesuniętej $h_n(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2} - n \cdot T}{T}\right)$
Korzystając z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie czasu

$$h_n(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H_n(j\omega)$$

$$h(t) = h_n(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) = H_n(j\omega) \cdot e^{-j\omega \cdot t_0}$$

możemy napisać że:

$$H_n(j\omega) = H(j\omega) \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} =$$

$$= T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot (\frac{T}{2} + n \cdot T)}$$

Ostatecznie wzór na transformatę sygnału $f(t)$ jest równy

$$F(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot H_n(j\omega) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot (\frac{T}{2} + n \cdot T)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n} \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot e^{-j\omega \cdot n \cdot T} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \frac{A}{2^n} \cdot e^{-j\omega \cdot n \cdot T} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot A \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega \cdot T}\right)^n = \\
&= A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega \cdot T}\right)^n
\end{aligned}$$

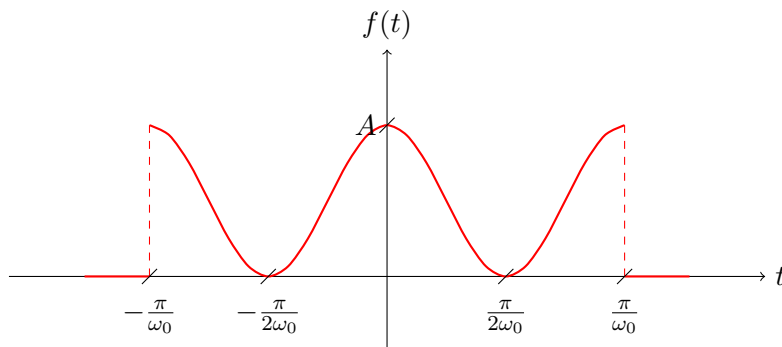
Można zauważyć że suma w rozwiązaniu to szereg geometryczny. Z wzoru na sumę szeregu geometrycznego mamy

$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega \cdot T}\right)^n = \\
&= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \right\} = \\
&= A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega \cdot T}}
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ równa się:

$$F(j\omega) = A \cdot T \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{T}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega \cdot T}}$$

Zadanie 6. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału prostokątnego $g(t) = \Pi(t)$ jest równa $G(j\omega) = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



Zacznijmy od napisania wzoru sygnału przedstawionego na rysunku

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -\frac{\pi}{\omega_0}) \\ A \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t) & t \in (-\frac{\pi}{\omega_0}; \frac{\pi}{\omega_0}) \\ 0 & t \in (\frac{\pi}{\omega_0}; \infty) \end{cases}$$

Co możemy zapisać za pomocą sygnałów elementarnych jako

$$f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t \cdot \omega_0}{2\pi}\right) \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t)$$

Nasz sygnał jest iloczynem pewnej funkcji $h(t)$ oraz cosinusów

$$\begin{aligned} f(t) &= A \cdot \Pi\left(\frac{t \cdot \omega_0}{2\pi}\right) \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t) = \\ &= A \cdot h(t) \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t) = \end{aligned}$$

gdzie

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t \cdot \omega_0}{2\pi}\right)$$

Wyznamy transformatę sygnału $h(t)$. Z treści zadania wiemy że transformata sygnału $g(t) = \Pi(t)$ jest równa $G(j\omega) = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Postać funkcji $g(t)$ nie jest identyczna z postacią funkcji $h(t)$, funkcja różni się skalą. Wyznaczanym transformaty funkcji przeskalowanej $h(t) = \Pi\left(\frac{t \cdot \omega_0}{2\pi}\right)$

Z twierdzenia o zmianie skali mamy

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega)$$

$$h(t) = g(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G(j\frac{\omega}{\alpha})$$

a więc otrzymujemy

$$\begin{aligned} h(t) &= \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \\ &= \Pi\left(\frac{t \cdot \omega_0}{2\pi}\right) = \\ &= \Pi\left(t \cdot \frac{\omega_0}{2\pi}\right) = \\ &= g\left(t \cdot \frac{\omega_0}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

gdzie

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

a więc

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{1}{\frac{\omega_0}{2\pi}} \cdot G\left(j\frac{\omega}{\frac{\omega_0}{2\pi}}\right) = \\ &= \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot G\left(j\frac{\omega \cdot 2\pi}{\omega_0}\right) = \\ &= \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot 2\pi}{\omega_0}\right) = \\ &= \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot Sa\left(\omega \cdot \frac{\pi}{\omega_0}\right) \end{aligned}$$

A więc transformata sygnału $h(t)$ jest równa $H(j\omega) = \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot Sa\left(\omega \cdot \frac{\pi}{\omega_0}\right)$

Wróćmy do wzoru sygnału i przedstawmy go następująco

$$\begin{aligned} f(t) &= A \cdot \Pi\left(\frac{t \cdot \omega_0}{2\pi}\right) \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t) = \\ &= A \cdot h(t) \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t) = \\ &= A \cdot h(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = \\ &= A \cdot k(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} k(t) &= h(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = \\ &= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h(t) \cdot \frac{e^{j\omega_0 \cdot t} + e^{-j\omega_0 \cdot t}}{2} = \\
&= \frac{1}{2} \left(h(t) \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} + h(t) \cdot e^{-j\omega_0 \cdot t} \right)
\end{aligned}$$

Wyznamy transformatę sygnału $k(t)$. Korzystając z twierdzenia o modulacji mamy

$$\begin{aligned}
h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) \\
k(t) &= h(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} K(j\omega) = H(j(\omega - \omega_0))
\end{aligned}$$

a więc transformata sygnału $k(t)$ wynosi:

$$\begin{aligned}
K(j\omega) &= \frac{1}{2} (H(j(\omega - \omega_0)) + H(j(\omega + \omega_0))) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\omega_0} \cdot Sa \left((\omega - \omega_0) \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right) + \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot Sa \left((\omega + \omega_0) \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right) \right) = \\
&= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot Sa \left((\omega - \omega_0) \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right) + \frac{\pi}{\omega_0} \cdot Sa \left((\omega + \omega_0) \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right)
\end{aligned}$$

Wróćmy do wzoru sygnału $f(t)$

$$\begin{aligned}
f(t) &= A \cdot \Pi \left(\frac{t \cdot \omega_0}{2\pi} \right) \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t) = \\
&= A \cdot h(t) \cdot \cos^2(\omega_0 \cdot t) = \\
&= A \cdot h(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = \\
&= A \cdot k(t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = \\
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \right\} = \\
&= A \cdot k(t) \cdot \frac{e^{j\omega_0 \cdot t} + e^{-j\omega_0 \cdot t}}{2} = \\
&= \frac{A}{2} \left(k(t) \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} + k(t) \cdot e^{-j\omega_0 \cdot t} \right)
\end{aligned}$$

Znając transformatę sygnału $k(t)$ i korzystając z twierdzenia o modulacji możemy wyznaczyć transformatę sygnału $f(t)$.

$$\begin{aligned}
k(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} K(j\omega) \\
f(t) &= k(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = K(j(\omega - \omega_0))
\end{aligned}$$

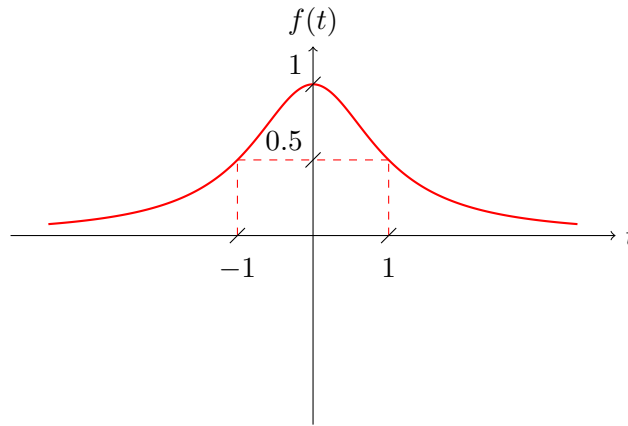
a więc transformata sygnału $f(t)$ wynosi

$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= \frac{A}{2} (K(j(\omega - \omega_0)) + K(j(\omega + \omega_0))) = \\
&= \frac{A}{2} \left(\frac{\pi}{\omega_0} \cdot Sa \left((\omega - \omega_0 - \omega_0) \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right) + \frac{\pi}{\omega_0} \cdot Sa \left((\omega - \omega_0 + \omega_0) \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\pi}{\omega_0} \cdot Sa \left((\omega + \omega_0 - \omega_0) \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right) + \frac{\pi}{\omega_0} \cdot Sa \left((\omega + \omega_0 + \omega_0) \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right) \Big) = \\
& = \frac{A}{2} \left(\frac{\pi}{\omega_0} \cdot Sa \left((\omega - 2 \cdot \omega_0) \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right) + \frac{\pi}{\omega_0} \cdot Sa \left(\omega \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right) + \right. \\
& + \frac{\pi}{\omega_0} \cdot Sa \left(\omega \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right) + \frac{\pi}{\omega_0} \cdot Sa \left((\omega + 2 \cdot \omega_0) \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right) \Big) = \\
& = \frac{A}{2} \left(\frac{\pi}{\omega_0} \cdot Sa \left((\omega - 2 \cdot \omega_0) \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right) + 2 \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \cdot Sa \left(\omega \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right) + \right. \\
& + \frac{\pi}{\omega_0} \cdot Sa \left((\omega + 2 \cdot \omega_0) \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right) \Big) = \\
& = \frac{A \cdot \pi}{2 \cdot \omega_0} \left(Sa \left((\omega - 2 \cdot \omega_0) \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right) + 2 \cdot Sa \left(\omega \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right) + Sa \left((\omega + 2 \cdot \omega_0) \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right) \right)
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ wynosi $F(j\omega) = \frac{A \cdot \pi}{2 \cdot \omega_0} \left(Sa \left((\omega - 2 \cdot \omega_0) \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right) + 2 \cdot Sa \left(\omega \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right) + Sa \left((\omega + 2 \cdot \omega_0) \cdot \frac{\pi}{\omega_0} \right) \right)$

Zadanie 7. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ przedstawionego na rysunku wykorzystując twierdzenia opisujące właściwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj informację o tym, że $\mathcal{F}\{e^{-|t|}\} = \frac{2}{1+\omega^2}$.



Z treści zadania wiemy, że:

$$\mathcal{F}\{e^{-|t|}\} = \frac{2}{1+\omega^2} \quad (3.46)$$

Oznaczmy $g(t) = e^{-|t|}$ oraz $G(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$.

Na podstawie twierdzenia o symetrii możemy wyznaczyć następującą transformatę:

$$\begin{aligned} g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\ h(t) = G(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) = 2\pi \cdot g(-\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= 2\pi \cdot g(-\omega) = \\ &= 2\pi \cdot e^{-|-\omega|} = \\ &= 2\pi \cdot e^{-|\omega|} \end{aligned}$$

Niestety sygnał $h(t) = \frac{2}{1+t^2}$ nie jest równy sygnałowi $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, ale:

$$f(t) = \frac{1}{2} \cdot h(t) \quad (3.47)$$

Z twierdzenia o liniowości transformaty możemy obliczyć:

$$\begin{aligned} h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) \\ f(t) = \alpha \cdot h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \alpha \cdot H(j\omega) \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$f(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1+t^2}$$

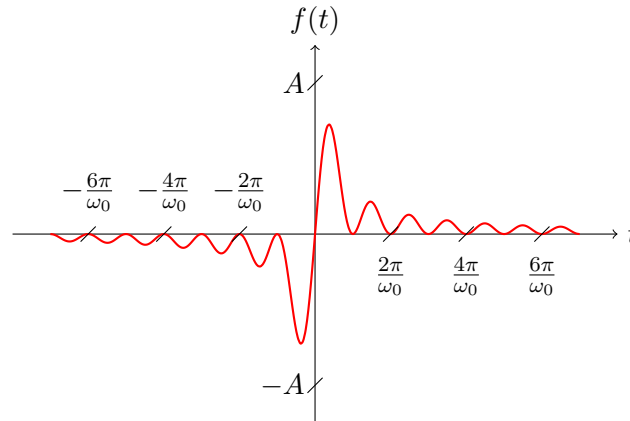
$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot e^{-|\omega|} = \\ &= \pi \cdot e^{-|\omega|} \end{aligned}$$

Transformata Fouriera sygnału $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ jest równa $F(j\omega) = \pi \cdot e^{-|\omega|}$.

Zadanie 8. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$ wykorzystując twierdzenia opisujące właściwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj informację o tym, że $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \quad (3.48)$$

$$\Pi(t) \xrightarrow{F} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.49)$$



W pierwszej kolejności można funkcję $f(t)$ rozpisać następująco:

$$\begin{aligned} f(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) = \\ &= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{j \cdot x} - e^{-j \cdot x}}{2 \cdot j} \right\} = \\ &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot \frac{e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} - e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}}{2 \cdot j} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} \cdot \left(Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} - Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \right) = \\ &= \left\{ \begin{aligned} f_1(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \\ f_2(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \end{aligned} \right\} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot j} \cdot (f_1(t) - f_2(t)) \end{aligned}$$

Należy zauważyć iż funkcja $f_1(t)$ i $f_2(t)$ jest złożeniem funkcji Sa i funkcji wykładniczych.

$$\begin{aligned} f_1(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \\ f_2(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \end{aligned}$$

Znając transformatę sygnału $g(t) = Sa(\omega_0 \cdot t)$ możemy skorzystać z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości.

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega)$$

$$f(t) = g(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = G(j(\omega - \omega_0))$$

Aby wyznaczyć transformatę sygnału $g(t)$ możemy skorzystać z twierdzenia o symetrii. Znajac transformatę $H(j\omega)$ sygnału $h(t)$ można wyznaczyć transformatę $G(j\omega)$ sygnału $g(t)$:

$$\begin{aligned} h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) \\ g(t) &= H(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = 2\pi \cdot h(-\omega) \end{aligned}$$

Tak więc zaczniemy od transformaty sygnału prostokątnego $h(t) = \Pi(t)$ i wyznaczmy transformatę funkcji Sa .

$$\begin{aligned} h(t) &= \Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ g_1(t) &= H(t) = Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(j\omega) = 2\pi \cdot h(-j\omega) = 2\pi \cdot \Pi(-\omega) = 2\pi \cdot \Pi(\omega) \end{aligned}$$

Wyznaczyliśmy transformatę funkcji $g_1(t)$. Jednak funkcja $g_1(t)$ nie ma takiej samej postaci jak funkcja $g(t)$.

$$\begin{aligned} g(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) = \\ &= Sa\left(\omega_0 \cdot t \cdot \frac{2}{2}\right) = \\ &= Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) = \\ &= Sa\left(\frac{2 \cdot \omega_0 \cdot t}{2}\right) = \\ &= \left\{a = 2 \cdot \omega_0\right\} = \\ &= Sa\left(\frac{a \cdot t}{2}\right) = \\ &= g_1(a \cdot t) \end{aligned}$$

Znajac transformatę funkcji $g_1(t)$ możemy wyznaczyć transformatę funkcji $g(t) = g_1(a \cdot t)$ za pomocą twierdzenia o zmianie skali.

$$\begin{aligned} g_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(j\omega) \\ g(t) &= g_1(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G_1(j\frac{\omega}{\alpha}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{|\alpha|} \cdot G_1(j\frac{\omega}{\alpha}) = \\ &= \left\{\alpha = 2 \cdot \omega_0\right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|2 \cdot \omega_0|} \cdot G_1\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right) = \\
&= \left\{ G_1(j\omega) = 2\pi \cdot \Pi(\omega) \right\} = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot 2\pi \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right) = \\
&= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}$$

Tak więc transformata sygnału $g(t) = Sa(\omega_0 \cdot t)$ jest równa $G(j\omega) = \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right)$.
Kolejnym krokiem jest wyznaczenie transformaty dwóch sygnałów:

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} \\
f_2(t) &= Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-j\omega_0 \cdot t}
\end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości:

$$\begin{aligned}
g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\
f_1(t) = g(t) \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega) = G(j(\omega - \omega_0))
\end{aligned}$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
F_1(j\omega) &= G(j(\omega - \omega_0)) = \\
&= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(j\omega) &= G(j(\omega + \omega_0)) = \\
&= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}$$

Ostatecznie korzystając z liniowości transformacji Fouriera:

$$\begin{aligned}
f_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega) \\
f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(j\omega) \\
f(t) = \alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \alpha \cdot F_1(j\omega) + \beta \cdot F_2(j\omega)
\end{aligned}$$

otrzymujemy:

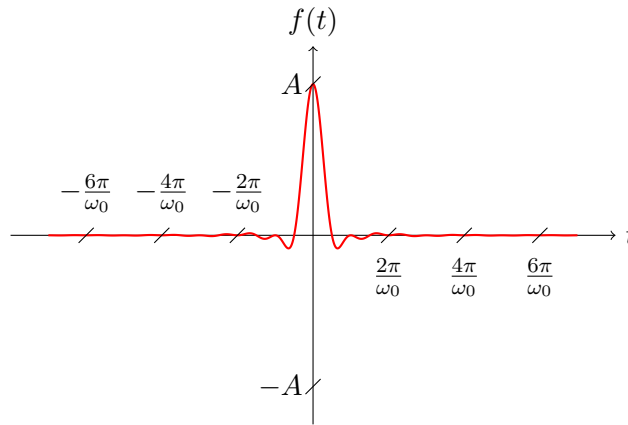
$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= F_1(j\omega) - F_2(j\omega) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot j} \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) - \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) \right)
\end{aligned}$$

Transformata Fouriera sygnału $f(t) = Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$ jest równa $F(j\omega) = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) - \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) \right)$.

Zadanie 9. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału $\Lambda(t)$ jest równa $Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \quad (3.50)$$

$$\Lambda(t) \xrightarrow{F} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.51)$$



W pierwszej kolejności można funkcję $f(t)$ rozpisać następująco:

$$\begin{aligned} f(t) &= Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = \\ &= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} = \\ &= Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot \frac{e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \right) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} f_1(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \\ f_2(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (f_1(t) + f_2(t)) \end{aligned}$$

Należy zauważyć iż funkcja $f_1(t)$ i $f_2(t)$ jest złożeniem funkcji Sa^2 i funkcji wykładniczych.

$$\begin{aligned} f_1(t) &= Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \\ f_2(t) &= Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \end{aligned}$$

Znając transformatę sygnału $g(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t)$ możemy skorzystać z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości.

$$g(t) \xrightarrow{F} G(j\omega)$$

$$f(t) = g(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = G(j(\omega - \omega_0))$$

Aby wyznaczyć transformatę sygnału $g(t)$ możemy skorzystać z twierdzenia o symetrii. Znając transformatę $H(j\omega)$ sygnału $h(t)$ można wyznaczyć transformatę $G(j\omega)$ sygnału $g(t)$:

$$\begin{aligned} h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) \\ g(t) &= H(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = 2\pi \cdot h(-\omega) \end{aligned}$$

Tak więc zacznijmy od transformaty sygnału trójkątnego $h(t) = \Lambda(t)$ i wyznaczmy transformatę funkcji Sa^2 .

$$\begin{aligned} h(t) &= \Lambda(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ g_1(t) &= H(t) = Sa^2\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(j\omega) = 2\pi \cdot h(\omega) = 2\pi \cdot \Lambda(-\omega) = 2\pi \cdot \Lambda(\omega) \end{aligned}$$

Wyznaczyliśmy transformatę funkcji $g_1(t)$. Jednak funkcja $g_1(t)$ nie ma takiej samej postaci jak funkcja $g(t)$.

$$\begin{aligned} g(t) &= Sa^2(\omega_0 \cdot t) = \\ &= Sa^2\left(\omega_0 \cdot t \cdot \frac{2}{2}\right) = \\ &= Sa^2\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) = \\ &= Sa^2\left(\frac{2 \cdot \omega_0 \cdot t}{2}\right) = \\ &= \{a = 2 \cdot \omega_0\} = \\ &= Sa^2\left(\frac{a \cdot t}{2}\right) = \\ &= g_1(a \cdot t) \end{aligned}$$

Znając transformatę funkcji $g_1(t)$ możemy wyznaczyć transformatę funkcji $g(t) = g_1(a \cdot t)$ za pomocą twierdzenia o zmianie skali.

$$\begin{aligned} g_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(j\omega) \\ g(t) &= g_1(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G_1(j\frac{\omega}{\alpha}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{|\alpha|} \cdot G_1(j\frac{\omega}{\alpha}) = \\ &= \{\alpha = 2 \cdot \omega_0\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|2 \cdot \omega_0|} \cdot G_1\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right) = \\
&= \left\{ G_1(j\omega) = 2\pi \cdot \Lambda(\omega) \right\} = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot 2\pi \cdot \Lambda\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right) = \\
&= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}$$

Tak więc transformata sygnału $g(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t)$ jest równa $G(j\omega) = \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right)$.
Kolejnym krokiem jest wyznaczenie transformaty dwóch sygnałów:

$$\begin{aligned}
f_1(t) &= Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} \\
f_2(t) &= Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot e^{-j\omega_0 \cdot t}
\end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości:

$$\begin{aligned}
g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\
f_1(t) = g(t) \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega) = G(j(\omega - \omega_0))
\end{aligned}$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
F_1(j\omega) &= G(j(\omega - \omega_0)) = \\
&= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega - \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(j\omega) &= G(j(\omega + \omega_0)) = \\
&= \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega + \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right)
\end{aligned}$$

Ostatecznie korzystając z liniowości transformacji Fouriera:

$$\begin{aligned}
f_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega) \\
f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(j\omega) \\
f(t) = \alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \alpha \cdot F_1(j\omega) + \beta \cdot F_2(j\omega)
\end{aligned}$$

otrzymujemy:

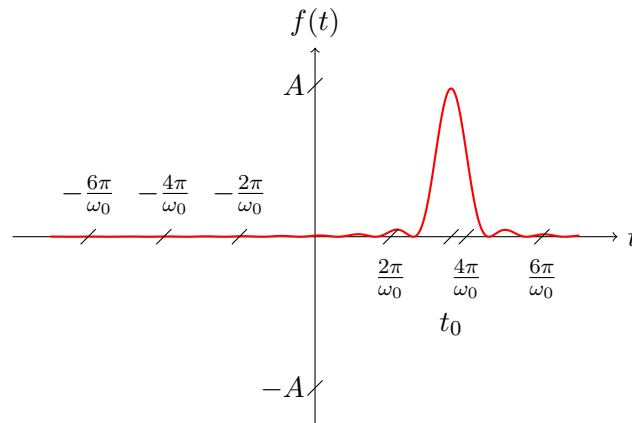
$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= \frac{1}{2} \cdot (F_1(j\omega) + F_2(j\omega)) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega - \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) + \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega + \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) \right)
\end{aligned}$$

Transformata Fouriera sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ jest równa $F(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega - \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) + \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega + \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) \right)$.

Zadanie 10. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału $\Lambda(t)$ jest równa $Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \quad (3.52)$$

$$\Lambda(t) \xrightarrow{F} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.53)$$



W pierwszej kolejności można funkcję $f(t)$ rozpisać następująco:

$$\begin{aligned} f(t) &= Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) = \\ &= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} = \\ &= Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \cdot \frac{e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \right) = \\ &= \left\{ \begin{aligned} f_1(t) &= Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \\ f_2(t) &= Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \end{aligned} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (f_1(t) + f_2(t)) \end{aligned}$$

Należy zauważyć iż funkcja $f_1(t)$ i $f_2(t)$ jest złożeniem funkcji Sa^2 i funkcji wykładniczych.

$$\begin{aligned} f_1(t) &= Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \\ f_2(t) &= Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} = g(t) \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \end{aligned}$$

Znając transformatę sygnału $g(t) = Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$ możemy skorzystać z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości.

$$g(t) \xrightarrow{F} G(j\omega)$$

$$f(t) = g(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = G(j(\omega - \omega_0))$$

Aby wyznaczyć transformatę sygnału $g(t)$ możemy skorzystać z twierdzenia o symetrii. Znając transformatę $H(j\omega)$ sygnału $h(t)$ można wyznaczyć transformatę $G(j\omega)$ sygnału $g(t)$:

$$\begin{aligned} h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) \\ g(t) &= H(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = 2\pi \cdot h(-\omega) \end{aligned}$$

Tak więc zacznijmy od transformaty sygnału trójkątnego $h(t) = \Lambda(t)$ i wyznaczmy transformatę funkcji Sa^2 .

$$\begin{aligned} h(t) &= \Lambda(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ g_1(t) &= H(t) = Sa^2\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(j\omega) = 2\pi \cdot h(\omega) = 2\pi \cdot \Lambda(-\omega) = 2\pi \cdot \Lambda(\omega) \end{aligned}$$

Wyznaczyliśmy transformatę funkcji $g_1(t)$. Jednak funkcja $g_1(t)$ nie ma takiej samej postaci jak funkcja $g(t)$.

$$\begin{aligned} g(t) &= Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) = \\ &= \left\{k(t) = Sa^2\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = \\ &= k(t-t_0) \end{aligned}$$

Znając transformatę funkcji $k(t)$ możemy z łatwością wyznaczyć transformatę sygnału $g(t)$ za pomocą twierdzenia o przesunięciu w czasie:

$$\begin{aligned} k(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} K(j\omega) \\ g(t) &= k(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = K(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$

Wyznaczyliśmy transformatę funkcji $g_1(t)$. Jednak funkcja $g_1(t)$ nie ma takiej samej postaci jak funkcja $k(t)$.

$$\begin{aligned} k(t) &= Sa^2\left(\frac{t}{T}\right) = \\ &= Sa^2\left(\frac{2 \cdot t}{2 \cdot T}\right) = \\ &= Sa^2\left(\frac{2}{T} \cdot \frac{t}{2}\right) = \\ &= \left\{a = \frac{2}{T}\right\} = \\ &= Sa^2\left(a \cdot \frac{t}{2}\right) = \end{aligned}$$

$$= g_1(a \cdot t)$$

Znając transformatę funkcji $g_1(t)$ możemy wyznaczyć transformatę funkcji $k(t) = g_1(a \cdot t)$ za pomocą twierdzenia o zmianie skali.

$$\begin{aligned} g_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(j\omega) \\ k(t) = g_1(\alpha \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} K(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot G_1(j\frac{\omega}{\alpha}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \frac{1}{|\alpha|} \cdot G_1(j\frac{\omega}{\alpha}) = \\ &= \left\{ \alpha = \frac{2}{T} \right\} = \\ &= \frac{1}{\left| \frac{2}{T} \right|} \cdot G_1\left(j\frac{\omega}{\frac{2}{T}}\right) = \\ &= \left\{ G_1(j\omega) = 2\pi \cdot \Lambda(\omega) \right\} = \\ &= \frac{1}{\frac{2}{T}} \cdot 2\pi \cdot \Lambda\left(\frac{\omega}{\frac{2}{T}}\right) = \\ &= \pi \cdot T \cdot \Lambda\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \end{aligned}$$

Tak więc transformata sygnału $k(t) = Sa^2\left(\frac{t}{T}\right)$ jest równa $K(j\omega) = \pi \cdot T \cdot \Lambda\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right)$

Podstawiając do wzoru na transformatę sygnału $g(t) = Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) = k(t-t_0)$ otrzymamy $G(j\omega) = K(j\omega) \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} = \pi \cdot T \cdot \Lambda\left(\frac{\omega \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot t_0}$.

Kolejnym krokiem jest wyznaczenie transformaty dwóch sygnałów:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} \\ f_2(t) &= Sa^2\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \cdot e^{-j\omega_0 \cdot t} \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości:

$$\begin{aligned} g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\ f_1(t) = g(t) \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega) = G(j(\omega - \omega_0)) \end{aligned}$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} F_1(j\omega) &= G(j(\omega - \omega_0)) = \\ &= \pi \cdot T \cdot \Lambda\left(\frac{(\omega - \omega_0) \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j(\omega - \omega_0) \cdot t_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2(j\omega) &= G(j(\omega + \omega_0)) = \\
 &= \pi \cdot T \cdot \Lambda\left(\frac{(\omega + \omega_0) \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j(\omega + \omega_0) \cdot t_0}
 \end{aligned}$$

Ostatecznie korzystając z liniowości transformacji Fouriera:

$$\begin{aligned}
 f_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega) \\
 f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(j\omega) \\
 f(t) &= \alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \alpha \cdot F_1(j\omega) + \beta \cdot F_2(j\omega)
 \end{aligned}$$

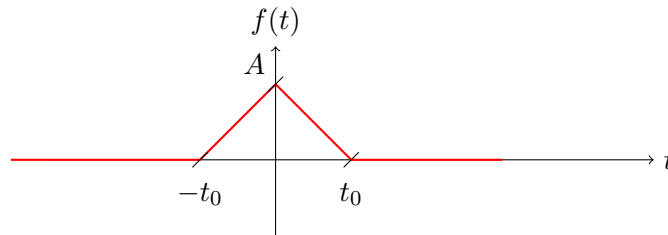
otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 F(j\omega) &= \frac{1}{2} \cdot (F_1(j\omega) + F_2(j\omega)) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\pi \cdot T \cdot \Lambda\left(\frac{(\omega - \omega_0) \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j(\omega - \omega_0) \cdot t_0} + \pi \cdot T \cdot \Lambda\left(\frac{(\omega + \omega_0) \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j(\omega + \omega_0) \cdot t_0} \right)
 \end{aligned}$$

Transformata Fouriera sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ jest równa

$$F(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left(\pi \cdot T \cdot \Lambda\left(\frac{(\omega - \omega_0) \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j(\omega - \omega_0) \cdot t_0} + \pi \cdot T \cdot \Lambda\left(\frac{(\omega + \omega_0) \cdot T}{2}\right) \cdot e^{-j(\omega + \omega_0) \cdot t_0} \right)$$

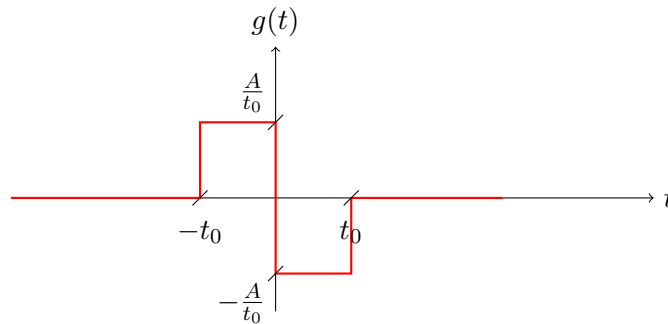
Zadanie 11. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ wykorzystując twierdzenia opisujące właściwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj informację o tym, że $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = \text{Sa}(\frac{\omega}{2})$.



W pierwszej kolejności opisemy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) \quad (3.54)$$

Wyznamy pochodną sygnału $f(t)$, czyli sygnał $g(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t)$.



Sygnał $g(t)$ można opisać, wykorzystując sygnały elementarne:

$$g(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}\right) - \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) \quad (3.55)$$

Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

$$f(t) = \int_{-\infty}^t g(x) \cdot dx \quad (3.56)$$

Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ można wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \quad (3.57)$$

Z powyższego równania widać, że musimy znać $G(j\omega)$, czyli transformatę sygnału $g(t)$:

$$g(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}\right) - \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) \quad (3.58)$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych sygnałów prostokątnych, czyli:

$$g(t) = g_1(t) - g_2(t) \quad (3.59)$$

gdzie:

$$g_1(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}\right)$$

$$g_2(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right)$$

Wyznamy transformtę sygnału $g_1(t)$, czyli $G_1(j\omega)$.

Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{t_0}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{t_0}}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega \cdot (-\frac{t_0}{2})} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A}{t_0} \cdot e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - (-\frac{t_0}{2})}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \end{aligned}$$

Transformata sygnału $g_1(t)$ to:

$$G_1(j\omega) = \mathcal{F}\{g_1(t)\} = A \cdot e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \quad (3.60)$$

Teraz wyznaczymy transformtę sygnału $g_2(t)$, czyli $G_2(j\omega)$.

$$\begin{aligned} \Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{t_0}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{t_0}}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t - (\frac{t_0}{2})}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega \cdot (\frac{t_0}{2})} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A}{t_0} \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ \frac{A}{t_0} \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \end{aligned}$$

Transformata sygnału $g_2(t)$ to:

$$G_2(j\omega) = \mathcal{F}\{g_2(t)\} = A \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \quad (3.61)$$

Czyli transformata sygnału $g(t)$ to:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \mathcal{F}\{g(t)\} = A \cdot e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) - A \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\ G(j\omega) &= A \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot \left(e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} - e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}}\right) \\ G(j\omega) &= A \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot \left(e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} - e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}}\right) \\ &\quad \left\{ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \right\} \\ G(j\omega) &= A \cdot 2 \cdot j \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \end{aligned}$$

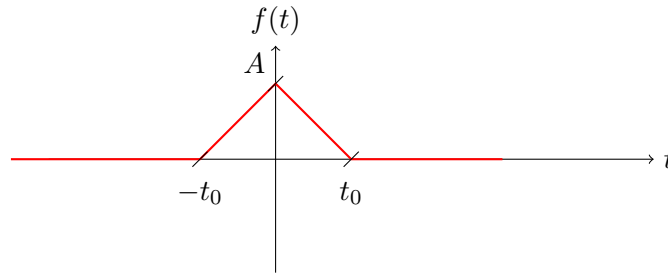
Mamy wyznaczoną transformatę $G(j\omega)$. Teraz, z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyć transformatę sygnału $f(t)$:

$$F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) = \\ &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot A \cdot 2 \cdot j \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) = \\ &= \left\{ \begin{aligned} G(0) &= A \cdot 2 \cdot j \cdot Sa\left(\frac{0 \cdot t_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{0 \cdot t_0}{2}\right) \\ G(0) &= A \cdot 2 \cdot j \cdot Sa(0) \cdot \sin(0) \\ G(0) &= A \cdot 2 \cdot j \cdot 1 \cdot 0 \\ G(0) &= 0 \end{aligned} \right\} = \\ &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot A \cdot 2 \cdot j \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) = \\ &= \left\{ \frac{\sin(x)}{x} = Sa(x) \right\} = \\ &= \frac{A \cdot 2 \cdot t_0}{\omega \cdot t_0} \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) = \\ &= A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) = \\ &= A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right)$ to $F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)$

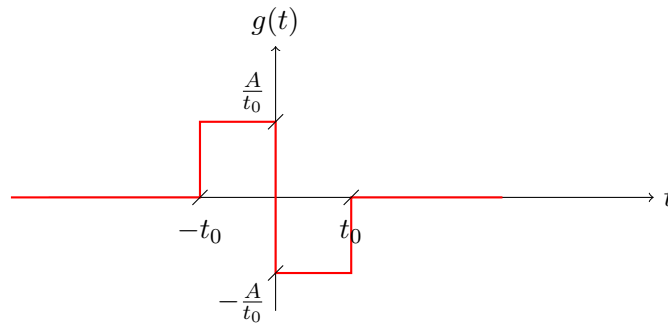
Zadanie 12. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ wykorzystując twierdzenia opisujące właściwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj wiedzę o właściwościach próbkujących delty Diraca.



W pierwszej kolejności opiszmy sygnał za pomocą sygnałów elementarnych:

$$f(t) = A \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) \quad (3.63)$$

Wyznamy pochodną sygnału $f(t)$, czyli sygnał $g(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t)$.



Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

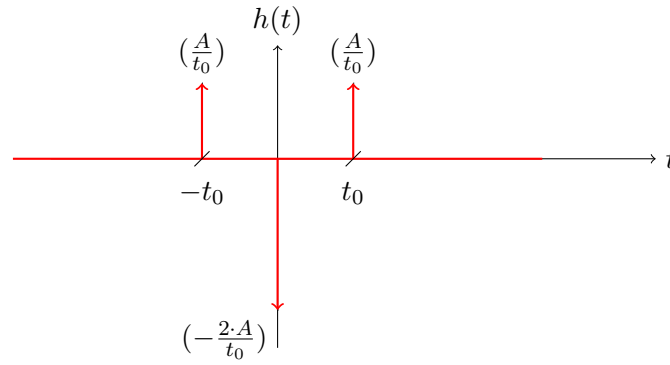
$$f(t) = \int_{-\infty}^t g(x) \cdot dx \quad (3.64)$$

Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ można wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \quad (3.65)$$

Pytanie, czy można dalej uprościć sygnał $g(t)$ dokonując jego różniczkowania. Wyznamy pochodną sygnału $g(t)$, czyli drugą pochodną sygnału $f(t)$:

$$h(t) = \frac{\partial}{\partial t} g(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t) \quad (3.66)$$



Sygnał $h(t)$ można opisać, wykorzystując sygnały elementarne:

$$h(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0)) - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0)) \quad (3.67)$$

Można sprawdzić, że całkując sygnał $h(t)$ otrzymamy sygnał $g(t)$, czyli:

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(x) \cdot dx \quad (3.68)$$

Skoro tak jest, to transformatę sygnału $g(t)$ można wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $h(t)$:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot H(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) \quad (3.69)$$

Z powyższego równania widać, że musimy znać $H(j\omega)$, czyli transformatę sygnału $h(t)$:

$$h(t) = \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0)) - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0)) \quad (3.70)$$

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych delt Diraca, czyli:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \mathcal{F}\{h(t)\} = \\ &= \mathcal{F}\left\{\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0)) - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0))\right\} = \\ &= \mathcal{F}\left\{\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (-t_0))\right\} - \mathcal{F}\left\{\frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \delta(t)\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - (t_0))\right\} = \\ &= \frac{A}{t_0} \cdot \mathcal{F}\{\delta(t - (-t_0))\} - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \mathcal{F}\{\delta(t)\} + \frac{A}{t_0} \cdot \mathcal{F}\{\delta(t - (t_0))\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \\ \delta(t - (-t_0)) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \cdot e^{-j\omega \cdot (-t_0)} \\ \delta(t - (t_0)) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{A}{t_0} \cdot e^{-j\omega \cdot (-t_0)} - \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot 1 + \frac{A}{t_0} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} = \\ &= \frac{A}{t_0} \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} - 2 + e^{-j\omega \cdot t_0}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} = \\
&= \frac{A}{t_0} \cdot (2 \cdot \cos(\omega \cdot t_0) - 2) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (\cos(\omega \cdot t_0) - 1)
\end{aligned}$$

Czyli transformata sygnału $h(t)$ to:

$$H(j\omega) = \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (\cos(\omega \cdot t_0) - 1) \quad (3.71)$$

Mamy wyznaczoną transformatę $H(j\omega)$. Teraz, z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyć transformatę $G(j\omega)$:

$$\begin{aligned}
G(j\omega) &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot H(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) = \\
&= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (\cos(\omega \cdot t_0) - 1) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} H(0) = \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (\cos(0 \cdot t_0) - 1) \\ H(0) = \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (\cos(0) - 1) \\ H(0) = \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot (1 - 1) \\ H(0) = 0 \end{array} \right\} = \\
&= \frac{2 \cdot A}{j \cdot \omega \cdot t_0} \cdot (\cos(\omega \cdot t_0) - 1)
\end{aligned}$$

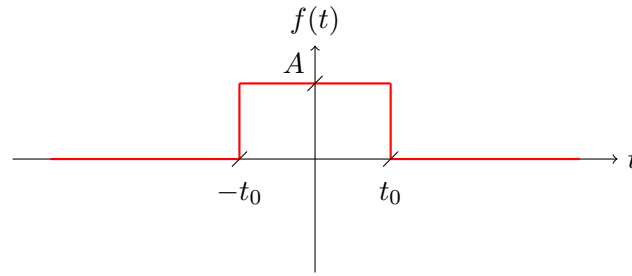
Mamy wyznaczoną transformatę $G(j\omega)$. Teraz, kolejny raz z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyć transformatę $F(j\omega)$:

$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) = \\
&= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \frac{2 \cdot A}{j \cdot \omega \cdot t_0} \cdot (\cos(\omega \cdot t_0) - 1) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} G(0) = \frac{2 \cdot A}{j \cdot 0 \cdot t_0} \cdot (\cos(0 \cdot t_0) - 1) \\ G(0) = \frac{0}{0}!!! \\ G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot dt = \int_{-t_0}^0 \frac{A}{t_0} \cdot dt + \int_0^{t_0} \left(-\frac{A}{t_0}\right) \cdot dt \\ G(0) = \frac{A}{t_0} \cdot (0 - (-t_0)) - \frac{A}{t_0} \cdot (t_0 - 0) = A - A \\ G(0) = 0 \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \frac{2 \cdot A}{j \cdot \omega \cdot t_0} \cdot (\cos(\omega \cdot t_0) - 1) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{j^2 \cdot \omega^2 \cdot t_0} \cdot (\cos(\omega \cdot t_0) - 1) = \\
&= \frac{2 \cdot A}{\omega^2 \cdot t_0} \cdot (1 - \cos(\omega \cdot t_0)) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot x) \\ \cos(2 \cdot x) = 1 - 2 \cdot \sin^2(x) \end{array} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \cdot A}{\omega^2 \cdot t_0} \cdot \left(1 - 1 + 2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\omega \cdot t_0}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{4 \cdot A}{\omega^2 \cdot t_0} \cdot \sin^2 \left(\frac{\omega \cdot t_0}{2} \right) = \\ &= \left\{ \frac{\sin(x)}{x} = Sa(x) \right\} = \\ &= A \cdot t_0 \cdot Sa^2 \left(\frac{\omega \cdot t_0}{2} \right) \end{aligned}$$

Transformata sygnału $f(t) = A \cdot \Lambda(\frac{t}{t_0})$ to $F(j\omega) = A \cdot t_0 \cdot Sa^2(\frac{\omega \cdot t_0}{2})$

Zadanie 13. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń.



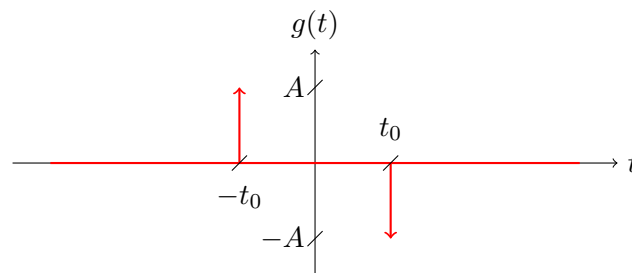
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ A & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \quad (3.72)$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodną sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ 0 & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} + A \cdot \delta(t + t_0) - A \cdot \delta(t - t_0) \quad (3.73)$$

czyli po prostu

$$g(t) = f'(t) = A \cdot \delta(t + t_0) - A \cdot \delta(t - t_0) \quad (3.74)$$



Wyznaczanie transformaty sygnału $g(t)$ złożonego z delt Diracka jest znacznie prostsze.

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (3.75)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (A \cdot \delta(t + t_0) - A \cdot \delta(t - t_0)) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (A \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} - A \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t}) \cdot dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt - \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt - A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\
&= A \cdot e^{-j\omega \cdot (-t_0)} - A \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} = \\
&= A \cdot e^{j\omega \cdot t_0} - A \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} = \\
&= A \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}) = \\
&= A \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}) \cdot \frac{2 \cdot j}{2 \cdot j} = \\
&= A \cdot 2 \cdot j \cdot \frac{e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}}{2 \cdot j} = \\
&= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \right\} = \\
&= A \cdot 2 \cdot j \cdot \sin(\omega \cdot t_0) = \\
&= j \cdot 2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $g(t)$ to $G(j\omega) = j \cdot 2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0)$

Następnie możemy wykorzystać twierdzenie o całkowaniu aby wyznaczyć transformatę sygnału $f(t)$ na podstawie transformaty sygnału $g(t) = f'(t)$

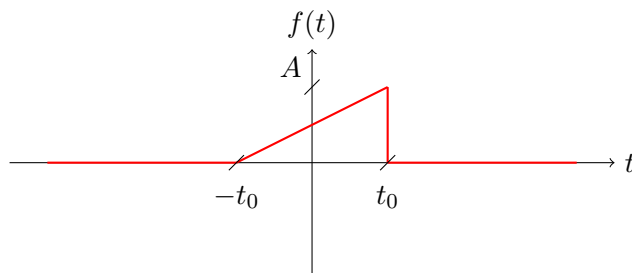
$$\begin{aligned}
&g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\
f(t) &= \int_{-\infty}^t g(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)
\end{aligned}$$

Podstawiając obliczoną wcześniej transformatę $G(j\omega)$ sygnału $g(t)$ otrzymujemy transformatę $F(j\omega)$ sygnału $f(t)$

$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(0) \cdot G(0) = \\
&= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot j \cdot 2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + \pi \cdot \delta(0) \cdot j \cdot 2 \cdot A \cdot \sin(0 \cdot t_0) = \\
&= \frac{1}{\omega} \cdot 2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + \pi \cdot \delta(0) \cdot j \cdot 2 \cdot A \cdot \sin(0) = \\
&= \frac{1}{\omega} \cdot 2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t_0) \cdot \frac{t_0}{t_0} + \pi \cdot \delta(0) \cdot j \cdot 2 \cdot A \cdot 0 = \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{\omega \cdot t_0} + 0 = \\
&= \left\{ Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x} \right\} = \\
&= 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(j\omega) = 2 \cdot A \cdot t_0 \cdot Sa(\omega \cdot t_0)$.

Zadanie 14. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń.



W pierwszej kolejności trzeba wyznaczyć jawną postać równań opisujących funkcję $f(t)$.

W tym celu wyznaczamy równanie prostej na odcinku $(-t_0, t_0)$

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \quad (3.76)$$

Dla rozważanego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, 0)$ oraz (t_0, A) . Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b .

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 0 = m \cdot (-t_0) + b \\ A = m \cdot t_0 + b \end{cases} \\ &\begin{cases} -b = m \cdot (-t_0) \\ A = m \cdot t_0 + b \end{cases} \\ &\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ A = \frac{b}{t_0} \cdot t_0 + b \end{cases} \\ &\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ A = b + b \end{cases} \\ &\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ A = 2 \cdot b \end{cases} \\ &\begin{cases} \frac{b}{t_0} = m \\ \frac{A}{2} = b \end{cases} \\ &\begin{cases} \frac{A}{2 \cdot t_0} = m \\ \frac{A}{2} = b \end{cases} \end{aligned}$$

Równanie prostej dla t z zakresu $(-t_0, t_0)$ to:

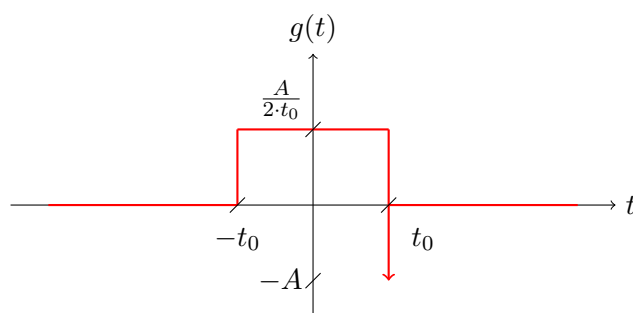
$$f(t) = \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot t + \frac{A}{2}$$

Podsumowując, sygnał $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot t + \frac{A}{2} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \quad (3.77)$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodną sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{2 \cdot t_0} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} - A \cdot \delta(t - t_0) \quad (3.78)$$

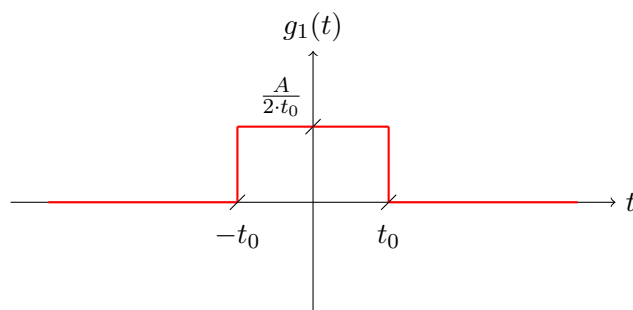


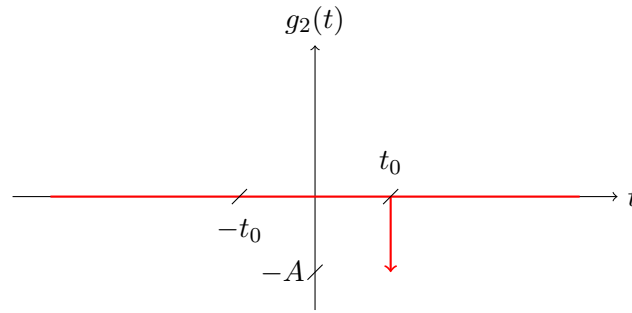
Funkcja $g(t)$ składa się z dwóch sygnałów $g_1(t)$ i $g_2(t)$

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) \quad (3.79)$$

$$g_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ \frac{A}{2 \cdot t_0} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \quad (3.80)$$

$$g_2(t) = -A \cdot \delta(t - t_0) \quad (3.81)$$





Wyznaczenie transformaty sygnału $g_2(t)$ złożonego z delty diracka jest znacznie prostsze.

$$G_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (3.82)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} G_2(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-A \cdot \delta(t - t_0)) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= -A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\ &= -A \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} \end{aligned}$$

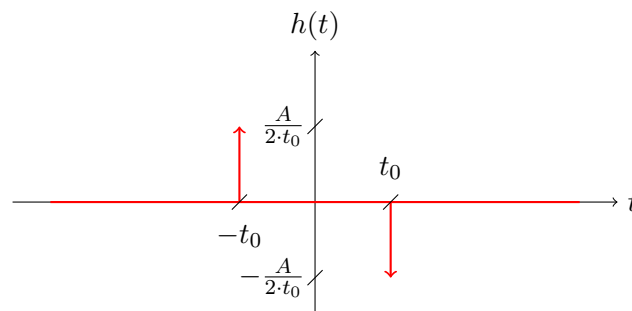
Transformata sygnału $g_2(t)$ to $G_2(j\omega) = -A \cdot e^{-j\omega \cdot t_0}$

Funkcja $g_1(t)$ jest jeszcze zbyt złożona tak więc wyznaczamy pochodną raz jeszcze

$$h(t) = g'_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ 0 & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} + \frac{A}{2 \cdot t_0} \delta(t + t_0) - \frac{A}{2 \cdot t_0} \delta(t - t_0) \quad (3.83)$$

czyli po prostu

$$h(t) = g'_1(t) = \frac{A}{2 \cdot t_0} \delta(t + t_0) - \frac{A}{2 \cdot t_0} \delta(t - t_0) \quad (3.84)$$



Wyznaczanie transformaty sygnału $h(t)$ złożonego z delt diracka jest znacznie prostsze.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (3.85)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t + t_0) - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t - t_0) \right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \right) \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\ &= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot e^{-j\omega \cdot (-t_0)} - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} = \\ &= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot e^{j\omega \cdot t_0} - \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} = \\ &= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}) = \\ &= \frac{A}{2 \cdot t_0} \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}) \cdot \frac{j}{j} = \\ &= \frac{A}{t_0} \cdot j \cdot \frac{e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}}{2 \cdot j} = \\ &= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \right\} = \\ &= \frac{A}{t_0} \cdot j \cdot \sin(\omega \cdot t_0) = \\ &= j \cdot \frac{A}{t_0} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) \end{aligned}$$

Transformata sygnału $h(t)$ to $H(j\omega) = j \cdot \frac{A}{t_0} \cdot \sin(\omega \cdot t_0)$

Następnie możemy wykorzystać twierdzenie o całkowaniu aby wyznaczyć transformatę sygnału $g_1(t)$ na podstawie transformaty sygnału $h(t) = g'_1(t)$

$$\begin{aligned} h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) \\ g_1(t) &= \int_{-\infty}^t h(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot H(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) \end{aligned}$$

Podstawiając obliczoną wcześniej transformatę $H(j\omega)$ sygnału $h(t)$ otrzymujemy transformatę $G_1(j\omega)$ sygnału $g_1(t)$

$$G_1(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot H(j\omega) + \pi \cdot \delta(0) \cdot H(0) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot j \cdot \frac{A}{t_0} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + \pi \cdot \delta(0) \cdot j \cdot \frac{A}{t_0} \cdot \sin(0 \cdot t_0) = \\
&= \frac{1}{\omega} \cdot \frac{A}{t_0} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) + \pi \cdot \delta(0) \cdot j \cdot \frac{A}{t_0} \cdot \sin(0) = \\
&= A \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{\omega \cdot t_0} + \pi \cdot \delta(0) \cdot j \cdot \frac{A}{t_0} \cdot 0 = \\
&= A \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{\omega \cdot t_0} + 0 = \\
&= \left\{ Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x} \right\} = \\
&= A \cdot Sa(\omega \cdot t_0)
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $g_1(t)$ jest równa $G_1(j\omega) = A \cdot Sa(\omega \cdot t_0)$.

Korzystając z jednorodności transformaty Fouriera

$$\begin{aligned}
g_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(j\omega) \\
g_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G_2(j\omega) \\
g(t) = \alpha \cdot g_1(t) + \beta \cdot g_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = \alpha \cdot G_1(j\omega) + \beta \cdot G_2(j\omega)
\end{aligned}$$

można wyznaczyć transformatę Fouriera $G(j\omega)$ funkcji $g(t)$

$$\begin{aligned}
G(j\omega) &= G_1(j\omega) + G_2(j\omega) = \\
&= A \cdot Sa(\omega \cdot t_0) - A \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} = \\
&= A \cdot (Sa(\omega \cdot t_0) - e^{-j\omega \cdot t_0})
\end{aligned}$$

Znając transformatę $G(j\omega)$ i korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę $F(j\omega)$ funkcji $f(t)$

$$\begin{aligned}
g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\
f(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) \cdot d\tau &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)
\end{aligned}$$

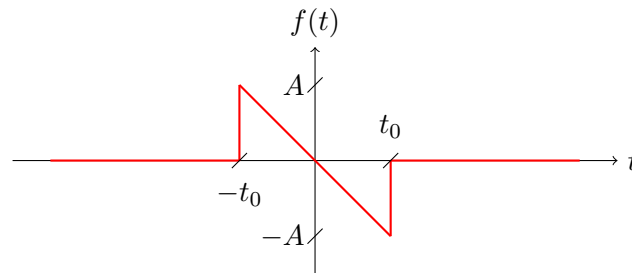
Podstawiając otrzymujemy

$$\begin{aligned}
F(j\omega) &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(0) \cdot G(0) = \\
&= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot A \cdot (Sa(\omega \cdot t_0) - e^{-j\omega \cdot t_0}) + \pi \cdot \delta(0) \cdot A \cdot (Sa(0 \cdot t_0) - e^{-j \cdot 0 \cdot t_0}) = \\
&= \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot (Sa(\omega \cdot t_0) - e^{-j\omega \cdot t_0}) + \pi \cdot \delta(0) \cdot A \cdot (Sa(0) - e^0) = \\
&= \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot (Sa(\omega \cdot t_0) - e^{-j\omega \cdot t_0}) + \pi \cdot \delta(0) \cdot A \cdot (1 - 1) = \\
&= \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot (Sa(\omega \cdot t_0) - e^{-j\omega \cdot t_0}) + \pi \cdot \delta(0) \cdot A \cdot 0 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot \left(\text{Sa}(\omega \cdot t_0) - e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \right) + 0 = \\ &= \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot \left(\text{Sa}(\omega \cdot t_0) - e^{-j \cdot \omega \cdot t_0} \right) \end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(j\omega) = \frac{A}{j \cdot \omega} \cdot (\text{Sa}(\omega \cdot t_0) - e^{-j \cdot \omega \cdot t_0})$.

Zadanie 15. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku za pomocą twierdzeń.



W pierwszej kolejności trzeba wyznaczyć jawną postać równań opisujących funkcję $f(t)$.

W tym celu wyznaczamy równanie prostej na odcinku $(-t_0, t_0)$

Ogólne równanie prostej to:

$$f(t) = m \cdot t + b \quad (3.86)$$

Dla rozważanego zakresu wartości t wykres funkcji jest prostą przechodzącą przez dwa punkty: $(-t_0, A)$ oraz $(t_0, -A)$. Możemy więc napisać układ równań, rozwiązać go i wyznaczyć parametry prostej m i b .

$$\begin{aligned} &\begin{cases} A = m \cdot (-t_0) + b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases} \\ &\begin{cases} A = -m \cdot t_0 + b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases} \\ &\begin{cases} A - A = -m \cdot t_0 + b + m \cdot t_0 + b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases} \\ &\begin{cases} 0 = 2 \cdot b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases} \\ &\begin{cases} 0 = b \\ -A = m \cdot t_0 + b \end{cases} \\ &\begin{cases} 0 = b \\ -A = m \cdot t_0 + 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} 0 = b \\ -A = m \cdot t_0 \end{cases} \\ &\begin{cases} 0 = b \\ -\frac{A}{t_0} = m \end{cases} \end{aligned}$$

Równanie prostej dla t z zakresu $(-t_0, t_0)$ to:

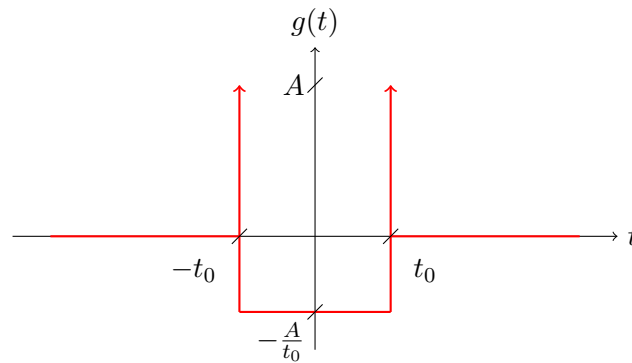
$$f(t) = -\frac{A}{t_0} \cdot t$$

Podsumowując, sygnał $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} \cdot t & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \quad (3.87)$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodną sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} + A \cdot \delta(t + t_0) + A \cdot \delta(t - t_0) \quad (3.88)$$

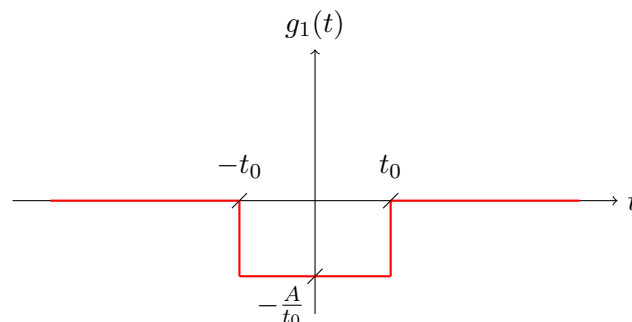


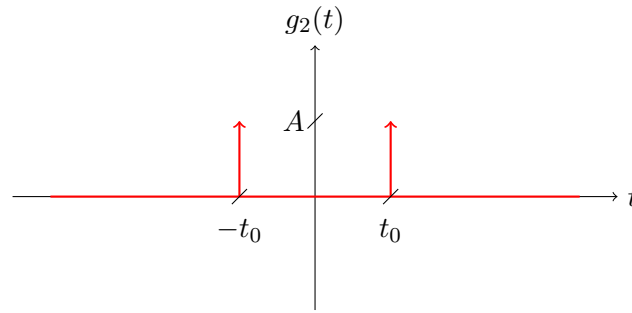
Funkcja $g(t)$ składa się z dwóch sygnałów $g_1(t)$ i $g_2(t)$

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) \quad (3.89)$$

$$g_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ -\frac{A}{t_0} & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} \quad (3.90)$$

$$g_2(t) = A \cdot \delta(t + t_0) + A \cdot \delta(t - t_0) \quad (3.91)$$





Wyznaczenie transformaty sygnału $g_2(t)$ złożonego z delt Diracka jest znacznie prostsze.

$$G_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (3.92)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} G_2(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (A \cdot \delta(t + t_0) + A \cdot \delta(t - t_0)) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0)) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= A \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \right) = \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\ &= A \cdot (e^{-j\omega \cdot (-t_0)} + e^{-j\omega \cdot t_0}) = \\ &= A \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} + e^{-j\omega \cdot t_0}) = \\ &= A \cdot (e^{j\omega \cdot t_0} + e^{-j\omega \cdot t_0}) \cdot \frac{2}{2} = \\ &= 2 \cdot A \cdot \frac{e^{j\omega \cdot t_0} + e^{-j\omega \cdot t_0}}{2} = \\ &= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \right\} = \\ &= 2 \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t_0) \end{aligned}$$

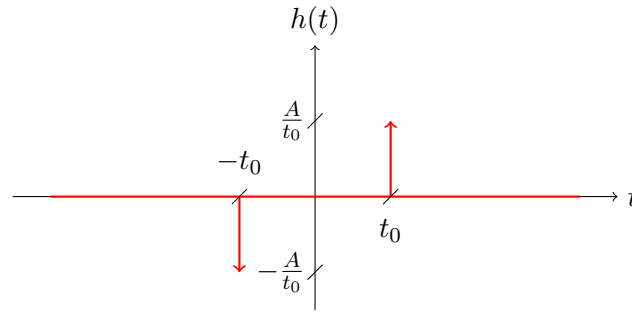
Transformata sygnału $g_2(t)$ to $G_2(j\omega) = 2 \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t_0)$

Funkcja $g_1(t)$ jest jeszcze zbyt złożona tak więc wyznaczamy pochodną raz jeszcze

$$h(t) = g_1'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -t_0) \\ 0 & t \in (-t_0; t_0) \\ 0 & t \in (t_0; \infty) \end{cases} - \frac{A}{t_0} \delta(t + t_0) + \frac{A}{t_0} \delta(t - t_0) \quad (3.93)$$

czyli po prostu

$$h(t) = g_1'(t) = -\frac{A}{t_0} \delta(t + t_0) + \frac{A}{t_0} \delta(t - t_0) \quad (3.94)$$



Wyznaczanie transformaty sygnału $h(t)$ złożonego z delt diracka jest znacznie prostsze.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (3.95)$$

Podstawiamy do wzoru na transformatę wzór naszej funkcji

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t + t_0) + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - t_0) \right) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{A}{t_0} \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} + \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \right) \cdot dt = \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{t_0} \cdot \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= -\frac{A}{t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t + t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \frac{A}{t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\ &= -\frac{A}{t_0} \cdot e^{-j\omega \cdot (-t_0)} + \frac{A}{t_0} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} = \\ &= -\frac{A}{t_0} \cdot e^{j\omega \cdot t_0} + \frac{A}{t_0} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} = \\ &= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0} \right) = \\ &= -\frac{A}{t_0} \cdot \left(e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0} \right) \cdot \frac{2 \cdot j}{2 \cdot j} = \\ &= -\frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot j \cdot \frac{e^{j\omega \cdot t_0} - e^{-j\omega \cdot t_0}}{2 \cdot j} = \\ &= \left\{ \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2 \cdot j} \right\} = \\ &= -\frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot j \cdot \sin(\omega \cdot t_0) = \\ &= -j \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) \end{aligned}$$

Transformata sygnału $h(t)$ to $H(j\omega) = -j \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \sin(\omega \cdot t_0)$

Następnie możemy wykorzystać twierdzenie o całkowaniu aby wyznaczyć transformatę sygnału $g_1(t)$ na podstawie transformaty sygnału $h(t) = g_1'(t)$

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega)$$

$$g_1(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot H(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0)$$

Podstawiając obliczoną wcześniej transformatę $H(j\omega)$ sygnału $h(t)$ otrzymujemy transformatę $G_1(j\omega)$ sygnału $g_1(t)$

$$\begin{aligned} G_1(j\omega) &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot H(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) = \\ &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \left(-j \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) \right) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot \left(-j \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \sin(0 \cdot t_0) \right) = \\ &= -\frac{1}{\omega} \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \sin(\omega \cdot t_0) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot j \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot \sin(0) = \\ &= -2 \cdot A \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{\omega \cdot t_0} - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot j \cdot \frac{2 \cdot A}{t_0} \cdot 0 = \\ &= -2 \cdot A \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t_0)}{\omega \cdot t_0} - 0 = \\ &= \left\{ Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x} \right\} = \\ &= -2 \cdot A \cdot Sa(\omega \cdot t_0) \end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $g_1(t)$ jest równa $G_1(j\omega) = -2 \cdot A \cdot Sa(\omega \cdot t_0)$.

Korzystając z jednorodności transformaty Fouriera

$$\begin{aligned} g_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(j\omega) \\ g_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G_2(j\omega) \\ g(t) &= \alpha \cdot g_1(t) + \beta \cdot g_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = \alpha \cdot G_1(j\omega) + \beta \cdot G_2(j\omega) \end{aligned}$$

można wyznaczyć transformatę Fouriera $G(j\omega)$ funkcji $g(t)$

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= G_1(j\omega) + G_2(j\omega) = \\ &= -2 \cdot A \cdot Sa(\omega \cdot t_0) + 2 \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t_0) = \\ &= -2 \cdot A \cdot (Sa(\omega \cdot t_0) - \cos(\omega \cdot t_0)) \end{aligned}$$

Znając transformatę $G(j\omega)$ i korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę $F(j\omega)$ funkcji $f(t)$

$$\begin{aligned} g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\ f(t) &= \int_{-\infty}^t g(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \end{aligned}$$

Podstawiając otrzymujemy

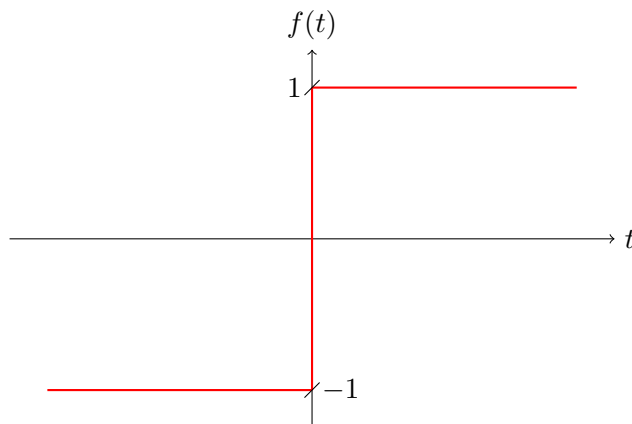
$$F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot (-2 \cdot A \cdot (Sa(\omega \cdot t_0) - \cos(\omega \cdot t_0))) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot (-2 \cdot A \cdot (Sa(0 \cdot t_0) - \cos(0 \cdot t_0))) = \\
&= -\frac{2 \cdot A}{j \cdot \omega} \cdot (Sa(\omega \cdot t_0) - \cos(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot (Sa(0) - \cos(0)) = \\
&= -\frac{2 \cdot A}{j \cdot \omega} \cdot (Sa(\omega \cdot t_0) - \cos(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot (1 - 1) = \\
&= -\frac{2 \cdot A}{j \cdot \omega} \cdot (Sa(\omega \cdot t_0) - \cos(\omega \cdot t_0)) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot A \cdot 0 = \\
&= -\frac{2 \cdot A}{j \cdot \omega} \cdot (Sa(\omega \cdot t_0) - \cos(\omega \cdot t_0)) - 0 = \\
&= -\frac{2 \cdot A}{j \cdot \omega} \cdot (Sa(\omega \cdot t_0) - \cos(\omega \cdot t_0))
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(j\omega) = -\frac{2 \cdot A}{j \cdot \omega} \cdot (Sa(\omega \cdot t_0) - \cos(\omega \cdot t_0))$.

Zadanie 16.

Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t) = \operatorname{sgn}(t)$ wykorzystując twierdzenia opisujące właściwości transformacji Fouriera.

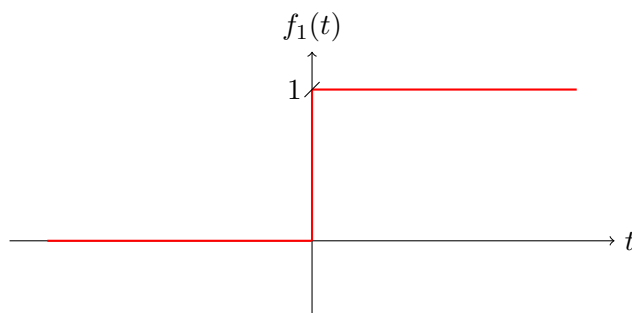


Opiszmy sygnał za pomocą skoków jednostkowych.

$$\begin{aligned} f(t) = \operatorname{sgn}(t) &= \\ &= \mathbb{1}(t) - \mathbb{1}(-t) = \\ &= f_1(t) - f_2(t) \end{aligned}$$

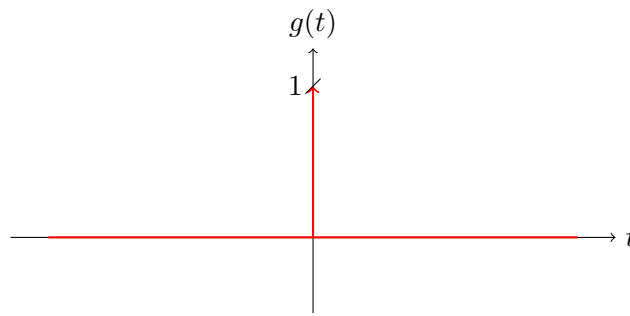
gdzie:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \mathbb{1}(t) \\ f_2(t) &= \mathbb{1}(-t) \end{aligned}$$



Transformaty sygnału $f_1(t) = \mathbb{1}(t)$ nie można wyznaczyć wprost ze wzoru. Ale łatwo można wyznaczyć pochodną $f_1'(t)$:

$$g(t) = f_1'(t) = \delta(t)$$



Dla sygnału $g(t) = \delta(t)$ w bardzo łatwy sposób można wyznaczyć transformatę Fouriera.

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} dt = \\
 &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\
 &= e^{-j\omega \cdot 0} = \\
 &= e^0 = \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Transformatą Fouriera sygnału $g(t) = \delta(t)$ jest $G(j\omega) = 1$.

Korzystając z twierdzenia o całkowaniu można wyznaczyć transformatę funkcji $f_1(t)$:

$$\begin{aligned}
 g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\
 f_1(t) &= \int_{-\infty}^t g(\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_1(j\omega) &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) = \\
 &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot 1 + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot 1 = \\
 &= \frac{1}{j \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega)
 \end{aligned}$$

A więc transformatą skoku jednostkowego jest $F_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi \cdot \delta(\omega)$.

Funkcję $f_2(t)$ można zapisać jako:

$$\begin{aligned}
 f_2(t) &= \mathbb{1}(-t) = \\
 &= \mathbb{1}(-1 \cdot t) = \\
 &= f_1(-1 \cdot t)
 \end{aligned}$$

A więc transformatę funkcji $f_2(t)$ można wyznaczyć z twierdzenia o zmianie skali

$$f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega)$$

$$f_2(t) = f_1(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot F_1(j\frac{\omega}{\alpha})$$

$$F_2(j\omega) = \frac{1}{|a|} \cdot F_1(j\frac{\omega}{a}) =$$

$$= \left\{ a = -1 \right\} =$$

$$= \frac{1}{|-1|} \cdot \frac{1}{j \cdot \frac{\omega}{-1}} + \pi \cdot \delta\left(\frac{\omega}{-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{-j \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(-\omega) =$$

$$= -\frac{1}{j \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega)$$

Transformata funkcji $f_2(t)$ jest równa $F_2(j\omega) = -\frac{1}{j\omega} + \pi \cdot \delta(\omega)$.

Transformatę funkcji $f(t)$ możemy wyznaczyć z twierdzenia o jednorodności

$$f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega)$$

$$f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(j\omega)$$

$$f(t) = \alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \alpha \cdot F_1(j\omega) + \beta \cdot F_2(j\omega)$$

$$F(j\omega) = F_1(j\omega) - F_2(j\omega) =$$

$$= \frac{1}{j \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega) - \left(-\frac{1}{j \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega) \right) =$$

$$= \frac{1}{j \cdot \omega} + \pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j \cdot \omega} - \pi \cdot \delta(\omega) =$$

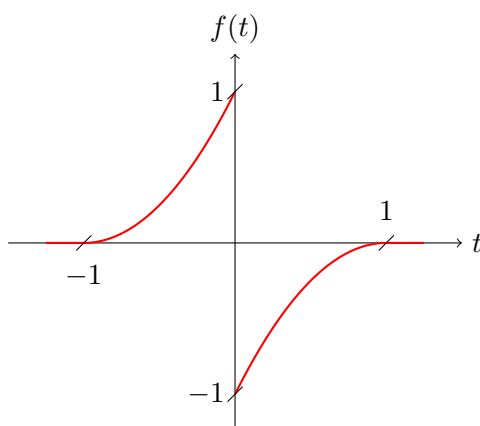
$$= \frac{2}{j \cdot \omega}$$

Transformata funkcji $f(t) = \text{sgn}(t)$ jest równa $F(j\omega) = \frac{2}{j\omega}$.

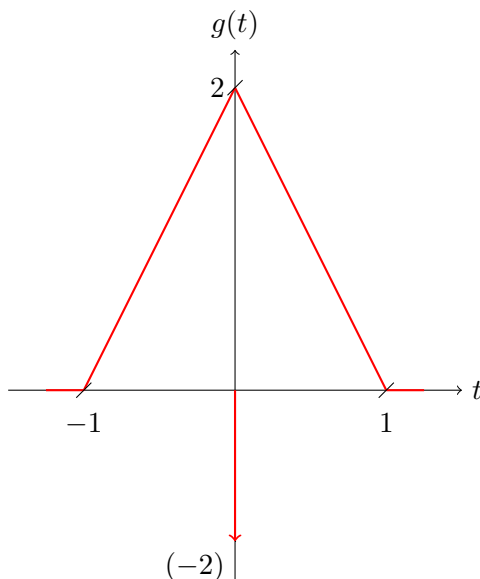
Zadanie 17. Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ podanego poniżej za pomocą twierdzeń, wiedząc że transformata sygnału $\Lambda(t)$ jest równa $Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (-\infty; -1) \\ (t+1)^2 & \text{dla } t \in (-1; 0) \\ -(t-1)^2 & \text{dla } t \in (0; 1) \\ 0 & \text{dla } t \in (1; \infty) \end{cases} \quad (3.96)$$

$$\Lambda(t) \xrightarrow{F} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.97)$$



Wyznamy pochodną sygnału $f(t)$, czyli sygnał $g(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t)$.



Sygnał $g(t)$ można opisać, wykorzystując sygnały elementarne:

$$g(t) = 2 \cdot \Lambda(t) - 2 \cdot \delta(t) \quad (3.98)$$

Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

$$f(t) = \int_{-\infty}^t g(x) \cdot dx \quad (3.99)$$

Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ można wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \quad (3.100)$$

Z powyższego równania widać, że musimy znać $G(j\omega)$, czyli transformatę sygnału $g(t)$.

Ponieważ transformacja Fouriera jest przekształceniem liniowym, dlatego można wyznaczyć osobno transformaty poszczególnych sygnałów elementarnych, czyli:

$$g(t) = 2 \cdot (g_1(t) - g_2(t)) \quad (3.101)$$

gdzie:

$$g_1(t) = \Lambda(t)$$

$$g_2(t) = \delta(t)$$

Wyznamy transformatę sygnału $g_1(t)$, czyli $G_1(j\omega)$.

Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Lambda(t)\} = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Transformata sygnału $g_1(t)$ to:

$$G_1(j\omega) = \mathcal{F}\{g_1(t)\} = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.102)$$

Wyznamy transformatę sygnału $g_2(t)$, czyli $G_2(j\omega)$. Dla sygnału $g_2(t) = \delta(t)$ w bardzo łatwy sposób można wyznaczyć transformatę Fouriera.

$$\begin{aligned} G_2(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} dt = \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\ &= e^{-j\omega \cdot 0} = \\ &= e^0 = \\ &= 1 \end{aligned}$$

Transformatą Fouriera sygnału $g_2(t) = \delta(t)$ jest $G_2(j\omega) = 1$.

Transformatę funkcji $g(t)$ możemy wyznaczyć z twierdzenia o jednorodności

$$g_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_1(j\omega)$$

$$g_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G_2(j\omega)$$

$$g(t) = \alpha \cdot g_1(t) + \beta \cdot g_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = \alpha \cdot G_1(j\omega) + \beta \cdot G_2(j\omega)$$

$$\begin{aligned} g(t) &= 2 \cdot (g_1(t) - g_2(t)) \\ G(j\omega) &= 2 \cdot (G_1(j\omega) - G_2(j\omega)) = \\ &= 2 \cdot \left(Sa^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) - 1 \right) \end{aligned}$$

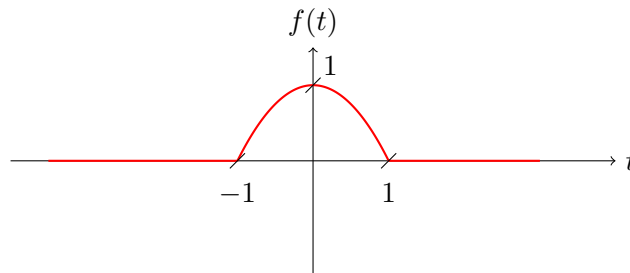
Mamy wyznaczoną transformatę $G(j\omega)$. Teraz, z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyć transformatę $F(j\omega)$:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) = \\ &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot 2 \cdot \left(Sa^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) - 1 \right) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} G(0) = 2 \cdot \left(Sa^2 \left(\frac{0}{2} \right) - 1 \right) \\ G(0) = 2 \cdot (Sa^2(0) - 1) \\ G(0) = 2 \cdot (1 - 1) \\ G(0) = 0 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{2}{j \cdot \omega} \cdot \left(Sa^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) - 1 \right) \end{aligned}$$

Transformata funkcji $f(t)$ jest równa $F(j\omega) = \frac{2}{j\omega} \cdot (Sa^2(\frac{\omega}{2}) - 1)$.

Zadanie 18.

Oblicz transformatę Fouriera sygnału $f(t)$ przedstawionego na rysunku wykorzystując twierdzenia opisujące właściwości transformacji Fouriera. Wykorzystaj informację o tym, że $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa(\frac{\omega}{2})$.

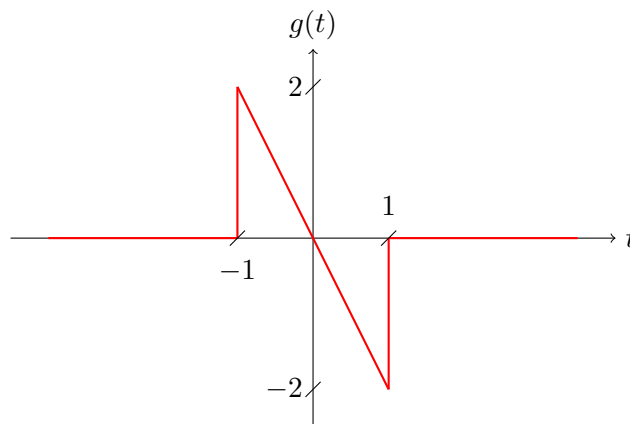


Sygnał $f(t)$ możemy opisać jako:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ 1 - t^2 & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} \quad (3.103)$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy pochodną sygnału $f(t)$

$$g(t) = f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ -2 \cdot t & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} \quad (3.104)$$



Można sprawdzić, że całkując sygnał $g(t)$ otrzymamy sygnał $f(t)$, czyli:

$$f(t) = \int_{-\infty}^t g(x) \cdot dx \quad (3.105)$$

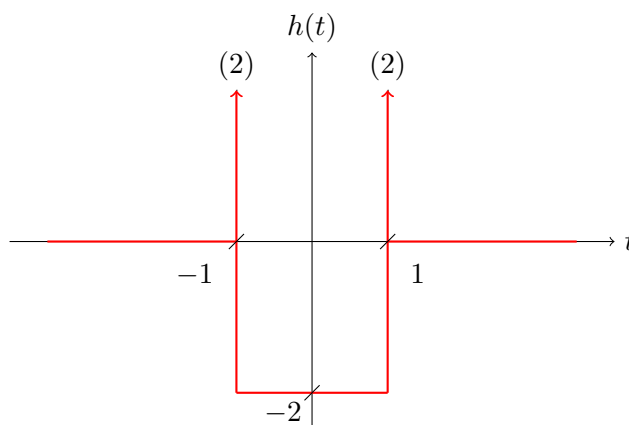
Skoro tak jest, to transformatę sygnału $f(t)$ można wyznaczyć z twierdzenia o całkowaniu sygnału, w tym przypadku całkować będziemy sygnał $g(t)$:

$$F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \quad (3.106)$$

Pytanie, czy można dalej uprościć sygnał $g(t)$ dokonując jego różniczkowania. Wyznamy pochodną sygnału $g(t)$, czyli drugą pochodną sygnału $f(t)$:

$$h(t) = \frac{\partial}{\partial t} g(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t) \quad (3.107)$$

$$h(t) = g'(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; -1) \\ -2 & t \in (-1; 1) \\ 0 & t \in (1; \infty) \end{cases} + 2 \cdot \delta(t+1) + 2 \cdot \delta(t-1) \quad (3.108)$$



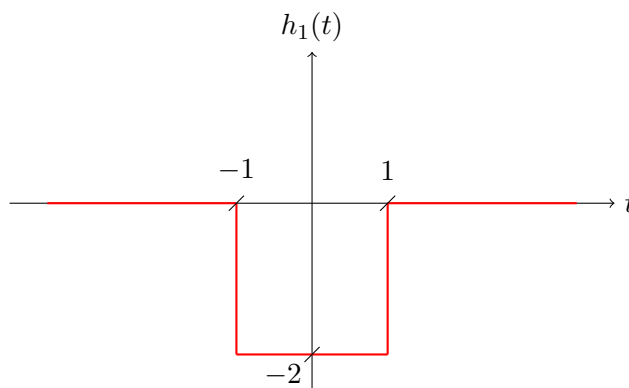
Funkcja $h(t)$ składa się z dwóch sygnałów $h_1(t)$ i $h_2(t)$:

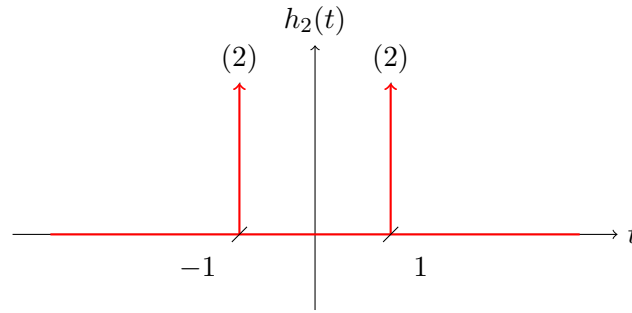
$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \quad (3.109)$$

gdzie:

$$h_1(t) = -2 \cdot \Pi\left(\frac{t}{2}\right) \quad (3.110)$$

$$h_2(t) = 2 \cdot \delta(t+1) + 2 \cdot \delta(t-1) \quad (3.111)$$





Wyznamy transformtę sygnału $h_1(t)$, czyli $H_1(j\omega)$.

Z treści zadania wiemy, że: $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

Wykorzystując twierdzenie o zmianie skali mamy:

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) \\ h_1(t) = x(\alpha \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H_1(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot X\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{1}{2} \cdot t\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\left|\frac{1}{2}\right|} \cdot Sa\left(\frac{\frac{\omega}{2}}{\frac{1}{2}}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot 2}{2}\right) \\ \Pi\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2 \cdot Sa(\omega) \\ -2 \cdot \Pi\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} -2 \cdot 2 \cdot Sa(\omega) \\ -2 \cdot \Pi\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} -4 \cdot Sa(\omega) \end{aligned}$$

Transformata sygnału $h_1(t)$ to:

$$H_1(j\omega) = \mathcal{F}\{h_1(t)\} = -4 \cdot Sa(\omega) \quad (3.112)$$

Wyznaczenie transformaty sygnału $h_2(t)$ złożonego z delt Diracka jest znacznie prostsze.

$$H_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned} H_2(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_2(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (2 \cdot \delta(t+1) + 2 \cdot \delta(t-1)) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t+1) + \delta(t-1)) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt = \\
&= 2 \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+1) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt \right) = \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot f(t) \cdot dt = f(t_0) \right\} = \\
&= 2 \cdot \left(e^{-j\omega \cdot (-1)} + e^{-j\omega \cdot 1} \right) = \\
&= 2 \cdot (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) = \\
&= 2 \cdot (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) \cdot \frac{2}{2} = \\
&= 4 \cdot \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} = \\
&= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \right\} = \\
&= 4 \cdot \cos(\omega)
\end{aligned}$$

Transformata sygnału $h_2(t)$ to $H_2(j\omega) = 4 \cdot \cos(\omega)$.

Korzystając z liniowości transformacji Fouriera:

$$\begin{aligned}
h_1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H_1(j\omega) \\
h_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H_2(j\omega) \\
h(t) = \alpha \cdot h_1(t) + \beta \cdot h_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) = \alpha \cdot H_1(j\omega) + \beta \cdot H_2(j\omega)
\end{aligned}$$

można wyznaczyć transformatę Fouriera $H(j\omega)$ funkcji $h(t)$

$$\begin{aligned}
H(j\omega) &= H_1(j\omega) + H_2(j\omega) = \\
&= -4 \cdot \text{Sa}(\omega) + 4 \cdot \cos(\omega) = \\
&= 4 \cdot (\cos(\omega) - \text{Sa}(\omega))
\end{aligned}$$

Mamy wyznaczoną transformatę $H(j\omega)$. Teraz, z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyć transformatę $G(j\omega)$:

$$\begin{aligned}
h(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) \\
g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) \cdot d\tau &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot H(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(j\omega) &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot H(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot H(0) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} H(0) = 4 \cdot (\cos(0) - \text{Sa}(0)) \\ H(0) = 4 \cdot (1 - 1) \\ H(0) = 4 \cdot 0 \\ H(0) = 0 \end{array} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot (4 \cdot (\cos(\omega) - \text{Sa}(\omega))) + 0 = \\
&= \frac{4}{j \cdot \omega} \cdot (\cos(\omega) - \text{Sa}(\omega))
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $g(t)$ jest równa $G(j\omega) = \frac{4}{j\omega} \cdot (\cos(\omega) - \text{Sa}(\omega))$.

Mamy wyznaczoną transformatę $G(j\omega)$. Teraz, kolejny raz z twierdzenia o całkowaniu sygnału, możemy wyznaczyć transformatę $F(j\omega)$:

$$\begin{aligned}
&g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\
f(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) \cdot d\tau &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) \\
F(j\omega) &= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot G(j\omega) + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot G(0) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} G(0) = \frac{4}{j \cdot 0} \cdot (\cos(0) - \text{Sa}(0)) \\ G(0) = \frac{0}{0}!!! \\ G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot dt = \int_{-1}^1 (-2) \cdot t \cdot dt = (-2) \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^1 \\ G(0) = (-2) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = (-2) \cdot 0 \\ G(0) = 0 \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \frac{4}{j \cdot \omega} \cdot (\cos(\omega) - \text{Sa}(\omega)) + 0 = \\
&= \frac{4}{j^2 \cdot \omega^2} \cdot (\cos(\omega) - \text{Sa}(\omega)) = \\
&= \frac{4}{(-1) \cdot \omega^2} \cdot (\cos(\omega) - \text{Sa}(\omega)) = \\
&= \frac{4}{\omega^2} \cdot (\text{Sa}(\omega) - \cos(\omega))
\end{aligned}$$

Ostatecznie transformata sygnału $f(t)$ jest równa $F(j\omega) = \frac{4}{\omega^2} \cdot (\text{Sa}(\omega) - \cos(\omega))$.

3.3 Obliczenia energii sygnału za pomocą transformaty Fouriera.

Twierdzenie Parsewala

Zadanie 1. Oblicz energię sygnału $f(t) = Sa(\omega_0 \cdot t)$, wiedząc że transformata sygnału $\Pi(t)$ jest równa $Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa(\omega_0 \cdot t) \quad (3.114)$$

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.115)$$

Energię sygnału można wyznaczyć ze wzoru:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \cdot dt \quad (3.116)$$

Podstawiając dany sygnał $f(t)$ do wzoru na energię otrzymujemy:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |Sa(\omega_0 \cdot t)|^2 \cdot dt = \\ &= \left\{ Sa(x) = \frac{\sin(x)}{x} \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(\omega_0 \cdot t)}{(\omega_0 \cdot t)} \right|^2 \cdot dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega_0 \cdot t)}{(\omega_0 \cdot t)^2} \cdot dt = \\ &= \end{aligned}$$

Próbując obliczyć energię tym sposobem musimy obliczyć całkę cykliczną. A może jest łatwiejszy sposób?

Spróbujemy wykorzystać twierdzenie Parsewala:

$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \quad (3.117)$$

W tym podejściu musimy obliczyć transformatę Fouriera sygnału $f(t)$, czyli $F(j\omega)$.

Z treści zadania wiemy, że:

$$g(t) = \Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.118)$$

Na podstawie twierdzenia o symetrii przekształcenia Fouriera:

$$\begin{aligned} g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) \\ f(t) &= G(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) = 2\pi \cdot g(-\omega) \end{aligned}$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} Sa\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(-\omega) \\ Sa\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(\omega) \end{aligned}$$

Teraz musimy przeskalować $Sa\left(\frac{t}{2}\right)$ tak, aby otrzymać $Sa(\omega_0 \cdot t)$. W tym celu skorzystamy z twierdzenia o zmianie skali podstawiając $\alpha = 2 \cdot \omega_0$:

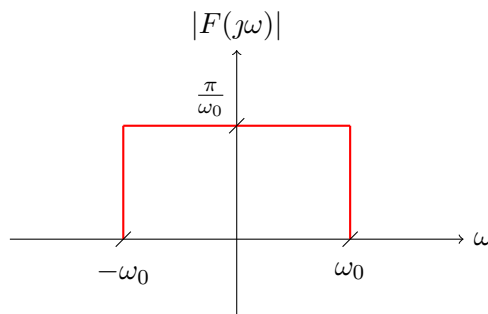
$$\begin{aligned} f(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(j\omega) \\ g(t) = f(\alpha \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot F\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Sa\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(\omega) \\ Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2 \cdot \omega_0} \cdot 2\pi \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right) \\ Sa(\omega_0 \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right) \end{aligned}$$

Energię wyznaczymy ze wzoru Parsewala:

$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \quad (3.119)$$

Narysujmy widmo amplitudowe sygnału $f(t)$, czyli $|F(j\omega)|$.



$$|F(j\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega \in (-\infty; -\omega_0) \\ \frac{\pi}{\omega_0} & \omega \in (-\omega_0; \omega_0) \\ 0 & \omega \in (\omega_0; \infty) \end{cases}$$

Wyznamy też $|F(j\omega)|^2$:

$$|F(j\omega)|^2 = \begin{cases} 0 & \omega \in (-\infty; -\omega_0) \\ \left(\frac{\pi}{\omega_0}\right)^2 & \omega \in (-\omega_0; \omega_0) \\ 0 & \omega \in (\omega_0; \infty) \end{cases}$$

Podstawmy wyznaczone dane do wzoru Parsevala:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_{-\infty}^{-\omega_0} 0 \cdot d\omega + \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \left(\frac{\pi}{\omega_0}\right)^2 \cdot d\omega + \int_{\omega_0}^{\infty} 0 \cdot d\omega \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(0 + \left(\frac{\pi}{\omega_0}\right)^2 \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} d\omega + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0}\right)^2 \cdot \left(\omega\right)_{-\omega_0}^{\omega_0} = \\ &= \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0^2} \cdot (\omega_0 - (-\omega_0)) = \\ &= \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0^2} \cdot (2 \cdot \omega_0) = \\ &= \frac{\pi}{\omega_0} \end{aligned}$$

Energia sygnału $f(t) = Sa(\omega_0 \cdot t)$ równa się $E = \frac{\pi}{\omega_0}$.

Zadanie 2. Oblicz, jaka część energii sygnału $f(t) = A \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \cos^2(2 \cdot \omega_0 \cdot t)$ przypada na wartości pulsacji $|\omega| < 2 \cdot \omega_0$. Wykorzystaj informację, że transformata sygnału $\Pi(t)$ jest równa $Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = A \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \cos^2(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \quad (3.120)$$

$$\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.121)$$

$$\frac{E_{|\omega| < 2 \cdot \omega_0}}{E} = ? \quad (3.122)$$

Spróbujemy wykorzystać twierdzenie Parsewala:

$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \quad (3.123)$$

W tym podejściu musimy obliczyć transformatę Fouriera sygnału $f(t)$, czyli $F(j\omega)$.

Ponieważ możemy korzystać tylko ze znanych twierdzeń oraz wiedzy o transformacie sygnału $\Pi(t)$, to spróbujemy przekształcić sygnał $f(t)$ do postaci, w której wprost możemy zastosować twierdzenia. Zauważmy, że:

$$\begin{aligned} f(t) &= A \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \cos^2(2 \cdot \omega_0 \cdot t) = \\ &= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \right\} = \\ &= A \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \left(\frac{e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} \right)^2 = \\ &= A \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \left(\frac{(e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t})^2 + 2 \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + (e^{-2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t})^2}{4} \right) = \\ &= A \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \left(\frac{e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 \cdot e^{2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t - 2 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t}}{4} \right) = \\ &= A \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \left(\frac{e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + 2 \cdot e^0 + e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t}}{4} \right) = \\ &= \frac{A}{4} \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} + \frac{A}{2} \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) + \frac{A}{4} \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} = \\ &= f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) \end{aligned}$$

Korzystając z liniowości przekształcenia Fouriera możemy niezależnie obliczyć transformaty dla sygnałów $f_1(t)$, $f_2(t)$ i $f_3(t)$, a następnie zsumować te transformaty.

Zacznijmy od sygnału $f_2(t)$:

Z treści zadania wiemy, że:

$$g(t) = \Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.124)$$

Na podstawie twierdzenia o symetrii przekształcenia Fouriera:

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega)$$

$$h(t) = G(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega) = 2\pi \cdot g(-\omega)$$

otrzymujemy:

$$Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(-\omega)$$

$$Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(\omega)$$

Teraz musimy przeskalować $Sa\left(\frac{t}{2}\right)$ tak, aby otrzymać $Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t)$. W tym celu skorzystamy z twierdzenia o zmianie skali podstawiając $\alpha = 4 \cdot \omega_0$:

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega)$$

$$f_2(t) = h(\alpha \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(j\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot H\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

$$Sa\left(\frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(\omega)$$

$$Sa\left(4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|4 \cdot \omega_0|} \cdot 2\pi \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right)$$

$$Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right)$$

$$f_2(t) = \frac{A}{2} \cdot Sa(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right) = F_2(j\omega)$$

Podsumowując, transformata sygnału $f_2(t)$ to $F_2(j\omega) = \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right)$.

Zauważmy, że $f_1(t) = \frac{1}{2} \cdot f_2(t) \cdot e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t}$, czyli $f_1(t)$ to zmodulowany sygnał $f_2(t)$. Stosując twierdzenie o modulacji:

$$f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(j\omega)$$

$$f_1(t) = f_2(t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(j\omega) = F_2(j(\omega - \omega_0))$$

otrzymujemy:

$$f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right)$$

$$f_2(t) \cdot e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{2} \cdot f_2(t) \cdot e^{4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right) = F_1(j\omega)$$

Podsumowując, transformata sygnału $f_1(t)$ to $F_1(j\omega) = \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right)$.

Podobnie zauważmy, że $f_3(t) = \frac{1}{2} \cdot f_2(t) \cdot e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t}$, czyli $f_3(t)$ to zmodulowany sygnał $f_2(t)$. Stosując twierdzenie o modulacji:

$$\begin{aligned} f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_2(j\omega) \\ f_3(t) = f_2(t) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} F_3(j\omega) = F_2(j(\omega - \omega_0)) \end{aligned}$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f_2(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right) \\ f_2(t) \cdot e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right) \\ f_3(t) = \frac{1}{2} \cdot f_2(t) \cdot e^{-4 \cdot j \cdot \omega_0 \cdot t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right) = F_3(j\omega) \end{aligned}$$

Podsumowując, transformata sygnału $f_3(t)$ to $F_3(j\omega) = \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right)$.

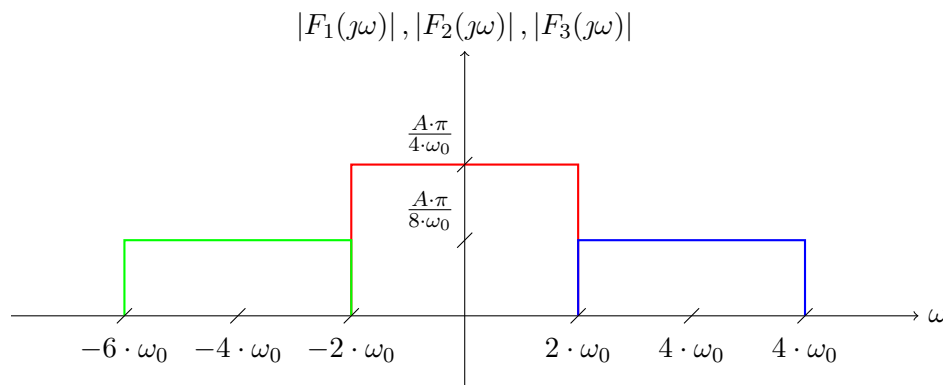
Teraz możemy obliczyć transformatę sygnału $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$:

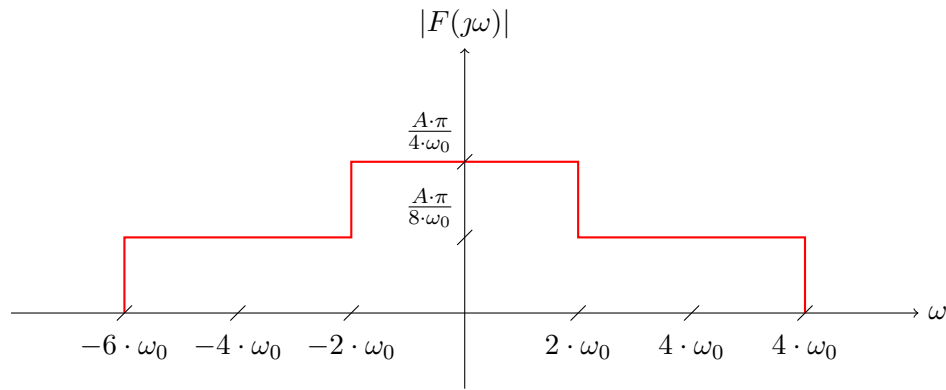
$$\begin{aligned} F(j\omega) &= F_1(j\omega) + F_2(j\omega) + F_3(j\omega) = \\ &= \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right) + \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{4 \cdot \omega_0}\right) + \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + 4 \cdot \omega_0}{4 \cdot \omega_0}\right) \end{aligned}$$

Energię wyznaczmy ze wzoru Parsevala:

$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \quad (3.125)$$

Narysujmy widmo amplitudowe sygnału $f(t)$, czyli $|F(j\omega)|$. Najpierw narysujmy oddzielnie widma $|F_1(j\omega)|$, $|F_2(j\omega)|$ oraz $|F_3(j\omega)|$, a póniej ich sumę.





$$|F(j\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega \in (-\infty; -6 \cdot \omega_0) \\ \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} & \omega \in (-6 \cdot \omega_0; -2 \cdot \omega_0) \\ \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} & \omega \in (-2 \cdot \omega_0; 2 \cdot \omega_0) \\ \frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} & \omega \in (2 \cdot \omega_0; 6 \cdot \omega_0) \\ 0 & \omega \in (6 \cdot \omega_0; \infty) \end{cases}$$

Wyznamy też $|F(j\omega)|^2$:

$$|F(j\omega)|^2 = \begin{cases} 0 & \omega \in (-\infty; -6 \cdot \omega_0) \\ \left(\frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}\right)^2 & \omega \in (-6 \cdot \omega_0; -2 \cdot \omega_0) \\ \left(\frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0}\right)^2 & \omega \in (-2 \cdot \omega_0; 2 \cdot \omega_0) \\ \left(\frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}\right)^2 & \omega \in (2 \cdot \omega_0; 6 \cdot \omega_0) \\ 0 & \omega \in (6 \cdot \omega_0; \infty) \end{cases}$$

Podstawmy wyznaczone dane do wzoru Parsewala:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_{-\infty}^{-6\omega_0} 0 \cdot d\omega + \int_{-6\omega_0}^{-2\omega_0} \left(\frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}\right)^2 \cdot d\omega + \int_{-2\omega_0}^{2\omega_0} \left(\frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0}\right)^2 \cdot d\omega + \int_{2\omega_0}^{6\omega_0} \left(\frac{A \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}\right)^2 \cdot d\omega + \int_{6\omega_0}^{\infty} 0 \cdot d\omega \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(0 + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{64 \cdot \omega_0^2} \cdot \int_{-6\omega_0}^{-2\omega_0} d\omega + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot \int_{-2\omega_0}^{2\omega_0} d\omega + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{64 \cdot \omega_0^2} \cdot \int_{2\omega_0}^{6\omega_0} d\omega + 0 \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{A^2 \cdot \pi^2}{64 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega \Big|_{-6\omega_0}^{-2\omega_0} + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega \Big|_{-2\omega_0}^{2\omega_0} + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{64 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega \Big|_{2\omega_0}^{6\omega_0} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{A^2 \cdot \pi^2}{64 \cdot \omega_0^2} \cdot (-2\omega_0 - (-6\omega_0)) + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot (2\omega_0 - (-2\omega_0)) + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{64 \cdot \omega_0^2} \cdot (6\omega_0 - 2\omega_0) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{A^2 \cdot \pi^2}{64 \cdot \omega_0^2} \cdot 4 \cdot \omega_0 + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot 4 \cdot \omega_0 + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{64 \cdot \omega_0^2} \cdot 4 \cdot \omega_0 \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{A^2 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0} + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{4 \cdot \omega_0} + \frac{A^2 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0} \right) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{A^2 \cdot \pi^2}{4 \cdot \omega_0} \cdot \left(\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} \right) = \\
&= \frac{A^2 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \left(\frac{2}{4} + 1 \right) = \\
&= \frac{A^2 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \left(\frac{3}{2} \right) = \\
&= \frac{3 \cdot A^2 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}
\end{aligned}$$

Energia sygnału $f(t) = A \cdot \text{Sa}(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \cdot \cos^2(2 \cdot \omega_0 \cdot t)$ równa się $E = \frac{3 \cdot A^2 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}$.

Energię sygnału dla pewnego zakresu pulsacji, także można wyznaczyć z twierdzenia Parsewala, ale zmieniając granice w całce zgodnie z oczekiwanym zakresem pulsacji, czyli dla pulsacji $|\omega| < 2 \cdot \omega_0$ otrzymamy wzór:

$$E_{|\omega| < 2 \cdot \omega_0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-2 \cdot \omega_0}^{2 \cdot \omega_0} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \quad (3.126)$$

$$\begin{aligned}
E_{|\omega| < 2 \cdot \omega_0} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-2 \cdot \omega_0}^{2 \cdot \omega_0} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-2 \cdot \omega_0}^{2 \cdot \omega_0} \left| \frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \right|^2 \cdot d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-2 \cdot \omega_0}^{2 \cdot \omega_0} \left(\frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \right)^2 \cdot d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{A \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \right)^2 \cdot \int_{-2 \cdot \omega_0}^{2 \cdot \omega_0} d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{A^2 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \right) \cdot \omega \Big|_{-2 \cdot \omega_0}^{2 \cdot \omega_0} = \\
&= \frac{A^2 \cdot \pi}{32 \cdot \omega_0^2} \cdot (2 \cdot \omega_0 - (-2 \cdot \omega_0)) = \\
&= \frac{A^2 \cdot \pi}{32 \cdot \omega_0^2} \cdot (4 \cdot \omega_0) = \\
&= \frac{A^2 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}
\end{aligned}$$

Podsumowując $E_{|\omega| < \omega_0} = \frac{A^2 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}$.

Teraz możemy obliczyć:

$$\frac{E_{|\omega| < 2 \cdot \omega_0}}{E} = ? \quad (3.127)$$

$$\frac{E_{|\omega| < 2 \cdot \omega_0}}{E} = \frac{\frac{A^2 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}}{\frac{3 \cdot A^2 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}} = \frac{A^2 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0} \cdot \frac{16 \cdot \omega_0}{3 \cdot A^2 \cdot \pi} = \frac{2}{3} \approx 66\%$$

Na pulsacje z zakresu $|\omega| < 2 \cdot \omega_0$ przypada około 66% energii sygnału.

Zadanie 3.

Oblicz, jaka część energii sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ przypada na wartości pulsacji $|\omega| < \omega_0$. Wykorzystaj informację, że transformata sygnału $\Lambda(t)$ jest równa $Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

$$f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \quad (3.128)$$

$$\Lambda(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.129)$$

$$\frac{E_{|\omega| < \omega_0}}{E} = ? \quad (3.130)$$

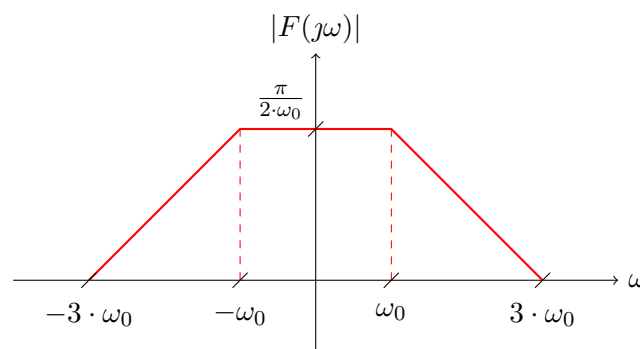
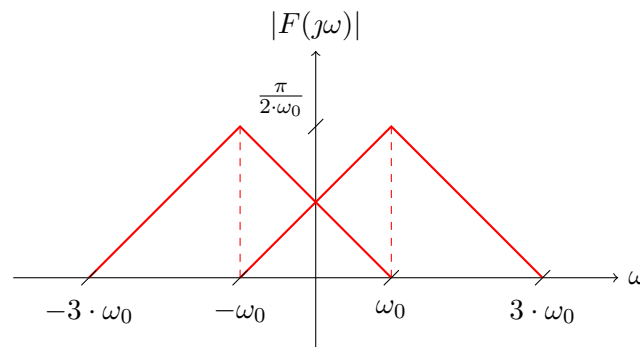
Całkowitą energię sygnału można wyznaczyć z twierdzenia Parsewala:

$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \quad (3.131)$$

W tym celu musimy wyznaczyć transformatę sygnału $f(t)$.

W jednym z wcześniejszych zadań obliczyliśmy, że transformata Fouriera sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ jest równa $F(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega - \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) + \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Lambda\left(\frac{\omega + \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) \right)$.

Narysujmy widmo amplitudowe sygnału $f(t)$, czyli $|F(j\omega)|$.



$$|F(j\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega \in (-\infty; -3 \cdot \omega_0) \\ \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega + \frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} & \omega \in (-3 \cdot \omega_0; -\omega_0) \\ \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} & \omega \in (-\omega_0; \omega_0) \\ -\frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega + \frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} & \omega \in (\omega_0; 3 \cdot \omega_0) \\ 0 & \omega \in (3 \cdot \omega_0; \infty) \end{cases}$$

Podstawiając do wzoru na energię całkowitą, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\int_{-\infty}^{-3 \cdot \omega_0} |0|^2 \cdot d\omega + \int_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} \left| \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega + \frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \right|^2 \cdot d\omega + \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \left| \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} \right|^2 \cdot d\omega + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} \left| -\frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega + \frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \right|^2 \cdot d\omega + \int_{3 \cdot \omega_0}^{\infty} |0|^2 \cdot d\omega \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[0 + \int_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} \left(\left(\frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \right)^2 \cdot \omega^2 + 2 \cdot \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \omega + \left(\frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \right)^2 \right) \cdot d\omega + \frac{\pi^2}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} d\omega + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} \left(\left(-\frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \right)^2 \cdot \omega^2 - 2 \cdot \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \omega + \left(\frac{3 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0} \right)^2 \right) \cdot d\omega + 0 \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \int_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} \omega^2 \cdot d\omega + \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \int_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} \omega \cdot d\omega + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot \int_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} d\omega + \frac{\pi^2}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega \Big|_{-\omega_0}^{\omega_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \int_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} \omega^2 \cdot d\omega - \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \int_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} \omega \cdot d\omega + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot \int_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} d\omega \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \frac{\omega^3}{3} \Big|_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} + \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \frac{\omega^2}{2} \Big|_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega \Big|_{-3 \cdot \omega_0}^{-\omega_0} + \frac{\pi^2}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot (\omega_0 - (-\omega_0)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \frac{\omega^3}{3} \Big|_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} - \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \frac{\omega^2}{2} \Big|_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot \omega \Big|_{\omega_0}^{3 \cdot \omega_0} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \left(-\frac{\omega_0^3}{3} - \left(-\frac{27 \cdot \omega_0^3}{3} \right) \right) + \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \left(\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{9 \cdot \omega_0^2}{2} \right) + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot (-\omega_0 - (-3 \cdot \omega_0)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2}{4 \cdot \omega_0^2} \cdot 2 \cdot \omega_0 + \frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \left(\frac{27 \cdot \omega_0^3}{3} - \frac{\omega_0^3}{3} \right) - \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \left(\frac{9 \cdot \omega_0^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{2} \right) + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot (3 \cdot \omega_0 - \omega_0) \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \frac{26 \cdot \omega_0^3}{3} + \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \left(-\frac{8 \cdot \omega_0^2}{2} \right) + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot 2 \cdot \omega_0 + \frac{\pi^2}{2 \cdot \omega_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^2}{16 \cdot \omega_0^4} \cdot \frac{26 \cdot \omega_0^3}{3} - \frac{6 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^3} \cdot \frac{8 \cdot \omega_0^2}{2} + \frac{9 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0^2} \cdot 2 \cdot \omega_0 \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{26 \cdot \pi^2}{48 \cdot \omega_0} - \frac{48 \cdot \pi^2}{32 \cdot \omega_0} + \frac{18 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0} + \frac{\pi^2}{2 \cdot \omega_0} + \frac{26 \cdot \pi^2}{48 \cdot \omega_0} - \frac{48 \cdot \pi^2}{32 \cdot \omega_0} + \frac{18 \cdot \pi^2}{16 \cdot \omega_0} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2 \cdot \omega_0} \cdot \left[\frac{26}{24} - \frac{48}{16} + \frac{18}{8} + 1 + \frac{26}{24} - \frac{48}{16} + \frac{18}{8} \right] = \\ &= \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \left[\frac{52}{24} - \frac{96}{16} + \frac{36}{8} + 1 \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \left[\frac{52}{24} - 6 + \frac{108}{24} + 1 \right] = \\
&= \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \left[\frac{160}{24} - 5 \right] = \\
&= \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \left[\frac{160}{24} - \frac{120}{24} \right] = \\
&= \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \left[\frac{40}{24} \right] = \\
&= \frac{5 \cdot \pi}{12 \cdot \omega_0}
\end{aligned}$$

Podsumowując, całkowita energia sygnału $f(t) = Sa^2(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ to $E = \frac{5 \cdot \pi}{12 \cdot \omega_0}$.

Energię sygnału dla pewnego zakresu pulsacji, także można wyznaczyć z twierdzenia Parsewala, ale zmieniając granice w całce zgodnie z oczekiwanym zakresem pulsacji, czyli dla pulsacji $|\omega| < \omega_0$ otrzymamy wzór:

$$E_{|\omega| < \omega_0} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega \quad (3.132)$$

Podstawiając dane dla naszego sygnału otrzymamy:

$$\begin{aligned}
E_{|\omega| < \omega_0} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} |F(j\omega)|^2 \cdot d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \left| \frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} \right|^2 \cdot d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \left(\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} \right)^2 \cdot d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2 \cdot \omega_0} \right)^2 \cdot \int_{-\omega_0}^{\omega_0} d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi^2}{4 \cdot \omega_0^2} \right) \cdot \omega \Big|_{-\omega_0}^{\omega_0} = \\
&= \frac{\pi}{8 \cdot \omega_0^2} \cdot (\omega_0 - (-\omega_0)) = \\
&= \frac{\pi}{8 \cdot \omega_0^2} \cdot (2 \cdot \omega_0) = \\
&= \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0}
\end{aligned}$$

Podsumowując $E_{|\omega| < \omega_0} = \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0}$.

Teraz możemy obliczyć:

$$\frac{E_{|\omega| < \omega_0}}{E} = ? \quad (3.133)$$

Podstawiając nasze wcześniejsze wyniki otrzymujemy:

$$\frac{E_{|\omega| < \omega_0}}{E} = \frac{\frac{\pi}{4 \cdot \omega_0}}{\frac{5 \cdot \pi}{12 \cdot \omega_0}} = \frac{\pi}{4 \cdot \omega_0} \cdot \frac{12 \cdot \omega_0}{5 \cdot \pi} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = 60\%$$

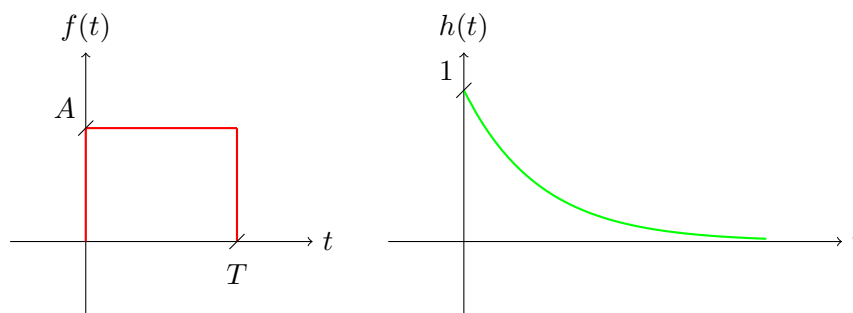
Na pulsacje z zakresu $|\omega| < \omega_0$ przypada 60% energii sygnału.

Rozdział 4

Transmisja sygnałów przez układy liniowe o stałych parametrach (LTI)

4.1 Obliczanie splotu ze wzoru

Zadanie 1. Oblicz splot sygnałów $f(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t-T}{T}\right)$ i $h(t) = \mathbb{1}(t) \cdot e^{-a \cdot t}$



Wzór na splot sygnałów

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau \quad (4.1)$$

Wzory sygnałów pod całką

$$f(\tau) = A \cdot \Pi\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

$$h(t - \tau) = \mathbb{1}(t) \cdot e^{-a \cdot (t - \tau)}$$

$$f(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; 0) \\ A & \tau \in (0; T) \\ 0 & \tau \in (T; \infty) \end{cases}$$

$$h(t - \tau) = \begin{cases} e^{-a \cdot (t - \tau)} & \tau \in (-\infty; t) \\ 0 & \tau \in (t; \infty) \end{cases}$$

Wykresy obu funkcji w dziedzinie τ dla różnych wartości t :

Po wymnożeniu obu funkcji, dla przykładowych wartości t , otrzymujemy (ciągła, czerwona linia):

Z wykresu widać, że dla różnych wartości t otrzymujemy różny kształt funkcji podcałkowej $f(\tau) \cdot h(t - \tau)$. W związku z tym, wyznaczymy spłot oddzielnie dla poszczególnych przedziałów wartości t

Przedział 1 Dla wartości t spełniających warunek $t < 0$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot d\tau = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Przedział 2 Dla wartości t spełniających warunki $t \geq 0$ i $t < T$ otrzymujemy

$$f(\tau) \cdot h(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; 0) \\ A \cdot e^{-a \cdot (t - \tau)} & \tau \in (0; t) \\ 0 & \tau \in (t; \infty) \end{cases}$$

Wartość splotu $y(t)$ wyznaczamy ze wzoru:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot d\tau + \int_0^t (A \cdot e^{-a \cdot (t - \tau)}) \cdot d\tau + \int_t^{\infty} 0 \cdot d\tau = \\ &= 0 + A \cdot \int_0^t (e^{-a \cdot t} \cdot e^{a \cdot \tau}) \cdot d\tau + 0 = \\ &= A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \int_0^t (e^{a \cdot \tau}) \cdot d\tau = \\ &= A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot \tau} \Big|_0^t = \\ &= \frac{A}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot (e^{a \cdot t} - e^{a \cdot 0}) = \\ &= \frac{A}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot (e^{a \cdot t} - 1) = \\ &= \frac{A}{a} \cdot (e^{a \cdot t} \cdot e^{-a \cdot t} - 1 \cdot e^{-a \cdot t}) = \\ &= \frac{A}{a} \cdot (e^{a \cdot t - a \cdot t} - e^{-a \cdot t}) = \\ &= \frac{A}{a} \cdot (e^0 - e^{-a \cdot t}) = \\ &= \frac{A}{a} \cdot (1 - e^{-a \cdot t}) \end{aligned}$$

Przedział 3 Dla wartości t spełniających warunki $t \geq T$ otrzymujemy

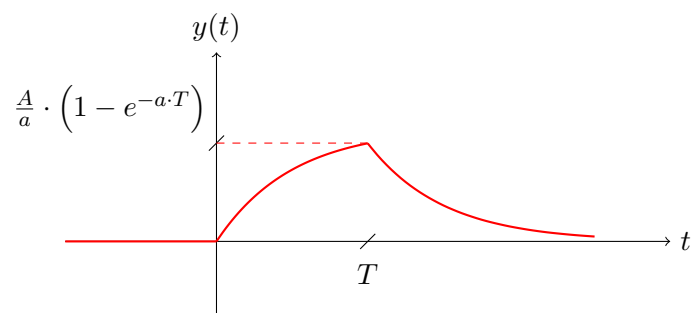
$$f(\tau) \cdot h(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; 0) \\ A \cdot e^{-a \cdot (t - \tau)} & \tau \in (0; T) \\ 0 & \tau \in (T; \infty) \end{cases}$$

Wartość splotu $y(t)$ wyznaczamy ze wzoru:

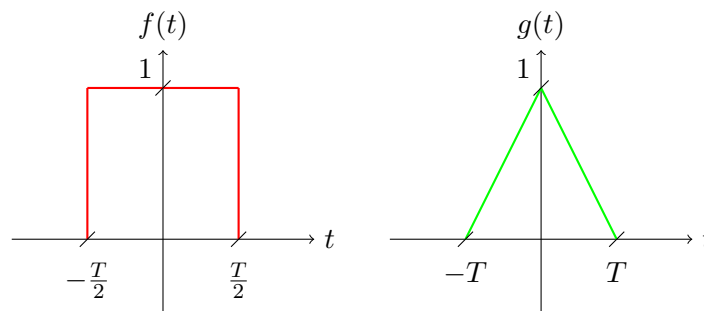
$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot d\tau + \int_0^T (A \cdot e^{-a \cdot (t - \tau)}) \cdot d\tau + \int_T^{\infty} 0 \cdot d\tau = \\ &= 0 + A \cdot \int_0^T (e^{-a \cdot t} \cdot e^{a \cdot \tau}) \cdot d\tau + 0 = \\ &= A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \int_0^T (e^{a \cdot \tau}) \cdot d\tau = \\ &= A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot \tau} \Big|_0^T = \\ &= \frac{A}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot (e^{a \cdot T} - e^{a \cdot 0}) = \\ &= \frac{A}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot (e^{a \cdot T} - 1) \end{aligned}$$

Podsumowując:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty; 0) \\ \frac{A}{a} \cdot (1 - e^{-a \cdot t}) & t \in (0; T) \\ \frac{A}{a} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot (e^{a \cdot T} - 1) & t \in (T; \infty) \end{cases}$$



Zadanie 2. Oblicz splot sygnałów $f(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ i $g(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$



Wzór na splot sygnałów

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau \quad (4.2)$$

Wzory sygnałów pod całką

$$f(\tau) = \Pi\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

$$g(t - \tau) = \Lambda\left(\frac{t - \tau}{T}\right)$$

$$f(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; -\frac{T}{2}) \\ A & \tau \in (-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}) \\ 0 & \tau \in (\frac{T}{2}; \infty) \end{cases}$$

$$g(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; t - T); \\ \frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{t-T}{T} & \tau \in (t - T; t) \\ -\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{-t-T}{T} & \tau \in (t; t + T) \\ 0 & \tau \in (t + T; \infty); \end{cases}$$

Wykresy obu funkcji dla różnych wartości t

Po wymnożeniu obu funkcji dla przykładowych wartości t otrzymujemy

Jak widać dla różnych wartości t otrzymujemy różny kształt funkcji podcałkowej $f(\tau) \cdot g(t - \tau)$.

Przedział 1 .

Dla wartości t spełniających warunek $t + T < -\frac{T}{2}$

$$\begin{aligned} t + T &< -\frac{T}{2} \\ t &< -\frac{T}{2} - T \\ t &< -\frac{3}{2} \cdot T \end{aligned}$$

w wyniku mnożenia otrzymamy 0 a więc wartość splotu jest także równa 0

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot d\tau \\ &= 0 \end{aligned}$$

Przedział 2 .

Dla wartości t spełniających warunki $t + T \geq -\frac{T}{2}$ i $t < -\frac{T}{2}$

$$\begin{array}{lll} t + T \geq -\frac{T}{2} & \wedge & t < -\frac{T}{2} \\ t \geq -\frac{T}{2} - T & \wedge & t < -\frac{T}{2} \\ t \geq -\frac{3}{2} \cdot T & \wedge & t < -\frac{T}{2} \end{array}$$

a więc $t \in \left(-\frac{3}{2} \cdot T, -\frac{T}{2}\right)$

w wyniku mnożenia otrzymujemy prostą zdefiniowaną na odcinku $t \in \left(-\frac{T}{2}, t + T\right)$.

$$f(\tau) \cdot g(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in \left(-\infty; -\frac{T}{2}\right) \\ -\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{-t-T}{T} & \tau \in \left(-\frac{T}{2}; t + T\right) \\ 0 & \tau \in (t + T; \infty) \end{cases}$$

wartość splotu wyznaczamy z ze wzoru

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{-\frac{T}{2}} 0 \cdot d\tau + \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T} \left(-\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{-t-T}{T}\right) \cdot d\tau + \int_{t+T}^{\infty} 0 \cdot d\tau = \\ &= 0 - \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T} \frac{1}{T} \cdot \tau d\tau + \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T} \frac{t+T}{T} \cdot d\tau + 0 = \\ &= -\frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T} \tau \cdot d\tau + \frac{t+T}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{t+T} d\tau = \\ &= -\frac{1}{T} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \tau^2\right)_{-\frac{T}{2}}^{t+T} + \frac{t+T}{T} \cdot (\tau)_{-\frac{T}{2}}^{t+T} = \\ &= -\frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left((t+T)^2 - \left(-\frac{T}{2}\right)^2\right) + \frac{t+T}{T} \cdot \left(t+T - \left(-\frac{T}{2}\right)\right) = \\ &= -\frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + 2 \cdot t \cdot T + T^2 - \frac{T^2}{4}\right) + \frac{t+T}{T} \cdot \left(t+T + \frac{T}{2}\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + 2 \cdot t \cdot T + \frac{3}{4} \cdot T^2 \right) + \frac{t+T}{T} \cdot \left(t + \frac{3}{2} \cdot T \right) = \\
&= -\frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + 2 \cdot t \cdot T + \frac{3}{4} \cdot T^2 \right) + \frac{1}{T} \cdot \left(t^2 + \frac{3}{2} \cdot t \cdot T + t \cdot T + \frac{3}{2} \cdot T^2 \right) = \\
&= -\frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + 2 \cdot t \cdot T + \frac{3}{4} \cdot T^2 \right) + \frac{2}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + \frac{5}{2} \cdot t \cdot T + \frac{3}{2} \cdot T^2 \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-t^2 - 2 \cdot t \cdot T - \frac{3}{4} \cdot T^2 \right) + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(2 \cdot t^2 + 5 \cdot t \cdot T + 3 \cdot T^2 \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-t^2 - 2 \cdot t \cdot T - \frac{3}{4} \cdot T^2 + 2 \cdot t^2 + 5 \cdot t \cdot T + 3 \cdot T^2 \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + 3 \cdot t \cdot T + 2 \frac{1}{4} \cdot T^2 \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2 + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot 3 \cdot t \cdot T + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \frac{9}{4} \cdot T^2 = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2 + \frac{3}{2} \cdot t + \frac{9}{8} \cdot T
\end{aligned}$$

Przedział 3 .

Dla wartości t spełniających warunki $t \geq -\frac{T}{2}$ i $t < \frac{T}{2}$

$$t \geq -\frac{T}{2} \quad \wedge \quad t < \frac{T}{2}$$

a więc $t \in \left(-\frac{1}{2} \cdot T, \frac{1}{2} \cdot T \right)$

w wyniku mnożenia otrzymujemy dwie proste zdefiniowaną na odcinkach $t \in \left(-\frac{T}{2}, t \right)$ oraz $t \in \left(t, \frac{T}{2} \right)$.

$$f(\tau) \cdot g(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in \left(-\infty; -\frac{T}{2} \right) \\ \frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{t-T}{T} & \tau \in \left(-\frac{T}{2}; t \right) \\ -\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{-t-T}{T} & \tau \in \left(t; \frac{T}{2} \right) \\ 0 & \tau \in \left(\frac{T}{2}; \infty \right) \end{cases}$$

wartość splotu wyznaczamy z ze wzoru

$$\begin{aligned}
h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau = \\
&= \int_{-\infty}^{-\frac{T}{2}} 0 \cdot d\tau + \int_{-\frac{T}{2}}^t \left(\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{t - T}{T} \right) \cdot d\tau + \int_t^{\frac{T}{2}} \left(-\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{-t - T}{T} \right) \cdot d\tau + \int_{\frac{T}{2}}^{\infty} 0 \cdot d\tau = \\
&= 0 + \int_{-\frac{T}{2}}^t \frac{1}{T} \cdot \tau \cdot d\tau - \int_{-\frac{T}{2}}^t \frac{t - T}{T} \cdot d\tau + \int_t^{\frac{T}{2}} \left(-\frac{1}{T} \cdot \tau \right) \cdot d\tau - \int_t^{\frac{T}{2}} \frac{-t - T}{T} \cdot d\tau + 0 = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^t \tau \cdot d\tau - \frac{t - T}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^t d\tau - \frac{1}{T} \cdot \int_t^{\frac{T}{2}} \tau \cdot d\tau + \frac{t + T}{T} \cdot \int_t^{\frac{T}{2}} d\tau = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \tau^2 \Big|_{-\frac{T}{2}}^t - \frac{t - T}{T} \cdot \tau \Big|_{-\frac{T}{2}}^t - \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \tau^2 \Big|_t^{\frac{T}{2}} + \frac{t + T}{T} \cdot \tau \Big|_t^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 - \left(-\frac{T}{2} \right)^2 \right) - \frac{t - T}{T} \cdot \left(t - \left(-\frac{T}{2} \right) \right) - \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\left(\frac{T}{2} \right)^2 - t^2 \right) + \frac{t + T}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - t \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + \frac{1}{4} \cdot T^2 \right) - \frac{t - T}{T} \cdot \left(t + \frac{T}{2} \right) - \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot T^2 - t^2 \right) + \frac{t + T}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - t \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + \frac{1}{4} \cdot T^2 \right) - \frac{2}{2 \cdot T} \cdot (t - T) \cdot \left(t + \frac{T}{2} \right) - \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot T^2 - t^2 \right) + \frac{2}{2 \cdot T} \cdot (t + T) \cdot \left(\frac{T}{2} - t \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + \frac{1}{4} \cdot T^2 \right) - \frac{2}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + \frac{1}{2} \cdot t \cdot T - t \cdot T - \frac{1}{2} \cdot T^2 \right) - \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot T^2 - t^2 \right) + \\
&+ \frac{2}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot t \cdot T - t^2 + \frac{1}{2} \cdot T^2 - t \cdot T \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + \frac{1}{4} \cdot T^2 \right) + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-2 \cdot t^2 - t \cdot T + 2 \cdot t \cdot T + T^2 \right) + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot T^2 + t^2 \right) + \\
&+ \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t \cdot T - 2 \cdot t^2 + T^2 - 2 \cdot t \cdot T \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(t^2 + \frac{1}{4} \cdot T^2 - 2 \cdot t^2 - t \cdot T + 2 \cdot t \cdot T + T^2 - \frac{1}{4} \cdot T^2 + t^2 + t \cdot T - 2 \cdot t^2 + T^2 - 2 \cdot t \cdot T \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-2 \cdot t^2 + 2 \cdot T^2 \right) = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \left(-t^2 + T^2 \right) = \\
&= -\frac{1}{T} \cdot t^2 + T
\end{aligned}$$

Przedział 4 .

Dla wartości t spełniających warunki $t - T \geq -\frac{T}{2}$ i $t - T < \frac{T}{2}$

$$\begin{array}{lll}
t - T \geq -\frac{T}{2} & \wedge & t - T < \frac{T}{2} \\
t \geq -\frac{T}{2} + T & \wedge & t < \frac{T}{2} + T \\
t \geq \frac{1}{2} \cdot T & \wedge & t < \frac{3}{2} \cdot T
\end{array}$$

a więc $t \in \left(\frac{1}{2} \cdot T, \frac{3}{2} \cdot T\right)$

w wyniku mnożenia otrzymujemy prostą zdefiniowaną na odcinku $t \in \left(t - T, \frac{T}{2}\right)$.

$$f(\tau) \cdot g(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \tau \in (-\infty; t - T) \\ \frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{t-T}{T} & \tau \in \left(t - T; \frac{T}{2}\right) \\ 0 & \tau \in \left(\frac{T}{2}; \infty\right) \end{cases}$$

wartość splotu wyznaczamy z ze wzoru

$$\begin{aligned}
h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau = \\
&= \int_{-\infty}^{t-T} 0 \cdot d\tau + \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1}{T} \cdot \tau - \frac{t-T}{T}\right) \cdot d\tau + \int_{\frac{T}{2}}^{\infty} 0 \cdot d\tau = \\
&= 0 + \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{T} \cdot \tau \cdot d\tau - \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} \frac{t-T}{T} \cdot d\tau + 0 = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} \tau \cdot d\tau - \frac{t-T}{T} \cdot \int_{t-T}^{\frac{T}{2}} d\tau = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \tau^2 \Big|_{t-T}^{\frac{T}{2}} - \frac{t-T}{T} \cdot \tau \Big|_{t-T}^{\frac{T}{2}} = \\
&= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{T}{2}\right)^2 - (t-T)^2 \right) - \frac{t-T}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - (t-T) \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot T^2 - (t^2 - 2 \cdot t \cdot T + T^2) \right) - \frac{t-T}{T} \cdot \left(\frac{T}{2} - t + T \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot T^2 - t^2 + 2 \cdot t \cdot T - T^2 \right) - \frac{1}{T} \cdot (t-T) \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot T - t \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot T^2 - t^2 + 2 \cdot t \cdot T \right) - \frac{2}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot t \cdot T - t^2 - \frac{3}{2} \cdot T^2 + t \cdot T \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot T^2 - t^2 + 2 \cdot t \cdot T \right) - \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{6}{2} \cdot t \cdot T - 2 \cdot t^2 - \frac{6}{2} \cdot T^2 + 2 \cdot t \cdot T \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot T^2 - t^2 + 2 \cdot t \cdot T - \frac{6}{2} \cdot t \cdot T + 2 \cdot t^2 + \frac{6}{2} \cdot T^2 - 2 \cdot t \cdot T \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \left(\frac{9}{4} \cdot T^2 - 3 \cdot t \cdot T + t^2 \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \frac{9}{4} \cdot T^2 - \frac{1}{2 \cdot T} \cdot 3 \cdot t \cdot T + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2 = \\
&= \frac{9}{8} \cdot T - \frac{3}{2} \cdot t + \frac{1}{2 \cdot T} \cdot t^2
\end{aligned}$$

Przedział 5

Dla wartości t spełniających warunek $t - T \geq \frac{T}{2}$.

$$\begin{aligned} t - T &\geq \frac{T}{2} \\ t &\geq \frac{T}{2} + T \\ t &\geq \frac{3}{2} \cdot T \end{aligned}$$

a więc $t \in \left(\frac{3}{2} \cdot T, \infty\right)$

w wyniku mnożenia otrzymujemy sygnał zerowy

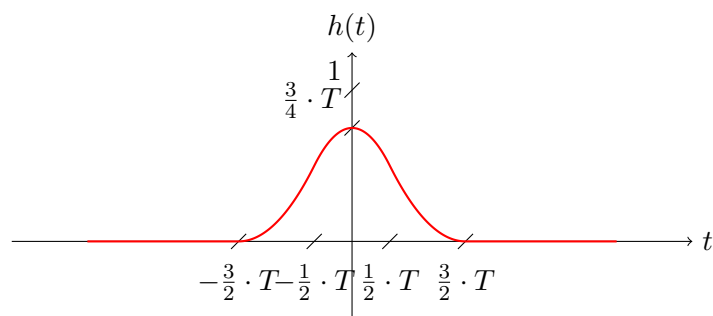
$$f(\tau) \cdot g(t - \tau) = 0$$

a więc wartość splotu wyznaczona ze wzoru

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot d\tau = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Podsumowanie Zbierając wyniki, wynik splotu wyrażony jest jako funkcja o pięciu przedziałach

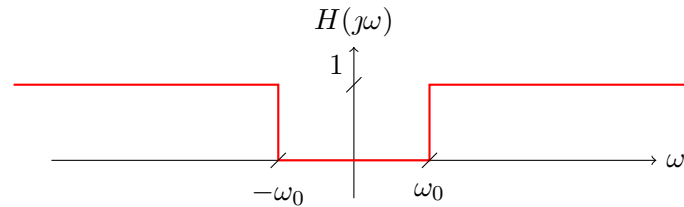
$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau = \\ &= \begin{cases} 0 & \tau \in \left(-\infty; -\frac{3}{2} \cdot T\right); \\ \frac{1}{2T} \cdot t^2 + \frac{3}{2} \cdot t + \frac{9}{8} \cdot T & \tau \in \left(-\frac{3}{2} \cdot T; -\frac{1}{2} \cdot T\right); \\ -\frac{1}{T} \cdot t^2 + \frac{3}{4} \cdot T & \tau \in \left(-\frac{1}{2} \cdot T; \frac{1}{2} \cdot T\right); \\ \frac{9}{8} \cdot T - \frac{3}{2} \cdot t + \frac{1}{2T} \cdot t^2 & \tau \in \left(\frac{1}{2} \cdot T; \frac{3}{2} \cdot T\right); \\ 0 & \tau \in \left(\frac{3}{2} \cdot T; \infty\right); \end{cases} \end{aligned}$$



4.2 Filtry

Zadanie 1.

Na układ LTI o transmitancji podanej poniżej, podano sygnał $u(t) = A \cdot \text{Sa}(3 \cdot \omega_0 \cdot t)$. Wyznacz odpowiedź układu $y(t)$ wiedząc, że $\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



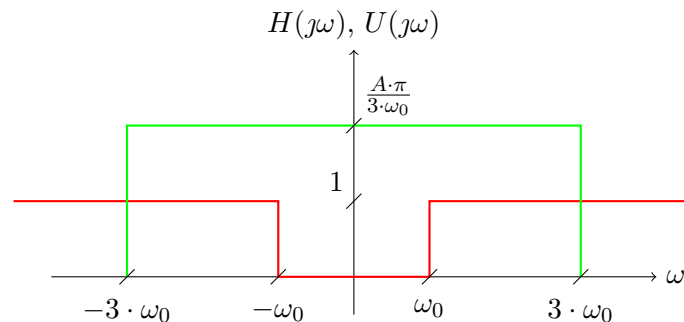
Wiemy, że odpowiedź układu LTI można obliczyć z zależności $y(t) = u(t) * h(t)$, gdzie $h(t)$ jest odpowiedzią impulsową układu. Wiemy także, że transformatę odpowiedzi układu można wyznaczyć ze wzoru $Y(j\omega) = U(j\omega) \cdot H(j\omega)$.

Ponieważ wyznaczenie spłotu liniowego sygnałów jest bardziej skomplikowane niż operacja mnożenia, dlatego spróbujemy skorzystać z tej drugiej zależności, czyli mnożenia transformat. W tym celu musimy wyznaczyć transformatę sygnału wejściowego $u(t)$, czyli $U(j\omega)$.

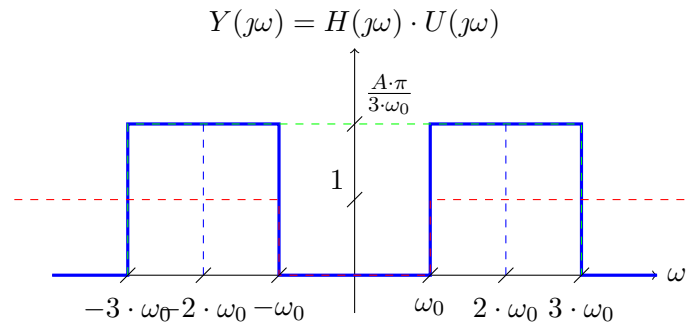
$$\begin{aligned}\Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \text{Sa}\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(-\omega) \\ \text{Sa}\left(6 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|6 \cdot \omega_0|} \cdot 2\pi \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{6 \cdot \omega_0}\right) \\ A \cdot \text{Sa}(3 \cdot \omega_0 \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{3 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{6 \cdot \omega_0}\right)\end{aligned}$$

Transformata sygnału wejściowego $u(t)$ to $U(j\omega) = \frac{A \cdot \pi}{3 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{6 \cdot \omega_0}\right)$.

Transformatę sygnału wyjściowego, czyli $Y(j\omega) = U(j\omega) \cdot H(j\omega)$ wyznaczymy graficznie. W tym celu na wykresie transmitancji $H(j\omega)$ dodamy transformatę $U(j\omega)$:



Teraz dokonujemy operacji mnożenia transformat $U(j\omega)$ przez $H(j\omega)$



Opiszmy transformatę $Y(j\omega)$ używając sygnałów elementarnych

$$Y(j\omega) = \frac{A \cdot \pi}{3 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 2 \cdot \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) + \frac{A \cdot \pi}{3 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + 2 \cdot \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) \quad (4.3)$$

Skoro znamy transformatę sygnału wyjściowego, to spróbujemy wyznaczyć sygnał wyjściowy w dziedzinie czasu wykorzystując wcześniejsze obliczenia. Transformata $Y(j\omega)$ to suma dwóch przeskalowanych prostokątów, przesuniętych na osi pulsacji. W takim razie można wnioskować, że sygnał w dziedzinie czasu to będzie suma dwóch zmodulowanych i przeskalowanych funkcji $Sa(t)$.

$$\begin{aligned} \Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ ? &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{3 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + 2 \cdot \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ Sa\left(\frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \Pi(-\omega) \\ Sa\left(2 \cdot \omega_0 \cdot \frac{t}{2}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|2 \cdot \omega_0|} \cdot 2\pi \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right) \\ Sa(\omega_0 \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2 \cdot \omega_0}\right) \\ e^{(j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t)} \cdot Sa(\omega_0 \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{\omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 2 \cdot \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) \\ \frac{A}{3} \cdot e^{(j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t)} \cdot Sa(\omega_0 \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{3 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 2 \cdot \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{3} \cdot e^{(j \cdot (-2 \cdot \omega_0) \cdot t)} \cdot Sa(\omega_0 \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{3 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - (-2 \cdot \omega_0)}{2 \cdot \omega_0}\right) \\ \frac{A}{3} \cdot e^{(j \cdot (-2 \cdot \omega_0) \cdot t)} \cdot Sa(\omega_0 \cdot t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A \cdot \pi}{3 \cdot \omega_0} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + 2 \cdot \omega_0}{2 \cdot \omega_0}\right) \end{aligned}$$

Podsumowując sygnał wyjściowy $y(t)$:

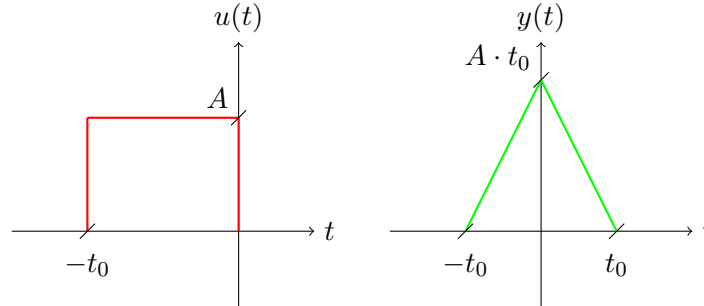
$$y(t) = \frac{A}{3} \cdot e^{(j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t)} \cdot Sa(\omega_0 \cdot t) + \frac{A}{3} \cdot e^{(j \cdot (-2 \cdot \omega_0) \cdot t)} \cdot Sa(\omega_0 \cdot t) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{A}{3} \cdot Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot \left(e^{(j \cdot 2 \cdot \omega_0 \cdot t)} + e^{(j \cdot (-2 \cdot \omega_0) \cdot t)} \right) = \\ &= \left\{ \cos(x) = \frac{e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x}}{2} \right\} = \\ &= \frac{2 \cdot A}{3} \cdot Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(2 \cdot \omega_0 \cdot t) \end{aligned}$$

Odpowiedź układu to $y(t) = \frac{2 \cdot A}{3} \cdot Sa(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(2 \cdot \omega_0 \cdot t)$.

Zadanie 2.

Wyznacz odpowiedź impulsową $h(t)$ układu LTI, wiedząc, że sygnały $u(t)$ oraz $y(t)$ wyglądają jak na poniższych wykresach. Wykorzystaj informacje o transformatach sygnałów: $\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)$ oraz $\Lambda(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$.



Wiemy, że transformatę odpowiedzi układu można wyznaczyć ze wzoru $Y(j\omega) = U(j\omega) \cdot H(j\omega)$ oraz że $h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega)$. W związku z tym $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$ oraz $h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} H(j\omega)$.

Aby wyznaczyć transmitancję $H(j\omega)$ trzeba obliczyć sygnałów $u(t)$ oraz $y(t)$:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= A \cdot \Pi\left(\frac{t + \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) & y(t) &= A \cdot t_0 \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) \\
 u(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} U(j\omega) & y(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega) \\
 \Pi(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) & \Lambda(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
 \Pi\left(\frac{1}{t_0} \cdot t\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) & \Lambda\left(\frac{1}{t_0} \cdot t\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\
 \Pi\left(\frac{t + \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} & A \cdot t_0 \cdot \Lambda\left(\frac{t}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot t_0^2 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\
 A \cdot \Pi\left(\frac{t + \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}}
 \end{aligned}$$

Skoro znamy transformaty sygnałów wejściowego i wyjściowego, to możemy wyznaczyć transmitancję układu, czyli $H(j\omega)$.

$$\begin{aligned}
 H(j\omega) &= \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \\
 &= \frac{A \cdot t_0^2 \cdot Sa^2\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right)}{A \cdot t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{j\omega \cdot \frac{t_0}{2}}} = \\
 &= t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}}
 \end{aligned}$$

Teraz możemy wyznaczyć odpowiedź impulsową układu $h(t)$:

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} H(j\omega)$$

$$\begin{aligned}
 &? \xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}} \\
 &\Pi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
 &\Pi\left(\frac{1}{t_0} \cdot t\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \\
 &\Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} t_0 \cdot Sa\left(\frac{\omega \cdot t_0}{2}\right) \cdot e^{-j\omega \cdot \frac{t_0}{2}}
 \end{aligned}$$

Odpowiedź impulsowa układu to $h(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{t_0}{2}}{t_0}\right)$.

© 2020

Wszelkie prawa zastrzeżone.

ISBN 978-83-939620-1-3



9 788393 962013